ΚΡΟΥΣΕΙΣ - ΘΕΜΑ Β

Β1. Ένα σώμα A μάζας m_1 κινούμενο με ταχύτητα υ_1 συγκρούεται κεντρικά και ελαστικά με ακίνητο σώμα B μάζας m_2. Το σώμα A συνεχίζει μετά την κρούση να κινείται κατά την ίδια φορά με ταχύτητα u1’ = ½ u1 . Ο λόγος των μαζών των δύο σωμάτων,m1/m2 , είναι ίσος με:

α) 3 , β) 2 , γ) 1/3 .

Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

<u>Λύση</u>

Σωστή απάντηση είναι η α.

Επειδή η κρούση είναι κεντρική ελαστική και το σώμα Β είναι αρχικά ακίνητο, το σώμα Α μετά την κρούση θα κινηθεί με ταχύτητα που δίνεται από τη σχέση

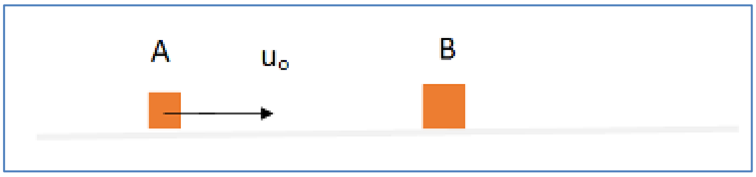
$$\upsilon'_1 = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2}\upsilon_1$$

Με αντικατάσταση παίρνουμε

$$\frac{\upsilon_1}{2} = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} \cdot \upsilon_1 \Rightarrow m_1 + m_2 = 2m_1 - 2m_2 \Rightarrow m_1 = 3m_2$$

Άρα, $\dfrac{m_1}{m_2} = 3$.

<u>Β2.</u>



Τα σώματα Α και Β του σχήματος με μάζες m_A και m_B αντίστοιχα είναι ακίνητα πάνω σε λείο οριζόντιο δάπεδο. Εκτοξεύουμε το σώμα Α με ταχύτητα u_o προς το Β, η κρούση που ακολουθεί είναι κεντρική πλαστική και διαρκεί χρονικό διάστημα Δt. Το μέτρο της μέσης δύναμης που άσκησε το σώμα Α στο σώμα Β δίνεται από τη σχέση α. $F = \dfrac{m_B m_A u_o}{(m_A - m_B)\Delta t}$, β. $F = \dfrac{m_B m_A u_o}{(m_A + m_B)\Delta t}$, γ. $F = \dfrac{(m_B + m_A)u_o}{m_A m_B \Delta t}$

Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

Λύση

Σωστή απάντηση είναι η (β).

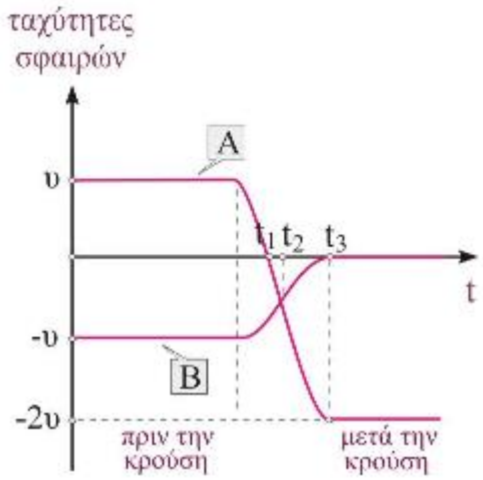
Επειδή η κρούση είναι κεντρική η διατήρηση της ορμής αλγεβρικά γράφεται:

$p_{αρχ} = p_{τελ}$ ή $m_A u_0 = (m_A + m_B)V$ ή $V = \dfrac{m_A u_o}{m_A + m_B}$. **(1)**

Το μέτρο της μέσης δύναμης F που αναπτύσσει το A στο B είναι:

$$F = \frac{\Delta p}{\Delta t} = \frac{m_B V - 0}{\Delta t}$$

Με αντικατάσταση της V από την **(1)** παίρνουμε: $F = \dfrac{m_B m_A u_o}{(m_A + m_B)\Delta t}$



B3. Στο διάγραμμα του σχήματος φαίνονται οι αλγεβρικές τιμές των ταχυτήτων δυο σφαιρών Α και Β πριν και μετά τη μεταξύ τους κεντρική κρούση. Οι μάζες των δύο σφαιρών συνδέονται με τη σχέση

α. $m_B = 3m_A$

β. $m_B = 2m_A$

γ. $m_B = m_A$

Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

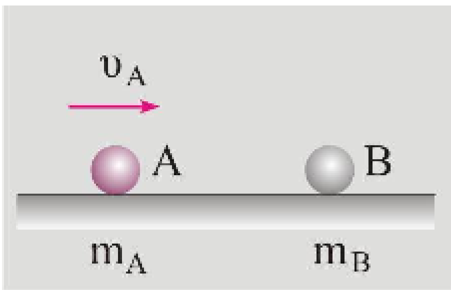
Λύση

Σωστή απάντηση είναι η (α).

Επειδή η κρούση είναι κεντρική η διατήρηση της ορμής αλγεβρικά γράφεται:

$$p_{αρχ} = p_{τελ} \Rightarrow m_A v - m_B v = -m_A \cdot 2v + 0 \Rightarrow m_B = 3m_A$$

B4. Η σφαίρα Α του σχήματος, μάζας m_A, προσπίπτει με ταχύτητα μέτρου υ στην ακίνητη σφαίρα Β, μάζας $m_B = m_A/3$, σχηματίζοντας συσσωμάτωμα. Κατά την κρούση το 25% της



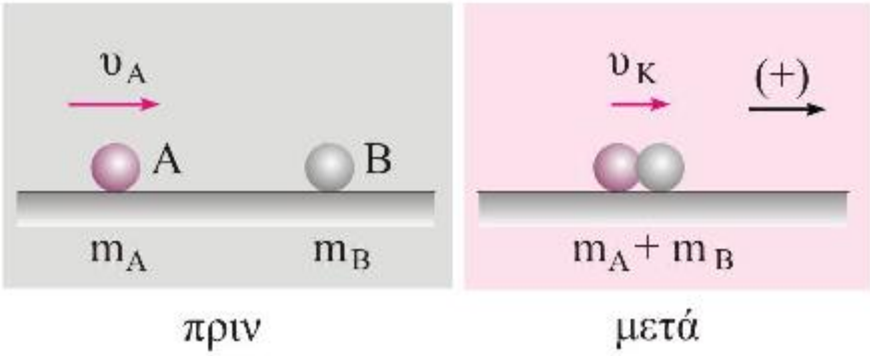
πριν

αρχικής κινητικής ενέργειας του συστήματος γίνεται θερμότητα.

Αν η σφαίρα Α προσπέσει στη σφαίρα Β με ταχύτητα μέτρου 2υ , το ποσοστό της αρχικής κινητικής ενέργειας του συστήματος που θα γίνει θερμότητα είναι
α. 25%, β. 50% , γ. 75%.
Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

Λύση

Σωστή απάντηση είναι η (α).



Εφαρμόζουμε την ΑΔΟ και έχουμε:

$$p_{\alpha\rho\chi} = p_{\tau\varepsilon\lambda} \Rightarrow m_A\upsilon_A = (m_A+m_B)\upsilon_K \text{ , (1)}$$

$$\Pi\% = \frac{Q}{K_{\alpha\rho\chi}}100\% = \frac{\frac{1}{2}m_A\upsilon_A^2 - \frac{1}{2}(m_A+m_B)\upsilon_K^2}{\frac{1}{2}m_A\upsilon_A^2}100\% = \frac{m_A\upsilon_A^2 - (m_A+m_B)\left(\frac{m_A\upsilon_A}{m_A+m_B}\right)^2}{m_A\upsilon_A^2}100\% \Rightarrow$$

$$\Pi\% = \frac{m_B}{m_A+m_B}100\%$$

Παρατηρούμε ότι το αποτέλεσμα είναι ανεξάρτητο της αρχικής ταχύτητας υ_A .

B5. Σώμα μάζας m κινείται οριζόντια με ταχύτητα υ . Στην πορεία του συγκρούεται πλαστικά με ακίνητο σώμα μάζας $M=3m$. Η απόλυτη τιμή της μεταβολής της ορμής $\Delta P_{o\lambda}$ και της κινητικής ενέργειας ΔΚολ του συστήματος είναι αντίστοιχα:

α) $|\Delta\vec{p}_{o\lambda}| = 0$, $|\Delta K_{o\lambda}| = \dfrac{m\upsilon^2}{3}$,β) $|\Delta\vec{p}_{o\lambda}| = m\upsilon$, $|\Delta K_{o\lambda}| = \dfrac{m\upsilon^2}{3}$.

γ) $|\Delta\vec{p}_{o\lambda}| = 0$, $|\Delta K_{o\lambda}| = \dfrac{3m\upsilon^2}{8}$, δ) $|\Delta\vec{p}_{o\lambda}| = \dfrac{3mv}{4}$, $|\Delta K_{o\lambda}| = \dfrac{3mv^2}{8}$.

Να δικαιολογήσετε την απάντησή σας.

Λύση

Σωστή απάντηση είναι η γ.

Σε κάθε κρούση ισχύει η Αρχή Διατήρησης της Ορμής:

$\vec{p}_{o\lambda}(\alpha\rho\chi) = \vec{p}_{o\lambda}(\tau\varepsilon\lambda)$ (1)

Άρα: $|\Delta\vec{p}_{o\lambda}| = 0$

(1) : $\vec{p}_m + \vec{p}_M = \vec{p}_m' + \vec{p}_M' \Rightarrow mv + 0 = (m+M)V_K \Rightarrow$

$V_K = \dfrac{mv}{m+M} = \dfrac{mv}{m+3m} \Rightarrow V_K = \dfrac{v}{4}$ (2)

$K_{o\lambda}(\alpha\rho\chi) = K_m + K_M = \dfrac{1}{2}mv^2 + 0 \Rightarrow K_{o\lambda}(\alpha\rho\chi) = \dfrac{1}{2}mv^2$ (3)

$K_{o\lambda}(\tau\epsilon\lambda) = K_m' + K_M' = \dfrac{1}{2}(m+M)V_K^2 \xrightarrow{(2)} K_{o\lambda}(\tau\epsilon\lambda) = \dfrac{1}{2}4m\dfrac{v^2}{16} \Rightarrow$

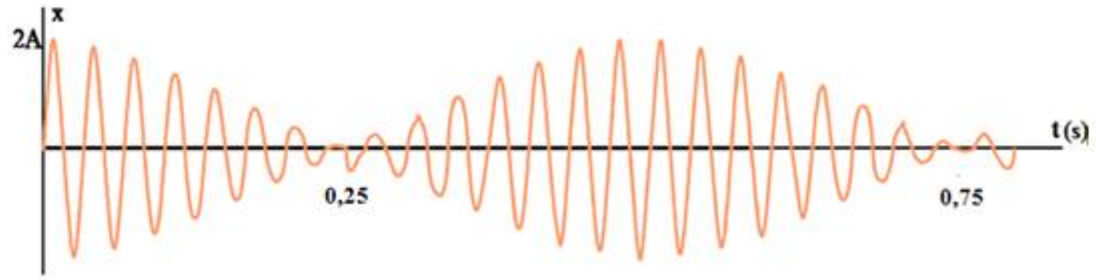
$K_{o\lambda}(\tau\epsilon\lambda) = \dfrac{1}{8}mv^2$ (4)

$|\Delta K_{o\lambda}| = |K_{o\lambda}(\tau\epsilon\lambda) - K_{o\lambda}(\alpha\rho\chi)| \xrightarrow{(3),(4)} |\Delta K_{o\lambda}| = \left|\dfrac{mv^2}{8} - \dfrac{mv^2}{2}\right| = \left|-\dfrac{3mv^2}{8}\right| \Rightarrow$

$|\Delta K_{o\lambda}| = \dfrac{3mv^2}{8}$

▪ ΤΑΛΑΝΤΩΣΕΙΣ

Β1. Από τη σύνθεση δύο απλών αρμονικών ταλαντώσεων, που οι συχνότητές τους f_1 και f_2 $(f_2 > f_1)$ διαφέρουν πολύ λίγο, προκύπτει η ιδιόμορφη περιοδική κίνηση του σχήματος.



Αν η συχνότητα f_1 ισούται με $29Hz$, η συχνότητα της περιοδικής κίνησης ισούται με: α) $31\ Hz$, β) $30\ Hz$, γ) $2\ Hz$

Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

Λύση

Η σωστή απάντηση είναι το β.

Από το σχήμα υπολογίζουμε την περίοδο των διακροτημάτων:

$$T_\delta = 0,75s - 0,25s \Rightarrow T_\delta = 0,5\ s$$

Επομένως, η συχνότητα των διακροτημάτων θα είναι:

$$f_\delta = \frac{1}{T_\delta} \Rightarrow f_\delta = 2\ Hz$$

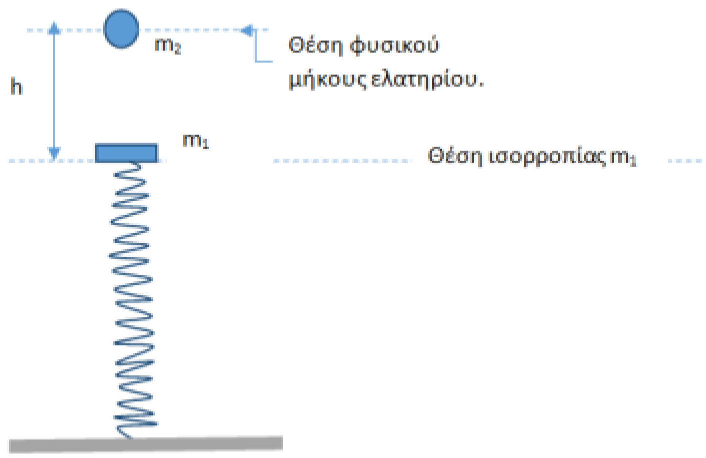
και επειδή $f_\delta = |f_2 - f_1|$ και $f_2 > f_1$:

$$f_2 - f_1 = 2 \Rightarrow f_2 - 29 = 2 \Rightarrow f_2 = 31\ Hz$$

Η συχνότητα της περιοδικής κίνησης υπολογίζεται ως εξής:

$$\bar{\omega} = \frac{\omega_1 + \omega_2}{2} \Rightarrow 2\pi f = \frac{2\pi f_1 + 2\pi f_2}{2} \Rightarrow f = \frac{f_1 + f_2}{2} \Rightarrow f = 30\ Hz$$

Β2.



Στο σχήμα το σώμα μάζας m_1 ισορροπεί χαμηλότερα κατά h από τη θέση φυσικού μήκους του ελατηρίου. Από τη θέση φυσικού μήκους του ελατηρίου αφήνουμε σώμα ίσης μάζας ($m_2 = m_1 = m$) να κάνει ελεύθερη πτώση στην κατακόρυφο που διέρχεται από τον άξονα του ελατηρίου. Η κρούση των σωμάτων είναι κεντρική ελαστική, και αμέσως μετά την κρούση, απομακρύνεται η μάζα m_2, ενώ το σώμα m_1 εκτελεί α.α.τ. Το πλάτος ταλάντωσης του m_1 είναι

α) h , β) $2h$,γ) $h\sqrt{2}$.

Επιλέξτε τη σωστή πρόταση και αιτιολογείστε.

<u>Λύση</u>

Η σωστή απάντηση είναι η (γ).

Για τη θέση ισορροπίας ισχύει: $\Sigma F = 0$ ή $F_{\varepsilon\lambda\alpha\tau.} = mg$ ή $kh = mg$ **(1)**

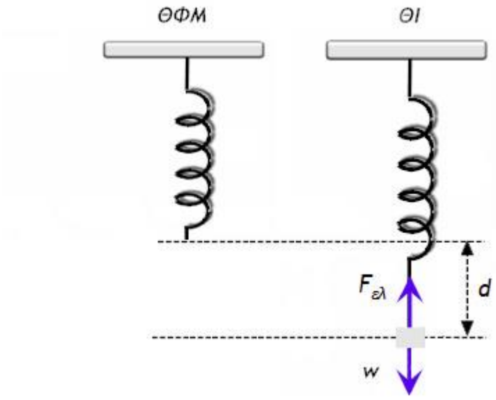
Με εφαρμογή της διατήρησης της μηχανικής Ενέργειας για την πτώση της μάζας m_2 βρίσκουμε την ταχύτητά της ελάχιστα πριν την κρούση:

$mgh = \frac{1}{2}mu_2^2$ ή $u_2 = \sqrt{2gh}$

Επειδή οι μάζες των σωμάτων είναι ίσες και η κρούση κεντρική ελαστική, τα σώματα ανταλλάσουν ταχύτητες, οπότε το σώμα μάζας m_1 θα ξεκινήσει αρμονική ταλάντωση με $\upsilon_{\max} = u_2 = \sqrt{2gh}$

Έχουμε: $\upsilon_{\max} = \omega A \Rightarrow \sqrt{2gh} = \sqrt{\frac{k}{m}}A$ και με αντικατάσταση του k από τη σχέση **(1)** εύκολα προκύπτει $A = h\sqrt{2}$

Β3. Δύο σώματα με μάζες m_1 και m_2 συνδέονται στο ελεύθερο κάτω άκρο δύο κατακόρυφων ελατηρίων των οποίων τα πάνω άκρα είναι σταθερά στερεωμένα. Για τις σταθερές των δύο ελατηρίων ισχύει $K_1 = 4K_2$. Παρατηρούμε ότι το πρώτο ελατήριο, όταν ισορροπεί το σώμα, έχει επιμηκυνθεί κατά d_1, ενώ το δεύτερο κατά $d_2 = 2d_1$. Ποια από τις παρακάτω σχέσεις ισχύει για τις συχνότητες ταλάντωσης των δύο σωμάτων (Θεωρούμε ότι και τα δύο σώματα εκτελούν Α.Α.Τ.).



α) $f_1 = \sqrt{2} \cdot f_2$, β) $f_1 = \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot f_2$, γ) $f_1 = 4 \cdot f_2$

Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

Λύση

Η συνθήκη που ισχύει στη θέση ισορροπίας για το κάθε σύστημα είναι:

$m_1 \cdot g = K_1 \cdot d_1$ (1)

$m_2 \cdot g = K_2 \cdot d_2$ (2)

Διαιρώ τις (1) και (2) κατά μέλη:

$$\frac{m_1 \cdot g}{m_2 \cdot g} = \frac{K_1 \cdot d_1}{K_2 \cdot d_2} \Rightarrow (K_1 = 4K_2 \text{ και } d_2 = 2d_1)$$

$$\frac{m_1}{m_2} = \frac{4 \cdot K_2 \cdot d_1}{K_2 \cdot 2 \cdot d_1} \Rightarrow m_1 = 2m_2$$

Άρα: $T_1 = 2\pi\sqrt{\frac{m_1}{K_1}}$ (3), $T_2 = 2\pi\sqrt{\frac{m_2}{K_2}}$ (4)

$$\frac{T_1}{T_2} = \frac{2\pi\sqrt{\frac{m_1}{K_1}}}{2\pi\sqrt{\frac{m_2}{K_2}}} \Rightarrow$$

$$\frac{T_1}{T_2} = \sqrt{\frac{m_1 \cdot K_2}{m_2 \cdot K_1}} \Rightarrow (m_1 = 2m_2 \text{ και } K_1 = 4K_2)$$

$$\frac{T_1}{T_2} = \sqrt{\frac{2m_2 \cdot K_2}{m_2 \cdot 4 \cdot K_2}} \Rightarrow \frac{T_1}{T_2} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

Άρα

$$\frac{T_1}{T_2}=\frac{\sqrt{2}}{2}\Rightarrow\frac{\frac{1}{f_1}}{\frac{1}{f_2}}=\frac{\sqrt{2}}{2}\Rightarrow\frac{f_2}{f_1}=\frac{\sqrt{2}}{2}\Rightarrow\frac{f_1}{f_2}=\sqrt{2}$$

Άρα $f_1=\sqrt{2}\cdot f_2$ και σωστή απάντηση είναι η α.

Β4. Ένα σώμα εκτελεί Α.Α.Τ. Τη χρονική στιγμή t η απομάκρυνση του σώματος από τη θέση ισορροπίας είναι Χ=- ½ Α όπου Α το πλάτος της ταλάντωσης. Ο λόγος της κινητικής προς τη δυναμική ενέργεια ταλάντωσης τη χρονική στιγμή t είναι:

α) ½ , β) ¼ , γ) 3

Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

Λύση

Για να υπολογίσουμε το λόγο εργαζόμαστε ως εξής:

$\frac{K}{U}=\frac{E-U}{U}$ (επειδή $E=K+U\Rightarrow K=E-U$) $\Rightarrow$

$$\frac{K}{U}=\frac{\frac{1}{2}DA^2-\frac{1}{2}Dx^2}{\frac{1}{2}Dx^2}\Rightarrow$$

$$\frac{K}{U}=\frac{\frac{1}{2}D(A^2-x^2)}{\frac{1}{2}Dx^2}\Rightarrow$$

$$\frac{K}{U}=\frac{A^2-x^2}{x^2}(x=-\frac{A}{2})\Rightarrow$$

$$\frac{K}{U}=\frac{A^2-\frac{A^2}{4}}{\frac{A^2}{4}}\Rightarrow$$

$$\frac{K}{U}=\frac{\frac{3A^2}{4}}{\frac{A^2}{4}}\Rightarrow\quad.\quad\frac{K}{U}=3$$

Άρα σωστή απάντηση είναι η γ.

ΚΥΜΑΤΑ

B1. Σε μια χορδή μήκους L δημιουργείται στάσιμο κύμα, με δεσμούς στα δύο άκρα της και άλλους δύο ενδιάμεσα. Αν f είναι η συχνότητα ταλάντωσης της χορδής, τότε η ταχύτητα διάδοσης του κύματος στη χορδή είναι

α) $v = \frac{2Lf}{3}$, β) $v = \frac{Lf}{3}$,γ) $v = \frac{3Lf}{2}$

Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

Λύση

Σωστή πρόταση είναι η (α).

Στα δύο άκρα της χορδής δημιουργούνται δεσμοί, έτσι το μήκος της χορδής και το μήκος κύματος συνδέονται με τη σχέση: $L = 3\frac{\lambda}{2} \Rightarrow \lambda = \frac{2L}{3}$

Με αντικατάσταση στη θεμελιώδη εξίσωση της κυματικής παίρνουμε:

$$v = \lambda f = \frac{2L}{3} f \Rightarrow v = \frac{2L}{3} f$$

B2. Στην επιφάνεια υγρού διαδίδονται δύο αρμονικά εγκάρσια κύματα ίδιου πλάτους Α και ίδιας συχνότητας, που παράγονται από δύο σύγχρονες πηγές $Π_1$, $Π_2$ με εξισώσεις ταλάντωσης $y_1 = y_2 = A\eta\mu\omega t$. Σε ένα σημείο Μ της επιφάνειας του υγρού πρώτα φτάνει το κύμα από την πηγή $Π_1$ και μετά από χρονικό διάστημα 3Τ/4 φτάνει το κύμα από την πηγή $Π_2$. Λόγω της συμβολής των δύο κυμάτων το σημείο Μ ταλαντώνεται με πλάτος

α) $A\sqrt{2}$,β) $\frac{A\sqrt{2}}{2}$,γ) $2A$

Δίνεται: $\sigma\upsilon\nu\frac{3\pi}{4} = -\frac{\sqrt{2}}{2}$

Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

Λύση

Σωστή απάντηση είναι η (α).

Το πλάτος ταλάντωσης δίνεται από τη σχέση: $|A'| = \left|2A\sigma\upsilon\nu 2\pi \frac{r_2 - r_1}{2\lambda}\right|$ **(1)**

Για τις αποστάσεις του σημείου Μ από τις πηγές ισχύει:

$r_1 = \upsilon t_1$ και $r_2 = ut_2$

$$r_2 - r_1 = \upsilon(t_1 + \frac{3T}{4}) - \upsilon t_1 \Rightarrow r_2 - r_1 = \upsilon\frac{3T}{4} \Rightarrow r_2 - r_1 = \frac{3\lambda}{4}$$

Με αντικατάσταση στη σχέση **(1)** παίρνουμε:

$$|A'| = \left|2A\sigma\upsilon\nu 2\pi \frac{\frac{3\lambda}{4}}{2\lambda}\right| = \left|2A\sigma\upsilon\nu\frac{3\pi}{4}\right| = A\sqrt{2}$$

DOPPLER

Β1. Μεταξύ δύο ακίνητων παρατηρητών B και A κινείται πηγή S με σταθερή ταχύτητα υ_s πλησιάζοντας προς τον A. Τα μήκη κύματος που φτάνουν στους παρατηρητές A και B είναι λ_A και λ_B αντίστοιχα. Όταν η πηγή είναι ακίνητη εκπέμπει ήχο μήκους κύματος λ. Το μήκος κύματος λ και τα μήκη κύματος λ_A και λ_B συνδέονται με τη σχέση

α) $\lambda = \frac{(\lambda_A + \lambda_B)}{2}$.,β) $\lambda = \frac{(\lambda_A - \lambda_B)}{2}$.γ) $\lambda = \frac{\lambda_A \lambda_B}{(\lambda_A + \lambda_B)}$.

Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

Λύση

Σωστή απάντηση είναι η α.

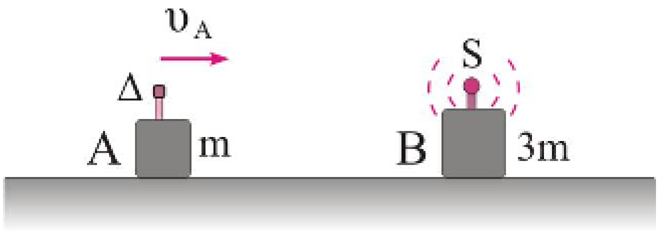
Ο παρατηρητής Α, που τον πλησιάζει η πηγή, «αντιλαμβάνεται» ως μήκος κύματος την απόσταση $\lambda_A = \lambda - \upsilon_s T_s$, όπου T_s η περίοδος του ηχητικού κύματος.

Ο παρατηρητής Β, που απομακρύνεται από αυτόν η πηγή, «αντιλαμβάνεται» ως μήκος κύματος την απόσταση $\lambda_B = \lambda + \upsilon_s T_s$.

Με πρόσθεση κατά μέλη των δύο σχέσεων προκύπτει

$$\lambda_A + \lambda_B = 2\lambda \Rightarrow \lambda = \frac{(\lambda_A + \lambda_B)}{2}$$

Β2. Το σώμα Α μάζας m κινείται προς το ακίνητο σώμα Β μάζας $3m$ με ταχύτητα μέτρου $\upsilon_A = \upsilon_{\eta\chi}/5$ και συγκρούεται κεντρικά ελαστικά με αυτό. Το σώμα Β περιέχει ηχητική πηγή S που εκπέμπει κύματα σταθερής συχνότητας f_S, ενώ το Α περιέχει δέκτη Δ που καταγράφει το μήκος κύματος του ανιχνευόμενου ήχου.



Αν με λ_1 συμβολίσουμε το μήκος κύματος που ανιχνεύει ο δέκτης πριν την κρούση και λ_2 αυτό που ανιχνεύει μετά την κρούση, ο λόγος $\frac{\lambda_1}{\lambda_2}$ είναι

α. $\frac{9}{10}$

β. $\frac{10}{11}$

γ. $\frac{5}{6}$

Να δικαιολογήσετε την απάντησή σας.

<u>Λύση</u>

Σωστή απάντηση είναι η (β).

Η κρούση είναι κεντρική και ελαστική, επομένως οι ταχύτητες μετά την κρούση είναι

$$\upsilon_A' = \frac{m_A - m_B}{m_A + m_B}\upsilon_A = -\frac{\upsilon_A}{2},\ \upsilon_B' = \frac{2m_A}{m_A + m_B}\upsilon_A = \frac{\upsilon_A}{2}$$

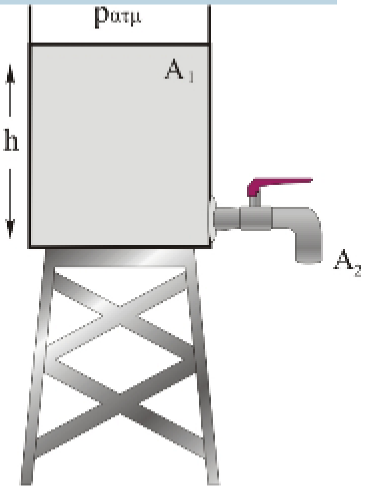
Το μήκος κύματος που καταγράφει ο δέκτης πριν την κρούση είναι ίδιο με αυτό της πηγής, $\lambda_1 = \lambda_S$.

Μετά την κρούση η πηγή απομακρύνεται από το δέκτη με ταχύτητα μέτρου $\frac{\upsilon_A}{2} = \frac{\upsilon_{\eta\chi}}{10}$, άρα ο δέκτης ανιχνεύει μήκος κύματος

$$\lambda_2 = \lambda_S + \upsilon_S \cdot T = \lambda_S + \frac{\upsilon_{\eta\chi}}{10} \cdot \frac{\lambda_S}{\upsilon_{\eta\chi}} = \frac{11}{10}\lambda_S$$

Άρα $\frac{\lambda_1}{\lambda_2} = \frac{10}{11}$

ΡΕΥΣΤΑ



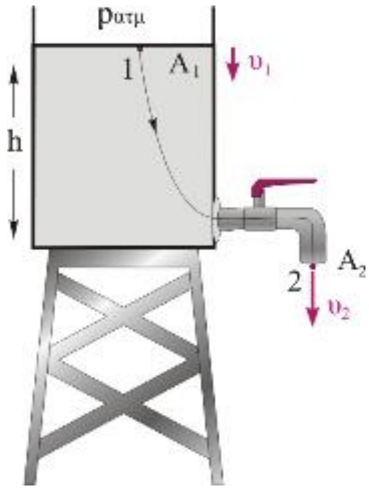
B1. Το δοχείο του σχήματος με εμβαδόν βάσης A_1 περιέχει νερό ύψους h. Στο πλευρικό τοίχωμα και κοντά στον πυθμένα υπάρχει βρύση με οπή εμβαδού διατομής A_2. Η σχέση ανάμεσα στα εμβαδά των διατομών είναι $A_1=5A_2$ και επιτάχυνση της βαρύτητας στην περιοχή είναι g. Τη χρονική στιγμή t=0 που ανοίγουμε τη βρύση, το νερό εξέρχεται από αυτήν με ταχύτητα υ_2 της οποίας το μέτρο είναι

α. $\upsilon_2 = \sqrt{2gh}$,β. $\upsilon_2 = \sqrt{\frac{25}{12}gh}$.

γ. $\upsilon_2 = \sqrt{2,4gh}$.

Να επιλέξετε τη σωστή απάντηση και να δικαιολογήσετε την επιλογή σας.

<u>Λύση</u>



Σωστή απάντηση είναι η (β).

Όταν ανοίξουμε τη βρύση, το νερό εκροής θα έχει ταχύτητα υ_2 και η ελεύθερη επιφάνεια του υγρού θα κατέρχεται με ταχύτητα μέτρου υ_1.

Από την εξίσωση της συνέχειας μεταξύ της ελεύθερης επιφάνειας και του σωλήνα εκροής έχουμε:

$$A_1\upsilon_1 = A_2\upsilon_2 \Rightarrow 5A_2\upsilon_1 = A_2\upsilon_2 \Rightarrow \upsilon_1 = \frac{\upsilon_2}{5} \quad , \textbf{(1)}$$

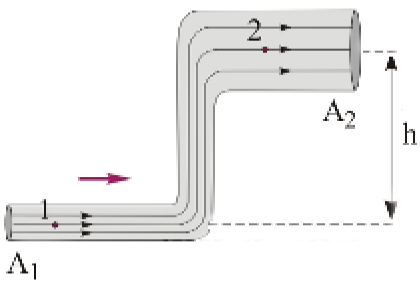
Εφαρμόζουμε την εξίσωση του Bernoulli για τα σημεία 1 και 2 της ίδιας ρευματικής γραμμής.

$$p_{\alpha\tau\mu} + \rho g h + \frac{1}{2}\rho \upsilon_1^2 = p_{\alpha\tau\mu} + \frac{1}{2}\rho \upsilon_2^2 \Rightarrow \upsilon_1^2 + 2gh = \upsilon_2^2$$ **, (2)**

Συνδυάζοντας τις **(1)**, **(2)** παίρνουμε

$$\frac{\upsilon_2^2}{25} + 2gh = \upsilon_2^2 \Rightarrow \upsilon_2 = \sqrt{\frac{25}{12}gh}$$

Β2. Ο σωλήνας του σχήματος αποτελείται από δύο οριζόντια τμήματα και ένα κατακόρυφο. Το κάτω οριζόντιο τμήμα έχει εμβαδόν κάθετης διατομής A_1 και το πάνω τμήμα $A_2=2A_1$. Τα δύο οριζόντια τμήματα απέχουν μεταξύ τους κατακόρυφα κατά h. Ένα ιδανικό υγρό ρέει από τα αριστερά προς τα δεξιά. Η ταχύτητα του υγρού στο κάτω τμήμα είναι υ_1, ενώ οι πιέσεις στο κάτω και πάνω τμήμα είναι ίδιες. Η υψομετρική διαφορά h ανάμεσα στα δύο οριζόντια τμήματα του σωλήνα και η ταχύτητα υ_1συνδέονται με τη σχέση



α. $h = \frac{3\upsilon_1^2}{8g}$,β. $h = \frac{\upsilon_1^2}{2g}$,γ. $h = \frac{3\upsilon_1^2}{2g}$.

Να επιλέξετε τη σωστή απάντηση και να δικαιολογήσετε την επιλογή σας.

<u>Λύση</u>

Σωστή απάντηση είναι η (α).

Εφαρμόζοντας το νόμο του Bernoulli για τα σημεία 1 και 2 που ανήκουν στην ίδια ρευματική γραμμή έχουμε

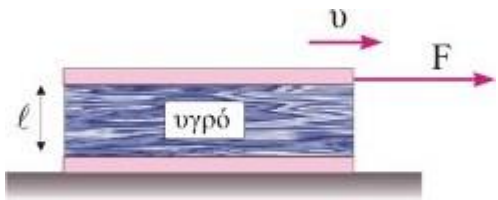
$$p_1 + \frac{1}{2}\rho\upsilon_1^2 = p_2 + \frac{1}{2}\rho\upsilon_2^2 + \rho g h \xrightarrow{p_1=p_2} \frac{1}{2}\rho\upsilon_1^2 = \frac{1}{2}\rho\upsilon_2^2 + \rho g h \Rightarrow h = \frac{\upsilon_1^2 - \upsilon_2^2}{2g}$$ **(1)**

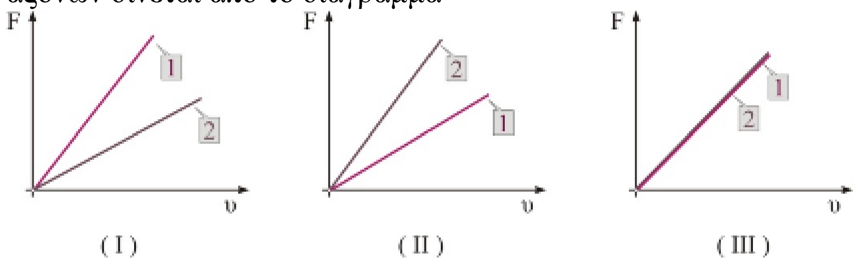
$$A_1\upsilon_1 = A_2\upsilon_2 \Rightarrow A_1\upsilon_1 = 2A_1\upsilon_2 \Rightarrow \upsilon_2 = \frac{\upsilon_1}{2}$$ **, (2)**

Από την εξίσωση της συνέχειας μεταξύ των σημείων (1) και (2) του σωλήνα έχουμε:

Συνδυάζοντας τις **(1)**, **(2)** παίρνουμε $h = \frac{3\upsilon_1^2}{8g}$

Β3. Σε ένα πείραμα μέτρησης του ιξώδους, χρησιμοποιούμε δύο οριζόντιες γυάλινες πλάκες εμβαδού A όπου ανάμεσά τους είναι τοποθετημένο ένα νευτώνειο υγρό (1) πάχους ℓ με συντελεστή ιξώδους n_1. Η κάτω πλάκα είναι ακλόνητη ενώ στην επάνω πλάκα ασκούμε οριζόντια δύναμη F με αποτέλεσμα μετά από λίγο αυτή να κινείται με σταθερή ταχύτητα υ. Επαναλαμβάνουμε το πείραμα αντικαθιστώντας το υγρό (1) με ένα υγρό (2) ίδιου πάχους με συντελεστή ιξώδους $n_2=2n_1$. Η εξάρτηση της δύναμης σε συνάρτηση με την ταχύτητα υ της πάνω πλάκας σε κοινό σύστημα αξόνων δίνεται από το διάγραμμα





α. (I).

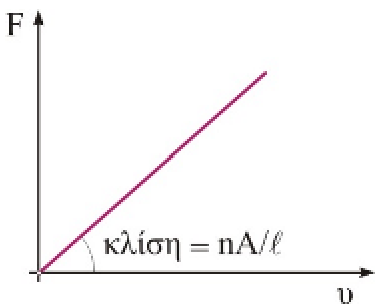
β. (II).

γ. (III).

Να επιλέξετε τη σωστή απάντηση και να δικαιολογήσετε την επιλογή σας.

<u>Λύση</u>

Σωστή απάντηση είναι η (β).



Όταν η πάνω πλάκα κινείται με σταθερή ταχύτητα, το ιξώδες (δυνάμεις εσωτερικής τριβής) και η δύναμη F έχουν το ίδιο μέτρο που υπολογίζεται από τη σχέση

$$T = F = \frac{nAv}{\ell}$$

Το μέτρο της δύναμης, F, είναι ανάλογο της ταχύτητας της πάνω πλάκας, υ, (όταν η κάτω είναι ακίνητη), άρα το πηλίκο

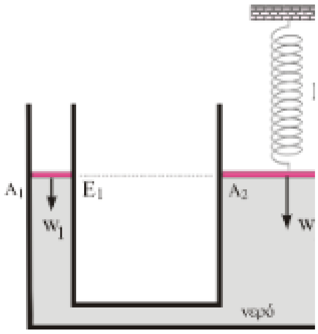
$$\frac{F}{v} = \frac{nA}{\ell}$$

είναι σταθερό και παριστάνει την κλίση της ευθείας στο διάγραμμα F=f(υ).

Επειδή $n_2 > n_1 \Rightarrow \frac{n_2 A}{\ell} > \frac{n_1 A}{\ell}$

Το σωστό διάγραμμα είναι το (ΙΙ).

Β4.Στον υδραυλικό ανυψωτήρα του διπλανού σχήματος, τα έμβολα $Ε_1$ και $Ε_2$ έχουν εμβαδό A_1=10cm^2, A_2=100cm^2 και βάρη w_1 =10N, w_2 =130N, αντίστοιχα. Το έμβολο $Ε_2$ συνδέεται με το κάτω άκρο κατακόρυφου ελατηρίου σταθεράς k, το άλλο άκρο του οποίου είναι ακλόνητα στερεωμένο. Τα δύο έμβολα βρίσκονται αρχικά σε ισορροπία στο ίδιο ύψος, με το ελατήριο να είναι επιμηκυμένο από το φυσικό του μήκος κατά d = 30cm.



Η σταθερά του ελατηρίου k έχει τιμή:

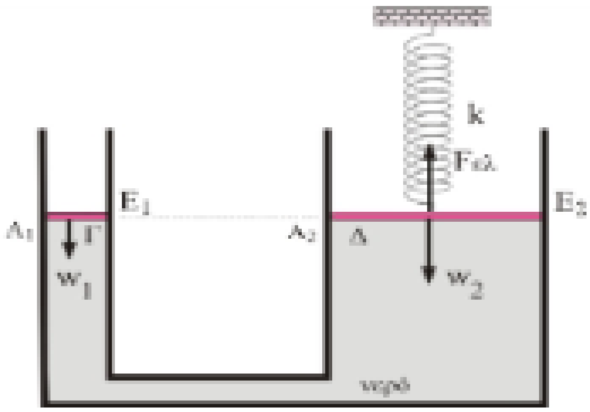
α. 30 N/m, β) 100 N/m, γ) 150 N/m

Να επιλέξετε τη σωστή απάντηση και να δικαιολογήσετε την επιλογή σας

Λύση

Σωστή η (β)

Δύο σημεία Γ και Δ, ακριβώς κάτω από τα δύο έμβολα, βρίσκονται στο ίδιο οριζόντιο επίπεδο υγρού που ισορροπεί, άρα έχουν ίδιες πιέσεις



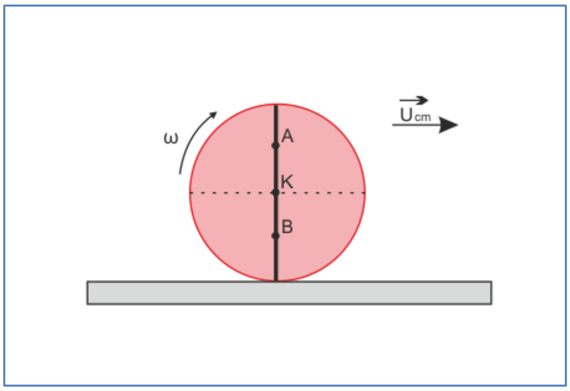
$$p_Γ = p_Δ \Rightarrow p_{ατμ} + \frac{w_1}{A_1} = p_{ατμ} + \frac{w_2 - F_{ελ}}{A_2} \Rightarrow$$

$$\frac{10N}{10 \cdot 10^{-4} m^2} = \frac{130N - F_{ελ}}{100 \cdot 10^{-4} m^2} \Rightarrow F_{ελ} = 30N$$

Άρα η σταθερά του ελατηρίου k είναι:

$$F_{\varepsilon\lambda} = 30N \Rightarrow k \cdot d = 30N \Rightarrow k \cdot 0,3m = 30N$$

ΜΗΧΑΝΙΚΗ



Β0. Ο δίσκος του σχήματος εκτελεί κύλιση χωρίς ολίσθηση σε οριζόντιο δρόμο. Τα σημεία Α και Β ανήκουν στην κατακόρυφη διάμετρο και απέχουν από το κέντρο του δίσκου αποστάσεις $AK = KB = \dfrac{R}{2}$.

Ο λόγος των ταχυτήτων $\dfrac{\upsilon_A}{\upsilon_B}$ είναι:

α) $\dfrac{\upsilon_A}{\upsilon_B}$ =1, β) $\dfrac{\upsilon_A}{\upsilon_B}$ =2, γ) $\dfrac{\upsilon_A}{\upsilon_B}$ =3.

Ποιο από τα παραπάνω είναι το σωστό; Να δικαιολογήσετε την απάντησή σας.

<u>Λύση</u>

Σωστή είναι η απάντηση γ.

Στα παρακάτω σχήματα φαίνονται οι ταχύτητες των σημείων Α και Β στην περιστροφική και στην μεταφορική κίνηση.

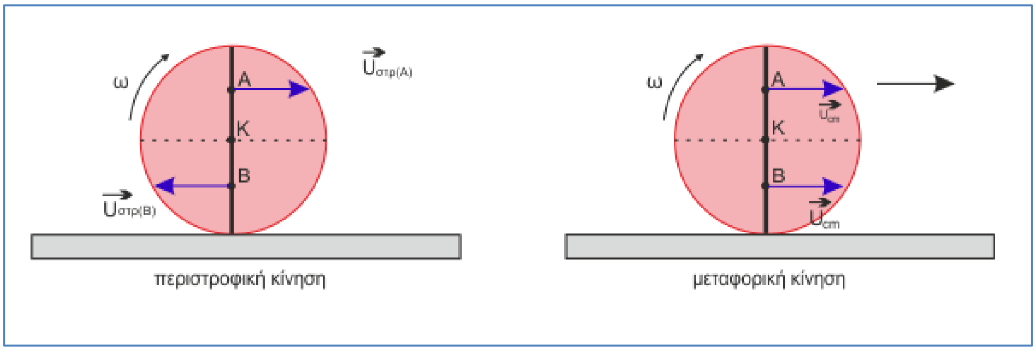
Επειδή ο δίσκος κάνει κύλιση χωρίς ολίσθηση ισχύει η σχέση $\upsilon_{cm} = \omega \cdot R$

Από την αρχή επαλληλίας για την ταχύτητα του Α έχουμε:

$$\upsilon_A = \upsilon_{cm} + \upsilon_{\sigma\tau\rho} \Rightarrow \upsilon_A = \upsilon_{cm} + \omega \cdot \frac{R}{2} \Rightarrow \upsilon_A = \upsilon_{cm} + \frac{\upsilon_{cm}}{2} \Rightarrow \upsilon_A = \frac{3}{2}\upsilon_{cm}$$

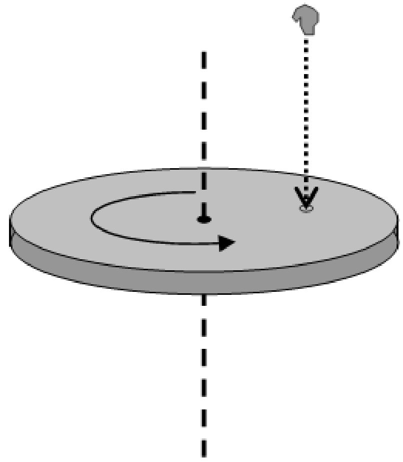
Ομοίως για την ταχύτητα του Β έχουμε:

$$\upsilon_B = \upsilon_{cm} - \upsilon_{\sigma\tau\rho} \Rightarrow \upsilon_B = \upsilon_{cm} - \omega \cdot \frac{R}{2} \Rightarrow \upsilon_B = \upsilon_{cm} - \frac{\upsilon_{cm}}{2} \Rightarrow \upsilon_B = \frac{1}{2}\upsilon_{cm}$$



Διαιρώντας κατά μέλη παίρνουμε ότι $\dfrac{\upsilon_A}{\upsilon_B} = 3$

Β1. Ο δίσκος του σχήματος περιστρέφεται χωρίς τριβές γύρω από κατακόρυφο ακλόνητο άξονα που περνά από το κέντρο του. Από μικρό ύψος αφήνουμε ένα κομμάτι πλαστελίνης να πέσει και να κολλήσει πάνω στο δίσκο. Το συσσωμάτωμα δίσκου - πλαστελίνης που προκύπτει περιστρέφεται σε σχέση με το δίσκο



α) πιο αργά.

β) με την ίδια γωνιακή ταχύτητα.

γ) πιο γρήγορα.

Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

<u>Λύση</u>

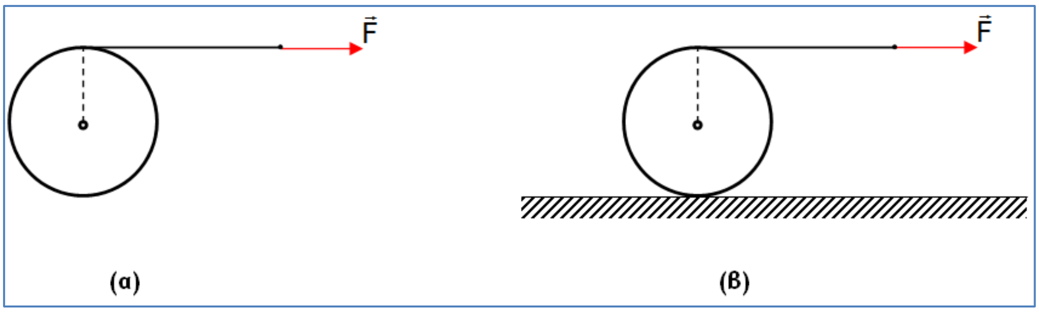
Σωστή απάντηση είναι η α.

Η συνολική εξωτερική ροπή στο σύστημα δίσκος - πλαστελίνη είναι μηδέν, επομένως η στροφορμή του συστήματος παραμένει σταθερή:

$$L_{\alpha\rho\chi} = L_{\tau\epsilon\lambda} \Rightarrow I_{\alpha\rho\chi} \cdot \omega_{\alpha\rho\chi} = I_{\tau\epsilon\lambda} \cdot \omega_{\tau\epsilon\lambda} \Rightarrow \omega_{\tau\epsilon\lambda} = \frac{I_{\alpha\rho\chi} \cdot \omega_{\alpha\rho\chi}}{I_{\tau\epsilon\lambda}}$$

Επειδή η επικόλληση της πλαστελίνης αυξάνει τη ροπή αδράνειας, θα ισχύει $I_{\tau\epsilon\lambda} > I_{\alpha\rho\chi}$, επομένως $\omega_{\tau\epsilon\lambda} < \omega_{\alpha\rho\chi}$.

Β2. Ο άξονας του αρχικά ακίνητου ομογενή τροχού του σχήματος (α) είναι ακλόνητος. Γύρω από τον τροχό έχει τυλιχθεί πολλές φορές αβαρές νήμα, το οποίο δεν ολισθαίνει πάνω στον τροχό. Στην ελεύθερη άκρη του νήματος ασκείται



σταθερή δύναμη $\vec{F}$, η οποία προσφέρει στον τροχό έργο W και μετά καταργείται. Στο σχήμα (β) ένας ίδιος αρχικά ακίνητος τροχός κυλίεται υπό την επίδραση της ίδιας σταθερής δύναμης $\vec{F}$, η οποία προσφέρει στον τροχό το ίδιο έργο W όπως και στη περίπτωση (α) και μετά καταργείται. Η γωνιακή ταχύτητα, μόλις καταργηθεί η δύναμη $\vec{F}$, είναι:

α) μεγαλύτερη στον τροχό α.

β) μεγαλύτερη στον τροχό β.

γ) ίση στους δύο τροχούς.

Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

Λύση

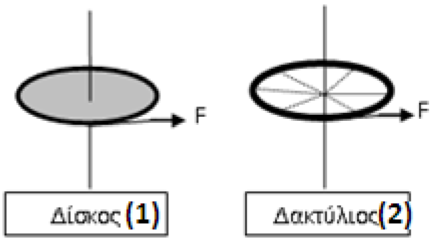
Σωστή απάντηση είναι η α.

Η κινητική ενέργεια του τροχού (α) δίνεται από τον τύπο: $K_\alpha = \frac{1}{2}\omega_\alpha{}^2$.

Η κινητική ενέργεια του τροχού (β) δίνεται από τον τύπο: $K_\beta = \frac{1}{2}\omega_\beta{}^2 + \frac{1}{2}M{v_{cm}}^2$.

Σύμφωνα με την εκφώνηση, το έργο W και στις δύο περιπτώσεις είναι το ίδιο. Στη β΄ περίπτωση το έργο μοιράζεται σε στροφική και μεταφορική κινητική ενέργεια, ενώ στην α΄ περίπτωση γίνεται όλο στροφική, επομένως ισχύει: $\frac{1}{2}I\omega_\alpha{}^2 > \frac{1}{2}I\omega_\beta{}^2 \Rightarrow \omega_\alpha > \omega_\beta$.

Β3. Ο δίσκος και ο δακτύλιος του σχήματος είναι αρχικά ακίνητοι και έχουν ίσες μάζες και ίσες ακτίνες. Με τη βοήθεια νημάτων που είναι τυλιγμένα στις περιφέρειές τους ασκούμε εφαπτομενικά την ίδια δύναμη F μέχρι να ξετυλιχτεί νήμα ίδιου μήκους d και στα δύο σώματα. Το πηλίκο των κινητικών ενεργειών $\frac{K_1}{K_2}$ που θα αποκτήσουν ο δίσκος και ο δακτύλιος αντίστοιχα είναι



α. 1, β. $\frac{1}{2}$, γ. 2

Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

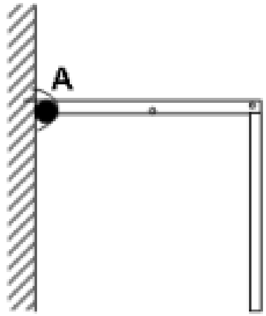
Λύση

Σωστή πρόταση είναι η (α).

Επειδή ξετυλίχτηκε νήμα ίδιου μήκους, το έργο της δύναμης είναι ίδιο και στα δύο σώματα $W_F = F \cdot d$.

Με βάση το Θ.Μ.Κ.Ε. έχουμε:

$K_{τελ} - K_{αρχ} = W_F \Rightarrow K_{τελ} = F \cdot d$, άρα και τα δύο σώματα αποκτούν ίσες κινητικές στροφικές ενέργειες.



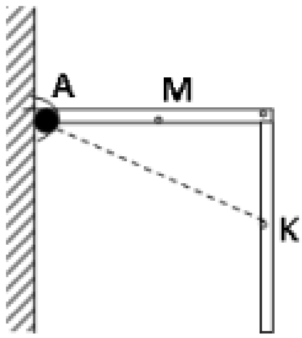
B4. Δύο ίδιες ομογενείς ράβδοι μήκους ℓ και μάζας m, είναι ενωμένες κάθετα, όπως φαίνεται στο σχήμα και το σύστημά τους μπορεί να περιστρέφεται γύρω από την άρθρωση Α σε κατακόρυφο επίπεδο. Αν η ροπή αδράνειας ράβδου μήκους ℓ και μάζας m ως προς άξονα κάθετο στο κέντρο της είναι $I_{cm} = \frac{1}{12}m\ell^2$, τότε η ροπή αδράνειας του συστήματος των ράβδων ως προς το Α είναι

α. $I_A = \frac{5}{3}m\ell^2$,β. $I_A = \frac{4}{3}m\ell^2$,γ. $I_A = \frac{17}{12}m\ell^2$

Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

<u>Λύση</u>

Σωστή απάντηση είναι η (α).



Για να βρούμε τη ροπή αδράνειας ενός συστήματος σωμάτων προσθέτουμε τη ροπή αδράνειας του κάθε επιμέρους σώματος. Στη συγκεκριμένη περίπτωση θα προσθέσουμε τις ροπές αδράνειας των δύο ράβδων ως προς το σημείο Α.

Η πρώτη ράβδος, η οριζόντια, σύμφωνα με το θεώρημα Steiner θα έχει

$$I_{1,A} = I_{cm} + m(MA)^2 = I_{cm} + m\left(\frac{\ell}{2}\right)^2 = \frac{1}{12}m\ell^2 + m\left(\frac{\ell}{2}\right)^2 = \frac{1}{12}m\ell^2 + m\frac{\ell^2}{4} = \frac{1}{3}m\ell^2.$$

Η δεύτερη ράβδος, η κατακόρυφη, σύμφωνα με το θεώρημα Steiner θα έχει

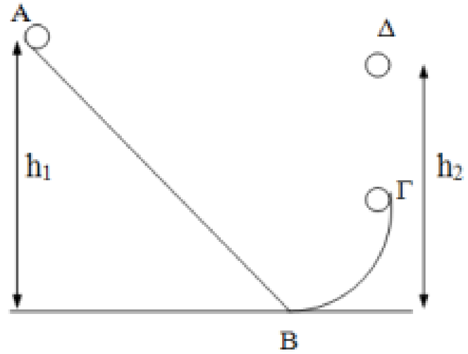
$$I_{2,A} = I_{cm} + m(KA)^2 = \frac{1}{12}m\ell^2 + m\left[\left(\frac{\ell}{2}\right)^2 + \ell^2\right] = \frac{1}{12}m\ell^2 + m\frac{5\ell^2}{4} =$$

$$\frac{16}{12}m\ell^2 = \frac{4}{3}m\ell^2$$.

Άρα η συνολική ροπή αδράνειας του συστήματος θα είναι

$$I_A = I_{1,A} + I_{2,A} = \frac{1}{3}m\ell^2 + \frac{4}{3}m\ell^2 = \frac{5}{3}m\ell^2$$.

B5. Ένα μικρό δαχτυλίδι με τη μάζα του όλη συγκεντρωμένη στην περιφέρειά του, αφήνεται ελεύθερο να κινηθεί στο σημείο Α του κεκλιμένου επίπεδου του διπλανού σχήματος, κάνοντας κύλιση, χωρίς να ολισθαίνει και μόλις φτάσει στο σημείο Β εισέρχεται, χωρίς απώλεια ενέργειας, σε οδηγό σχήματος τεταρτημορίου, όπως στο σχήμα, συνεχίζοντας να κάνει κύλιση. Όταν φτάσει στο σημείο Γ, συνεχίζει την κίνησή του μέχρι το σημείο Δ, όπου σταματάει την άνοδό του. Εφαρμόζοντας τη διατήρηση της μηχανικής ενέργειας μεταξύ των θέσεων Α και Δ προκύπτει ότι το τελικό ύψος h_2, που φτάνει στιγμιαία το δαχτυλίδι και το αρχικό ύψος h_1, που το αφήσαμε συνδέονται με τη σχέση



α. $h_2 = h_1$, β. $h_2 < h_1$, γ. $h_2 > h_1$.

Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

<u>Λύση</u>

Σωστή απάντηση είναι η (β).

Η κίνηση του δαχτυλιδιού από το σημείο Α μέχρι το Γ είναι κύλιση, χωρίς ολίσθηση και χωρίς απώλειες ενέργειας. Από το Γ μέχρι το Δ η κίνηση είναι επιβραδυνόμενη μεταφορική και ομαλή στροφική, καθώς η μόνη δύναμη που ασκείται είναι το βάρος, που δεν προκαλεί ροπή, αφού ασκείται στο κέντρο μάζας του δακτυλιδιού. Στο σημείο Δ που σταματάει η άνοδος του σώματος, αυτό συνεχίζει να περιστρέφεται.

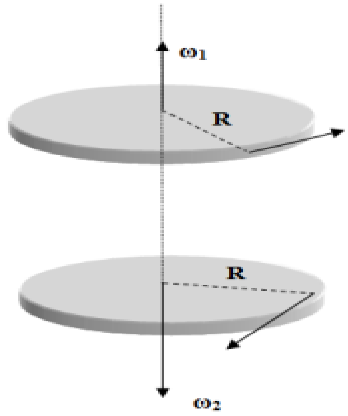
Η μηχανική ενέργεια του δαχτυλιδιού παραμένει σταθερή καθόλη τη διάρκεια της κίνησης.

Έτσι αν χρησιμοποιήσουμε την αρχή διατήρησης της μηχανικής ενέργειας από τη θέση Α στη θέση Δ έχουμε

$E_A = E_\Delta \Rightarrow mgh_1 = mgh_2 + K_\pi$. (Θεωρήσαμε στάθμη μηδενικής δυναμικής ενέργειας αυτήν του δαπέδου).

Άρα $mgh_1 > mgh_2 \;\Rightarrow h_1 > h_2$.

Β6. Δύο όμοιοι οριζόντιοι δίσκοι, ροπής αδράνειας Ι, περιστρέφονται αντίρροπα γύρω από κοινό κατακόρυφο άξονα όπως φαίνεται στο παρακάτω σχήμα. Οι γωνιακές τους ταχύτητες έχουν σχέση $\omega_1 = 2\omega_2$. Κάποια στιγμή οι δύο δίσκοι έρχονται σε επαφή και συνεχίζουν να περιστρέφονται σαν ένας δίσκος με γωνιακή ταχύτητα $\omega = \omega_2/2$. Η απώλεια ενέργειας του συστήματος Q είναι



α. $Q = \frac{3}{5}\, I \cdot {\omega_2}^2$, β. $Q = \frac{9}{4}\, I \cdot {\omega_2}^2$, γ. $Q = \frac{3}{4}\, I \cdot {\omega_2}^2$

Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

<u>Λύση</u>

Σωστή απάντηση είναι η (β).

Η απώλεια ενέργειας του συστήματος Q είναι η διαφορά της αρχικής κινητικής ενέργειας του συστήματος των δύο δίσκων μείον την τελική. Η αρχική είναι:

$$K_{\alpha\rho\chi} = K_1 + K_2 = \frac{1}{2}\, I \cdot {\omega_1}^2 + \frac{1}{2}\, I \cdot {\omega_2}^2 = \frac{1}{2}\, I \cdot (2\omega_2)^2 + \frac{1}{2}\, I \cdot {\omega_2}^2 = \frac{5}{2}\, I \cdot {\omega_2}^2$$

Η τελική κινητική ενέργεια είναι:

$$K_{\tau\varepsilon\lambda} = \frac{1}{2}\, I_{o\lambda} \cdot \omega^2 = \frac{1}{2}\, (2I) \cdot \left(\frac{\omega_2}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}\, I \cdot {\omega_2}^2 .$$

Άρα

$$\mathrm{Q} = K_{\alpha\rho\chi} - K_{\tau\varepsilon\lambda} = \frac{5}{2}\, I \cdot {\omega_2}^2 - \frac{1}{4}\, I \cdot {\omega_2}^2 = \frac{9}{4}\, I \cdot {\omega_2}^2 \Rightarrow Q = \frac{9}{4}\, I \cdot {\omega_2}^2$$