# ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΥ ΘΕΤΙΚΩΝ ΣΠΟΥΔΩΝ - ΟΙΚΟΝΟΜΙΑΣ & ΠΛΗΡΟΦΟΡΙΚΗΣ

# Γ ΛΥΚΕΙΟΥ

# ΘΕΩΡΙΑ & ΑΠΟΔΕΙΞΕΙΣ

**Επιμέλεια: Ζ. Κουνή**

https://blogs.sch.gr/zkouni/

# ΑΝΑΛΥΣΗ

## 1. Τι ονομάζουμε πραγματική συνάρτηση

Έστω *A* ένα υποσύνολο του $\mathbb{R}$. Ονομάζουμε **πραγματική συνάρτηση** με **πεδίο ορισμού το *A*** μια διαδικασία (κανόνα) *f* , με την οποία κάθε στοιχείο $x \in A$ αντιστοιχίζεται σε ένα μόνο πραγματικό αριθμό *y*. Το *y* ονομάζεται **τιμή της *f* στο *x*** και συμβολίζεται με $\boldsymbol{f(x)}$.

## 2. Τι ονομάζουμε σύνολο τιμών μιας πραγματικής συνάρτησης *f* με πεδίο ορισμού το Α;

Το σύνολο που έχει για στοιχεία του τις τιμές της *f* σε όλα τα $x \in \mathrm{A}$, λέγεται σύνολο τιμών της *f* και συμβολίζεται *f*(Α). Είναι δηλαδή :

$$f(\mathrm{A}) = \{ y \,/\, y = f(x) \text{ για κάποιο } x \in \mathrm{A} \}$$

## 3. Τι ονομάζουμε γραφική παράσταση ή καμπύλη της f:Α $\to \mathbb{R}$ ; Πως τη συμβολίζουμε;

Έστω Oxy ένα σύστημα συντεταγμένων στο επίπεδο. Το σύνολο των σημείων Μ(x,y) για τα οποία ισχύει y=*f*(x), δηλαδή το σύνολο των σημείων Μ(x, *f*(x)), $x \in \mathrm{A}$ λέγεται γραφική παράσταση της *f* και συμβολίζεται συνήθως με $C_f$

## 4. Πότε δύο συναρτήσεις f και g είναι ίσες.

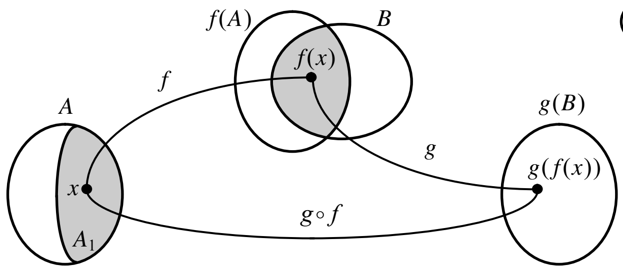
Δύο συναρτήσεις *f* και *g* λέγονται **ίσες** όταν:

- έχουν το ίδιο πεδίο ορισμού *A* και
- για κάθε $x \in A$ ισχύει $f(x) = g(x)$.

## 5. Τι ονομάζουμε σύνθεση της f με την g.

*Αν f*, *g* είναι δύο συναρτήσεις με πεδίο ορισμού *A*, *B* αντιστοίχως, τότε ονομάζουμε **σύνθεση της *f* με την *g***, και τη συμβολίζουμε με $\boldsymbol{gof}$ , τη συνάρτηση με τύπο

$$(gof)(x) = g(f(x))$$




24

Το πεδίο ορισμού της $gof$ αποτελείται από όλα τα στοιχεία *x* του πεδίου ορισμού της *f* για τα οποία το $f(x)$ ανήκει στο πεδίο ορισμού της *g*. Δηλαδή είναι το σύνολο

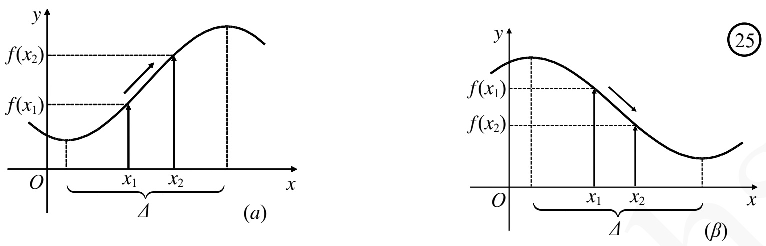
$$A_1 = \{ x \in A \mid f(x) \in B \}.$$

Είναι φανερό ότι η $gof$ ορίζεται αν $A_1 \neq \varnothing$, δηλαδή αν $f(A) \cap B \neq \varnothing$.

### 6. Πότε μια συνάρτηση λέγεται “γνησίως αύξουσα συνάρτηση” και πότε “γνησίως φθίνουσα συνάρτηση” .

Μια συνάρτηση $f$ λέγεται[1] :

- **γνησίως αύξουσα** σ’ ένα *δ ι ά σ τ η μ α* $\Delta$ του πεδίου ορισμού της, όταν για οποιαδήποτε $x_1, x_2 \in \Delta$ με $x_1 < x_2$ ισχύει: $f(x_1) < f(x_2)$ (Σχ. α)
- **γνησίως φθίνουσα** σ’ ένα *δ ι ά σ τ η μ α* $\Delta$ του πεδίου ορισμού της, όταν για οποιαδήποτε $x_1, x_2 \in \Delta$ με $x_1 < x_2$ ισχύει: $f(x_1) > f(x_2)$ (Σχ. β)




### 7. Τι ονομάζουμε “μέγιστο”, “ελάχιστο”, συνάρτησης

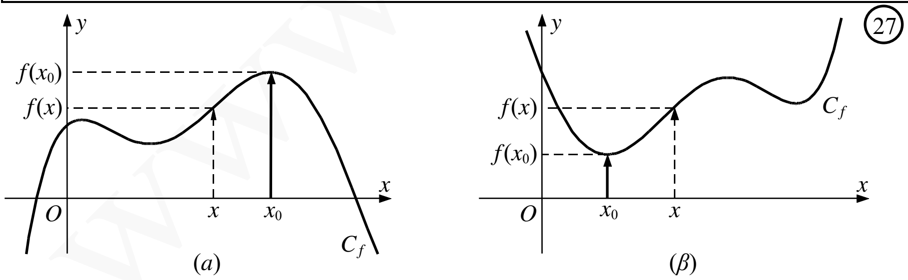
Μια συνάρτηση $f$ με πεδίο ορισμού $A$ θα λέμε ότι:

- Παρουσιάζει στο $x_0 \in A$ (ολικό) **μέγιστο**, το $f(x_0)$, όταν

$$f(x) \le f(x_0) \quad \text{για κάθε} \quad x \in A \qquad (\text{Σχ. } 27\alpha)$$

- Παρουσιάζει στο $x_0 \in A$ (ολικό) **ελάχιστο**, το $f(x_0)$, όταν

$$f(x) \ge f(x_0) \quad \text{για κάθε} \quad x \in A \qquad (\text{Σχ. } 27\beta).$$




### 8. Πότε μια συνάρτηση λέγεται 1-1

Μια συνάρτηση $f : A \to \Re$ λέγεται **συνάρτηση $1-1$**, όταν για οποιαδήποτε $x_1, x_2 \in A$ ισχύει η συνεπαγωγή:

$$\text{αν} \quad x_1 \ne x_2, \quad \text{τότε} \quad f(x_1) \ne f(x_2).$$

---

[1] Μια συνάρτηση *f* λέγεται, απλώς,:

- **αύξουσα** σ’ ένα διάστημα *Δ*, όταν για οποιαδήποτε $x_1, x_2 \in \Delta$ με $x_1 < x_2$ ισχύει
$$f(x_1) \le f(x_2).$$
- **φθίνουσα** σ’ ένα διάστημα *Δ*, όταν για οποιαδήποτε $x_1, x_2 \in \Delta$ με $x_1 < x_2$ ισχύει
$$f(x_1) \ge f(x_2).$$

Με απαγωγή σε άτοπο αποδεικνύεται ότι:

Μια συνάρτηση $f : A \to \mathbb{R}$ είναι **συνάρτηση $1-1$**, αν και μόνο αν για οποιαδήποτε $x_1, x_2 \in A$ ισχύει η συνεπαγωγή:

$$\text{αν} \quad f(x_1) = f(x_2), \quad \text{τότε} \quad x_1 = x_2 .$$

**9. Έστω $f : A \to \mathbb{R}$ μια «1-1» συνάρτηση. Πως ορίζεται η αντίστροφη συνάρτηση της *f*; Πως τη συμβολίζουμε;**

Για κάθε στοιχείο y του συνόλου τιμών *f*(A) της *f*, υπάρχει μοναδικό στοιχείο x του πεδίου ορισμού της A για το οποίο ισχύει $f(x) = y$. Επομένως ορίζεται μια συνάρτηση με την οποία κάθε $y \in f(A)$ αντιστοιχίζεται στο μοναδικό $x \in A$ για το οποίο ισχύει $f(x) = y$.

Η συνάρτηση αυτή ονομάζεται αντίστροφη συνάρτηση της *f* και συμβολίζεται $f^{-1}$.

Επομένως ισχύει: $f(x) = y \Leftrightarrow f^{-1}(y) = x$

**10. Να αποδείξετε ότι η ευθεία y = x είναι άξονας συμμετρίας των *f* και $f^{-1}$ .**

Ας πάρουμε μια 1-1 συνάρτηση *f* και ας θεωρήσουμε τις γραφικές παραστάσεις C και C΄ των *f* και $f^{-1}$ αντίστοιχα, στο ίδιο σύστημα αξόνων. Επειδή $f(x) = y \Leftrightarrow f^{-1}(y) = x$, αν ένα σημείο Μ(α,β) ανήκει στη γραφική παράσταση C της *f* , τότε το σημείο Μ΄(β,α) θα ανήκει στη γραφική παράσταση C΄ της $f^{-1}$ και αντιστρόφως. Τα σημεία όμως αυτά, είναι συμμετρικά ως προς την ευθεία που διχοτομεί τις γωνίες xOy και x΄Oy΄. Επομένως οι γραφικές παραστάσεις C και C΄των συναρτήσεων *f* και $f^{-1}$ είναι συμμετρικές ως προς την ευθεία y = x που διχοτομεί τις γωνίες xOy και x΄Oy΄

**11. Έστω το πολυώνυμο P(x) και $x_0 \in \mathbb{R}$ .**
**Να αποδείξετε ότι $\lim\limits_{x \to x_0} P(x) = P(x_0)$**

***ΑΠΟΔΕΙΞΗ***

Έστω το πολυώνυμο $P(x) = \alpha_\nu x^\nu + \alpha_{\nu-1}x^{\nu-1} + \cdots + \alpha_1 x + \alpha_0$ και $x_0 \in \mathbb{R}$ .

Σύμφωνα με τις ιδιότητες έχουμε:

$$\lim_{x \to x_0} P(x) = \lim_{x \to x_0}(\alpha_\nu x^\nu + \alpha_{\nu-1}x^{\nu-1} + \cdots + \alpha_0)$$

$$= \lim_{x \to x_0}(\alpha_\nu x^\nu) + \lim_{x \to x_0}(\alpha_{\nu-1}x^{\nu-1}) + \cdots + \lim_{x \to x_0}\alpha_0$$

$$= \alpha_\nu \lim_{x \to x_0} x^\nu + \alpha_{\nu-1}\lim_{x \to x_0} x^{\nu-1} + \cdots + \lim_{x \to x_0}\alpha_0$$

$$= \alpha_\nu x_0^\nu + \alpha_{\nu-1}x_0^{\nu-1} + \cdots + \alpha_0 = P(x_0) .$$

Επομένως,

$$\boxed{\lim_{x \to x_0} P(x) = P(x_0) .}$$

**12. Έστω P(x),Q(x) πολυώνυμα του x και $x_0 \in \mathbb{R}$ με Q(x) $\neq$ 0**
**Να αποδείξετε ότι** $\lim_{x\to x_0}\frac{P(x)}{Q(x)}=\frac{P(x_0)}{Q(x_0)}$.

***ΑΠΟΔΕΙΞΗ***

Έστω η ρητή συνάρτηση $f(x)=\frac{P(x)}{Q(x)}$ όπου $P(x)$, $Q(x)$ πολυώνυμα του x και $x_0 \in \mathbb{R}$ με $Q(x_0)\neq 0$. Τότε,

$$\lim_{x\to x_0} f(x)=\lim_{x\to x_0}\frac{P(x)}{Q(x)}=\frac{\lim\limits_{x\to x_0}P(x)}{\lim\limits_{x\to x_0}Q(x)}=\frac{P(x_0)}{Q(x_0)}.$$

Επομένως,

$$\boxed{\lim_{x\to x_0}\frac{P(x)}{Q(x)}=\frac{P(x_0)}{Q(x_0)},\quad \text{εφόσον}\quad Q(x_0)\neq 0}$$

**13. Να διατυπώσετε το κριτήριο παρεμβολής**
Έστω οι συναρτήσεις $f, g, h$. Αν
- $h(x)\le f(x)\le g(x)$ κοντά στο $x_0$ και
- $\lim_{x\to x_0} h(x)=\lim_{x\to x_0} g(x)=\ell$,

τότε $\lim_{x\to x_0} f(x)=\ell$.

**14. Τι ονομάζουμε ακολουθία**
Ακολουθία ονομάζεται κάθε πραγματική συνάρτηση $\alpha: N^* \to \mathbb{R}$.

**15. Πότε λέμε ότι μια συνάρτηση f είναι συνεχής στο $x_0$**
Έστω μια συνάρτηση $f$ και $x_0$ ένα σημείο $x_0$ του πεδίου ορισμού της.
Θα λέμε ότι η $f$ είναι **συνεχής στο $x_0$**, όταν
$\lim_{x\to x_0} f(x)=f(x_0)$

**16. Πότε μια συνάρτηση είναι συνεχής στο $A_f$**
Μια συνάρτηση $f$ θα λέμε ότι είναι **συνεχής** στο πεδίο ορισμού της , όταν είναι συνεχής σε κάθε σημείο του $A_f$.

**17. Πότε μια συνάρτηση είναι συνεχής στο (α,β)**
Μια συνάρτηση $f$ θα λέμε ότι είναι **συνεχής σε ένα ανοικτό διάστημα $(\alpha,\beta)$**, όταν είναι συνεχής σε κάθε σημείο του $(\alpha,\beta)$.

### 18. Πότε μια συνάρτηση είναι συνεχής στο [α,β]

Μια συνάρτηση $f$ θα λέμε ότι είναι **συνεχής σε ένα κλειστό διάστημα** $[\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}]$, όταν είναι συνεχής σε κάθε σημείο του $(\alpha,\beta)$ και επιπλέον

$$\lim_{x\to\alpha^+} f(x)=f(\alpha) \qquad \text{και} \qquad \lim_{x\to\beta^-} f(x)=f(\beta)$$

### 19. Να διατυπώσετε το θεώρημα του Bolzano

Έστω μια συνάρτηση $f$, ορισμένη σε ένα κλειστό διάστημα $[\alpha,\beta]$. Αν:

- η $f$ είναι συνεχής στο $[\alpha,\beta]$ και, επιπλέον, ισχύει
- $f(\alpha)\cdot f(\beta)<0$,

τότε υπάρχει ένα, τουλάχιστον, $x_0\in(\alpha,\beta)$ τέτοιο, ώστε

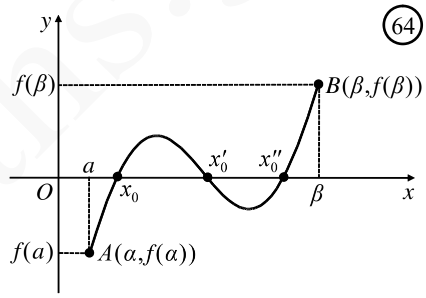
$f(x_0)=0$.

Δηλαδή, υπάρχει μια, τουλάχιστον, ρίζα της εξίσωσης $f(x)=0$ στο ανοικτό διάστημα $(\alpha,\beta)$.

### 20. Να εξηγήσετε γεωμετρικά το Θ. Bolzano

Στο διπλανό σχήμα έχουμε τη γραφική παράσταση μιας συνεχούς συνάρτησης $f$ στο $[\alpha,\beta]$.

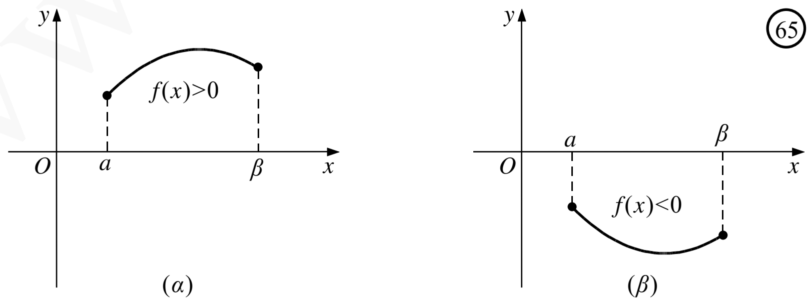
Επειδή τα σημεία $A(\alpha,f(\alpha))$ και $B(\beta,f(\beta))$ βρίσκονται εκατέρωθεν του άξονα $x'x$, η γραφική παράσταση της $f$ τέμνει τον άξονα σε ένα τουλάχιστον σημείο.




**ΣΧΟΛΙΟ**

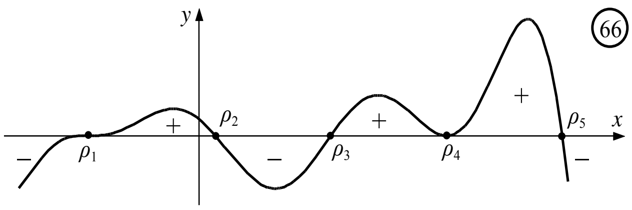
Από το θεώρημα του Bolzano προκύπτει ότι:

— Αν μια συνάρτηση $f$ είναι συνεχής σε ένα διάστημα *Δ* και δε μηδενίζεται σ' αυτό, τότε αυτή ή είναι θετική για κάθε $x\in\Delta$ ή είναι αρνητική για κάθε $x\in\Delta$, δηλαδή διατηρεί πρόσημο στο διάστημα *Δ*. (Σχ. 65)




(α) (β)

— Μια συνεχής συνάρτηση $f$ διατηρεί πρόσημο σε καθένα από το διαστήματα στα οποία οι διαδοχικές ρίζες της $f$ χωρίζουν το πεδίο ορισμού της.




Αυτό μας διευκολύνει στον προσδιορισμό του προσήμου της $f$ για τις διάφορες τιμές του $x$. Συγκεκριμένα, ο προσδιορισμός αυτός γίνεται ως εξής:

α) Βρίσκουμε τις ρίζες της $f$.

β) Σε καθένα από τα υποδιαστήματα που ορίζουν οι διαδοχικές ρίζες, επιλέγουμε έναν αριθμό και βρίσκουμε το πρόσημο της $f$ στον αριθμό αυτό. Το πρόσημο αυτό είναι και το πρόσημο της $f$ στο αντίστοιχο διάστημα.

**21. Να διατυπώσετε το θεώρημα ενδιαμέσων τιμών και να το αποδείξετε.**

Έστω μια συνάρτηση $f$, η οποία είναι ορισμένη σε ένα κλειστό διάστημα $[\alpha,\beta]$. Αν:

- η $f$ είναι συνεχής στο $[\alpha,\beta]$ και
- $f(\alpha)\neq f(\beta)$

τότε, για κάθε αριθμό η μεταξύ των $f(\alpha)$ και $f(\beta)$ υπάρχει ένας, τουλάχιστον $x_0\in(\alpha,\beta)$ τέτοιος, ώστε

$f(x_0)=\eta$

### *ΑΠΟΔΕΙΞΗ*

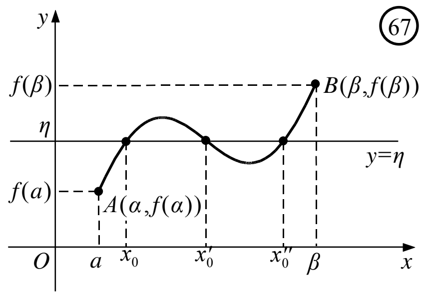
Ας υποθέσουμε ότι $f(\alpha)<f(\beta)$. Τότε θα ισχύει $f(\alpha)<\eta<f(\beta)$ . Αν θεωρήσουμε τη συνάρτηση $g(x)=f(x)-\eta$, $x\in[\alpha,\beta]$, παρατηρούμε ότι:

- η $g$ είναι συνεχής στο $[\alpha,\beta]$ και
- $g(\alpha)g(\beta)<0$,

αφού

$g(\alpha)=f(\alpha)-\eta<0$ και

$g(\beta)=f(\beta)-\eta>0$.




Επομένως, σύμφωνα με το θεώρημα του Bolzano, υπάρχει $x_0\in(\alpha,\beta)$ τέτοιο, ώστε $g(x_0)=f(x_0)-\eta=0$, οπότε $f(x_0)=\eta$.

**22. Να διατυπώσετε το θεώρημα μέγιστης και ελάχιστης τιμής**

Αν $f$ είναι συνεχής συνάρτηση στο $[\alpha,\beta]$, τότε η $f$ παίρνει στο $[\alpha,\beta]$ μια μέγιστη τιμή *M* και μια ελάχιστη τιμή *m*.

Δηλαδή, υπάρχουν $x_1, x_2 \in [\alpha,\beta]$ τέτοια, ώστε, αν $m = f(x_1)$ και $M = f(x_2)$, να ισχύει

$\boldsymbol{m \le f(x) \le M}$, **για κάθε** $\boldsymbol{x \in [\alpha,\beta]}$.

**ΣΧΟΛΙΟ**

Από το παραπάνω θεώρημα και το θεώρημα ενδιάμεσων τιμών προκύπτει ότι το **σύνολο τιμών** μιας συνεχούς συνάρτησης $f$ με πεδίο ορισμού το $[\alpha,\beta]$ είναι το κλειστό διάστημα $\boldsymbol{[m, M]}$, όπου *m* η ελάχιστη τιμή και *M* η μέγιστη τιμή της.

• Τέλος, αποδεικνύεται ότι:

Αν μια συνάρτηση $f$ είναι **γνησίως αύξουσα** και **συνεχής** σε ένα ανοικτό διάστημα $(\alpha,\beta)$, τότε το σύνολο τιμών της στο διάστημα αυτό είναι το διάστημα $(\mathrm{A}, \mathrm{B})$, όπου

$$\mathrm{A} = \lim_{x \to \alpha^+} f(x) \quad \text{και} \quad B = \lim_{x \to \beta^-} f(x).$$

Αν, όμως, η $f$ είναι **γνησίως φθίνουσα** και **συνεχής** στο $(\alpha,\beta)$, τότε το σύνολο τιμών της στο διάστημα αυτό είναι το διάστημα $(B, A)$

# ΔΙΑΦΟΡΙΚΟΣ ΛΟΓΙΣΜΟΣ

## 1. Τι ορίζουμε ως εφαπτομένη της $C_f$ στο σημείο της A;

Έστω $f$ μια συνάρτηση και $A(x_0, f(x_0))$ ένα σημείο της $C_f$. Αν υπάρχει το $\lim\limits_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ και είναι ένας πραγματικός αριθμός *λ*, τότε ορίζουμε ως εφαπτομένη της $C_f$ στο σημείο της *A*, την ευθεία *ε* που διέρχεται από το *A* και έχει συντελεστή διεύθυνσης *λ*.

Επομένως, η εξίσωση της εφαπτομένης στο σημείο $A(x_0, f(x_0))$ είναι

$$\boldsymbol{y - f(x_0) = \lambda(x - x_0)},$$

## 2. Πότε λέμε ότι μια συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη σε ένα σημείο του πεδίου ορισμού της.

**Μια συνάρτηση *f* λέμε ότι είναι παραγωγίσιμη σ' ένα σημείο $x_0$ του πεδίου ορισμού της,** αν υπάρχει το

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$$

και είναι πραγματικός αριθμός.

Το όριο αυτό ονομάζεται **παράγωγος της *f* στο $x_0$** και συμβολίζεται με $\boldsymbol{f'(x_0)}$. Δηλαδή:

$$f'(x_0)=\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}.$$

## 3. Να αποδείξετε ότι Αν μια συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη σ' ένα σημείο $x_o$, τότε είναι και συνεχής στο σημείο αυτό.

***ΑΠΟΔΕΙΞΗ***

Για $x \neq x_0$ έχουμε

$$f(x)-f(x_0)=\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}\cdot(x-x_0),$$

οπότε

$$\lim_{x\to x_0}[f(x)-f(x_0)]=\lim_{x\to x_0}\left[\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}\cdot(x-x_0)\right]$$

$$=\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}\cdot\lim_{x\to x_0}(x-x_0)$$

$$=f'(x_0)\cdot 0=0,$$

αφού η $f$ είναι παραγωγίσιμη στο $x_0$. Επομένως, $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=f(x_0)$, δηλαδή η $f$ είναι συνεχής στο $x_0$.

**4. Πότε μια συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο πεδίο ορισμού της $A_f$ ;**

Η *f* είναι παραγωγίσιμη στο *A* ή, απλά, **παραγωγίσιμη**, όταν είναι παραγωγίσιμη σε κάθε σημείο $x_0 \in A$.

**5. Πότε μια συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη σε ένα ανοικτό διάστημα $(\alpha,\beta)$ ;**

Η *f* είναι **παραγωγίσιμη σε ένα ανοικτό διάστημα $(\alpha,\beta)$** του πεδίου ορισμού της, όταν είναι παραγωγίσιμη σε κάθε σημείο $x_0 \in (\alpha,\beta)$.

**6. Πότε μια συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη σε ένα κλειστό διάστημα $[\alpha,\beta]$ ;**

Η *f* είναι **παραγωγίσιμη σε ένα κλειστό διάστημα $[\alpha,\beta]$** του πεδίου ορισμού της, όταν είναι παραγωγίσιμη στο $(\alpha,\beta)$ και επιπλέον ισχύει

$$\lim_{x\to\alpha^+}\frac{f(x)-f(\alpha)}{x-\alpha}\in\mathbb{R} \quad \text{και} \quad \lim_{x\to\beta^-}\frac{f(x)-f(\beta)}{x-\beta}\in\mathbb{R}.$$

**7. Έστω μια συνάρτηση *f* με πεδίο ορισμού Α. Τι ονομάζουμε πρώτη παράγωγο μιας συνάρτησης f ;**

Έστω $A_1$ το σύνολο των σημείων του Α στα οποία η *f* είναι παραγωγίσιμη. Αντιστοιχίζοντας κάθε $x\in A_1$ στο $f'(x)$ ορίζουμε την συνάρτηση

$$f':A_1\to\mathbb{R}$$
$$x\to f'(x)$$

η οποία ονομάζεται πρώτη παράγωγος της *f* ή απλά παράγωγος της *f.*

***8.* Έστω μια συνάρτηση *f* με πεδίο ορισμού Α. Τι ονομάζουμε δεύτερη παράγωγο μιας συνάρτησης *f*;**

Αν υποθέσουμε ότι το $A_1$ (το σύνολο των σημείων του πεδίου ορισμού Α της *f* στα οποία η *f* είναι παραγωγίσιμη) είναι διάστημα ή ένωση διαστημάτων , τότε η παράγωγος της *f'* , αν υπάρχει, λέγεται **δεύτερη παράγωγος της *f*** και συμβολίζεται *f''*

**9. Έστω η σταθερή συνάρτηση $f(x)=c$ , $c\in\mathbb{R}$. Η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ και ισχύει $f'(\chi)=0$, δηλαδή (c)΄=0**

***ΑΠΟΔΕΙΞΗ***

Πράγματι, αν $x_0$ είναι ένα σημείο του $\mathbb{R}$, τότε για $x\neq x_0$ ισχύει:

$$\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=\frac{c-c}{x-x_0}=0.$$

Επομένως, $$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=0,$$

δηλαδή $(c)'=0$.

**10. Έστω η συνάρτηση f(x)=x. Η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ και ισχύει f΄(x)=1, δηλαδή (x)΄=1**

***ΑΠΟΔΕΙΞΗ***

Πράγματι, αν $x_0$ είναι ένα σημείο του R, τότε για $x \neq x_0$ ισχύει:

$$\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=\frac{x-x_0}{x-x_0}=1.$$

Επομένως, $$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=\lim_{x\to x_0}1=1,$$

δηλαδή $(x)'=1$.

**11. Έστω η συνάρτηση $f(x)=x^\nu$, $\nu\in\mathbb{N}-\{0,1\}$ συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ και ισχύει $f'(x)=\nu x^{\nu-1}$, δηλαδή $(x^\nu)'=\nu x^{\nu-1}$**

***ΑΠΟΔΕΙΞΗ***

Πράγματι, αν $x_0$ είναι ένα σημείο του R, τότε για $x \neq x_0$ ισχύει:

$$\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=\frac{x^\nu-x_0^\nu}{x-x_0}=\frac{(x-x_0)(x^{\nu-1}+x^{\nu-2}x_0+\cdots+x_0^{\nu-1})}{x-x_0}=x^{\nu-1}+x^{\nu-2}x_0+\cdots+x_0^{\nu-1},$$

οπότε

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=\lim_{x\to x_0}(x^{\nu-1}+x^{\nu-2}x_0+\cdots+x_0^{\nu-1})=x_0^{\nu-1}+x_0^{\nu-1}+\cdots+x_0^{\nu-1}=\nu x_0^{\nu-1},$$

δηλαδή $(x^\nu)'=\nu x^{\nu-1}$.

**12. Έστω η συνάρτηση $f(x)=\sqrt{x}$. Η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο $(0,+\infty)$ και ισχύει $f'(x)=\frac{1}{2\sqrt{x}}$, δηλαδή $\left(\sqrt{x}\right)'=\frac{1}{2\sqrt{x}}$**

***ΑΠΟΔΕΙΞΗ***

Πράγματι, αν $x_0$ είναι ένα σημείο του $(0,+\infty)$, τότε για $x \neq x_0$ ισχύει:

$$\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=\frac{\sqrt{x}-\sqrt{x_0}}{x-x_0}=\frac{\left(\sqrt{x}-\sqrt{x_0}\right)\left(\sqrt{x}+\sqrt{x_0}\right)}{(x-x_0)\left(\sqrt{x}+\sqrt{x_0}\right)}=\frac{x-x_0}{(x-x_0)\left(\sqrt{x}+\sqrt{x_0}\right)}=\frac{1}{\sqrt{x}+\sqrt{x_0}},$$

Οπότε $$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=\lim_{x\to x_0}\frac{1}{\sqrt{x}+\sqrt{x_0}}=\frac{1}{2\sqrt{x_0}},$$

δηλαδή $$\left(\sqrt{x}\right)'=\frac{1}{2\sqrt{x}}.$$

Όπως είδαμε στην παράγραφο 3.1 η $f(x)=\sqrt{x}$ **δεν είναι παραγωγίσιμη στο 0.**

**13. Έστω συνάρτηση $f(x) = ημx$. Η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ και ισχύει $f'(x) = συνx$, δηλαδή** $(\text{ημ}x)' = \text{συν}x$

***ΑΠΟΔΕΙΞΗ***

Πράγματι, για κάθε $x \in \Re$ και $h \neq 0$ ισχύει

$$\frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \frac{\text{ημ}(x+h)-\text{ημ}x}{h} = \frac{\text{ημ}x \cdot \text{συν}h + \text{συν}x \cdot \text{ημ}h - \text{ημ}x}{h}$$

$$= \text{ημ}x \cdot \frac{(\text{συν}h-1)}{h} + \text{συν}x \cdot \frac{\text{ημ}h}{h}.$$

Επειδή $\lim\limits_{h\to 0}\frac{\text{ημ}h}{h}=1$ και $\lim\limits_{h\to 0}\frac{\text{συν}h-1}{h}=0$,

έχουμε $\lim\limits_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \text{ημ}x\cdot 0 + \text{συν}x \cdot 1 = \text{συν}x$.

Δηλαδή, $(\text{ημ}x)' = \text{συν}x$.

**14. Έστω η συνάρτηση $f(x) = συνx$. Η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ και ισχύει $f'(x) = -ημx$, δηλαδή** $(\text{συν}x)' = -\text{ημ}x$

***ΑΠΟΔΕΙΞΗ***

Πράγματι, για κάθε $x \in \mathrm{R}$ και $h \neq 0$ ισχύει:

$$\frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \frac{\text{συν}(x+h)-\text{συν}x}{h} = \frac{\text{συν}x \cdot \text{συν}h - \text{ημ}x \cdot \text{ημ}h - \text{συν}x}{h}$$

$$= \text{συν}x \cdot \frac{\text{συν}h-1}{h} - \text{ημ}x \cdot \frac{\text{ημ}h}{h},$$

Οπότε $\lim\limits_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \lim\limits_{h\to 0}\left(\text{συν}x \cdot \frac{\text{συν}h-1}{h}\right) - \lim\limits_{h\to 0}\left(\text{ημ}x \cdot \frac{\text{ημ}h}{h}\right)$

$$= \text{συν}x \cdot 0 - \text{ημ}x \cdot 1 = -\text{ημ}x.$$

Δηλαδή, $(\text{συν}x)' = -\text{ημ}x$.

**15. Αν οι συναρτήσεις f , g είναι παραγωγίσιμες στο $x_0$, τότε η συνάρτηση f+g είναι παραγωγίσιμη στο $x_0$ και ισχύει:** $(f+g)'(x_0) = f'(x_0) + g'(x_0)$

***ΑΠΟΔΕΙΞΗ***

Για $x \neq x_0$, ισχύει:

$$\frac{(f+g)(x)-(f+g)(x_0)}{x-x_0} = \frac{f(x)+g(x)-f(x_0)-g(x_0)}{x-x_0} = \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} + \frac{g(x)-g(x_0)}{x-x_0}$$

.

Επειδή οι συναρτήσεις $f, g$ είναι παραγωγίσιμες στο $x_0$, έχουμε:

$$\lim_{x\to x_0}\frac{(f+g)(x)-(f+g)(x_0)}{x-x_0}=\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}+\lim_{x\to x_0}\frac{g(x)-g(x_0)}{x-x_0}=f'(x_0)+g'(x_0),$$

Δηλαδή $$(f+g)'(x_0)=f'(x_0)+g'(x_0).$$

**16. Έστω η συνάρτηση $f(x)=x^{-\nu}$, $\nu\in N^*$. Η συνάρτηση $f$ είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}^*$ και ισχύει $f'(x)=-\nu x^{-\nu-1}$, δηλαδή $(x^{-\nu})'=-\nu x^{-\nu-1}$**

***ΑΠΟΔΕΙΞΗ***

Πράγματι, για κάθε $x\in\mathbb{R}^*$ έχουμε:

$$(x^{-\nu})'=\left(\frac{1}{x^\nu}\right)'=\frac{(1)'x^\nu-1(x^\nu)'}{(x^\nu)^2}=\frac{-\nu x^{\nu-1}}{x^{2\nu}}=-\nu x^{-\nu-1}.$$

**17. Έστω η συνάρτηση $f(x)=\text{εφ}x$. Η συνάρτηση $f$ είναι παραγωγίσιμη στο $R_1=\mathbb{R}-\{x|\text{συν}x=0\}$ και ισχύει $f'(x)=\frac{1}{\text{συν}^2 x}$, δηλαδή $(\text{εφ}x)'=\frac{1}{\text{συν}^2 x}$**

***ΑΠΟΔΕΙΞΗ***

Πράγματι, για κάθε $x\in R$ έχουμε:

$$(\text{εφ}x)'=\left(\frac{\text{ημ}x}{\text{συν}x}\right)'=\frac{(\text{ημ}x)'\text{συν}x-\text{ημ}x(\text{συν}x)'}{\text{συν}^2 x}=\frac{\text{συν}x\text{συν}x+\text{ημ}x\text{ημ}x}{\text{συν}^2 x}$$

$$=\frac{\text{συν}^2 x+\text{ημ}^2 x}{\text{συν}^2 x}=\frac{1}{\text{συν}^2 x}.$$

**18. Η συνάρτηση $f(x)=x^\alpha$, $\alpha\in\mathbb{R}-\mathbb{Z}$ είναι παραγωγίσιμη στο $(0,+\infty)$ και ισχύει $f'(x)=\alpha x^{\alpha-1}$, δηλαδή $(x^\alpha)'=\alpha x^{\alpha-1}$**

***ΑΠΟΔΕΙΞΗ***

Πράγματι, αν $y=x^\alpha=e^{\alpha\ln x}$ και θέσουμε $u=\alpha\ln x$, τότε έχουμε $y=e^u$. Επομένως,

$$y'=(e^u)'=e^u\cdot u'=e^{\alpha\ln x}\cdot\alpha\cdot\frac{1}{x}=x^\alpha\cdot\frac{\alpha}{x}=\alpha x^{\alpha-1}.$$

**19. Η συνάρτηση $f(x)=\alpha^x$, $\alpha>0$ είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ και ισχύει $f'(x)=\alpha^x\ln\alpha$, δηλαδή $(\alpha^x)'=\alpha^x\ln\alpha$**

***ΑΠΟΔΕΙΞΗ***

Πράγματι, αν $y=\alpha^x=e^{x\ln\alpha}$ και θέσουμε $u=x\ln\alpha$, τότε έχουμε $y=e^u$. Επομένως,

$$y'=(e^u)'=e^u\cdot u'=e^{x\ln\alpha}\cdot\ln\alpha=\alpha^x\ln\alpha .$$

**20. Η συνάρτηση $f(x)=\ln|x|$, $x\in\mathbb{R}^*$ είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}^*$ και ισχύει** $(\ln|x|)'=\dfrac{1}{x}$

***ΑΠΟΔΕΙΞΗ***

Πράγματι·

— αν $x>0$, τότε $(\ln|x|)'=(\ln x)'=\dfrac{1}{x}$, ενώ

— αν $x<0$, τότε $\ln|x|=\ln(-x)$, οπότε, αν θέσουμε $y=\ln(-x)$ και $u=-x$, έχουμε $y=\ln u$. Επομένως, $y'=(\ln u)'=\dfrac{1}{u}\cdot u'=\dfrac{1}{-x}(-1)=\dfrac{1}{x}$

και άρα $(\ln|x|)'=\dfrac{1}{x}$.

**21. Αν δύο μεταβλητά μεγέθη x, y συνδέονται με τη σχέση y=*f*(x), τι ονομάζουμε ρυθμό μεταβολής του y ως προς το x στο σημείο $x_0$**

Αν δύο μεταβλητά μεγέθη $x, y$ συνδέονται με τη σχέση $y=f(x)$, όταν $f$ είναι μια συνάρτηση παραγωγίσιμη στο $x_0$, τότε ονομάζουμε **ρυθμό μεταβολής του *y* ως προς το *x* στο σημείο $x_0$** την παράγωγο $f'(x_0)$.

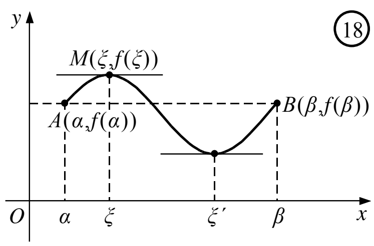
**22. Να διατυπώσετε το θεώρημα του Rolle και να το εξηγήσετε γεωμετρικά**

Αν μια συνάρτηση $f$ είναι:

- συνεχής στο κλειστό διάστημα $[\alpha,\beta]$
- παραγωγίσιμη στο ανοικτό διάστημα $(\alpha,\beta)$ και
- $f(\alpha)=f(\beta)$

τότε υπάρχει ένα, τουλάχιστον, $\xi\in(\alpha,\beta)$ τέτοιο, ώστε: $f'(\xi)=0$

Γεωμετρικά, αυτό σημαίνει ότι υπάρχει ένα, τουλάχιστον, $\xi\in(\alpha,\beta)$ τέτοιο, ώστε η εφαπτομένη της $C_f$ στο $M(\xi,f(\xi))$ να είναι παράλληλη στον άξονα των *x*.



**23. Να διατυπώσετε το θεώρημα Μέσης Τιμής και να το εξηγήσετε γεωμετρικά**

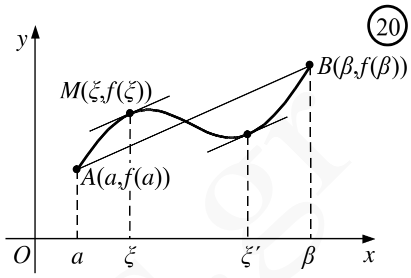
Αν μια συνάρτηση $f$ είναι:

- συνεχής στο κλειστό διάστημα $[\alpha,\beta]$ και
- παραγωγίσιμη στο ανοικτό διάστημα $(\alpha,\beta)$

τότε υπάρχει ένα, τουλάχιστον, $\xi\in(\alpha,\beta)$ τέτοιο, ώστε:

$$f'(\xi)=\frac{f(\beta)-f(\alpha)}{\beta-\alpha}$$

Γεωμετρικά, αυτό σημαίνει ότι υπάρχει ένα, τουλάχιστον, $\xi\in(\alpha,\beta)$ τέτοιο, ώστε η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της $f$ στο σημείο $M(\xi,f(\xi))$ να είναι παράλληλη της ευθείας *ΑΒ*.




**24. Συνέπεια Θ.Μ.Τ:**

**Έστω μια συνάρτηση f ορισμένη σε ένα διάστημα Δ. Αν**

- **η f είναι συνεχής στο Δ και**
- **f΄(x)=0 για κάθε ε σ ω τ ε ρ ι κ ό σημείο x του Δ,**

**τότε η f είναι σταθερή σε όλο το διάστημα Δ.**

***ΑΠΟΔΕΙΞΗ***

Αρκεί να αποδείξουμε ότι για οποιαδήποτε $x_1,x_2\in\Delta$ ισχύει $f(x_1)=f(x_2)$. Πράγματι

- Αν $x_1=x_2$, τότε προφανώς $f(x_1)=f(x_2)$.
- Αν $x_1<x_2$, τότε στο διάστημα $[x_1,x_2]$ η $f$ ικανοποιεί τις υποθέσεις του θεωρήματος μέσης τιμής. Επομένως, υπάρχει $\xi\in(x_1,x_2)$ τέτοιο, ώστε

$$f'(\xi)=\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}. \qquad (1)$$

Επειδή το *ξ* είναι εσωτερικό σημείο του *Δ*, ισχύει $f'(\xi)=0$ ,οπότε, λόγω της (1), είναι $f(x_1)=f(x_2)$. Αν $x_2<x_1$, τότε ομοίως αποδεικνύεται ότι $f(x_1)=f(x_2)$. Σε όλες, λοιπόν, τις περιπτώσεις είναι $f(x_1)=f(x_2)$.

**25. Πόρισμα του παραπάνω θεωρήματος:**

**Έστω δυο συναρτήσεις f , g ορισμένες σε ένα διάστημα Δ. Αν**

- **οι f, g είναι συνεχείς στο Δ και**
- **f΄(x)=g΄(x) για κάθε ε σ ω τ ε ρ ι κ ό σημείο x του Δ,**

**τότε υπάρχει σταθερά c τέτοια, ώστε για κάθε $x\in\Delta$ να ισχύει:**

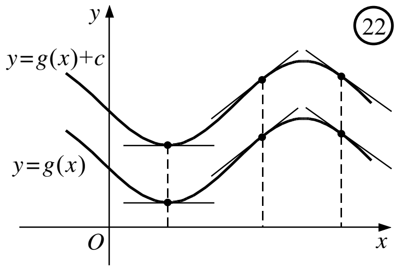
$f(x)=g(x)+c$

***ΑΠΟΔΕΙΞΗ***

Η συνάρτηση $f-g$ είναι συνεχής στο *Δ* και για κάθε εσωτερικό σημείο $x \in \Delta$ ισχύει

$$(f-g)'(x) = f'(x) - g'(x) = 0.$$

Επομένως, σύμφωνα με το παραπάνω θεώρημα, η συνάρτηση $f-g$ είναι σταθερή στο *Δ*. Άρα, υπάρχει σταθερά *C* τέτοια, ώστε για κάθε $x \in \Delta$ να ισχύει $f(x) - g(x) = c$, οπότε $f(x) = g(x) + c$.




**26.** **Παράγωγος και μονοτονία:**

**Έστω μια συνάρτηση f, η οποία είναι σ υ ν ε χ ή ς σε ένα διάστημα Δ.**

**• Αν $f'(x) > 0$ σε κάθε ε σ ω τ ε ρ ι κ ό σημείο x του Δ, τότε η f είναι γνησίως αύξουσα σε όλο το Δ.**

**• Αν $f'(x) < 0$ σε κάθε ε σ ω τ ε ρ ι κ ό σημείο x του Δ, τότε η f είναι γνησίως φθίνουσα σε όλο το Δ.**

***ΑΠΟΔΕΙΞΗ***

Αποδεικνύουμε το θεώρημα στην περίπτωση που είναι $f'(x) > 0$.

Έστω $x_1, x_2 \in \Delta$ με $x_1 < x_2$. Θα δείξουμε ότι $f(x_1) < f(x_2)$. Πράγματι, στο διάστημα $[x_1, x_2]$ η $f$ ικανοποιεί τις προϋποθέσεις του Θ.Μ.Τ. Επομένως, υπάρχει $\xi \in (x_1, x_2)$ τέτοιο, ώστε $f'(\xi) = \dfrac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$, οπότε έχουμε

$$f(x_2) - f(x_1) = f'(\xi)(x_2 - x_1)$$

Επειδή $f'(\xi) > 0$ και $x_2 - x_1 > 0$, έχουμε $f(x_2) - f(x_1) > 0$, οπότε $f(x_1) < f(x_2)$.

Στην περίπτωση που είναι $f'(x) < 0$ εργαζόμαστε αναλόγως.

**27.** **Πότε μια συνάρτηση *f* με πεδίο ορισμού Α, θα λέμε ότι παρουσιάζει στο $x_0 \in \mathrm{A}$ τοπικό μέγιστο;**

Μια συνάρτηση *f* με πεδίο ορισμού Α, θα λέμε ότι παρουσιάζει στο $x_0 \in \mathrm{A}$ τοπικό μέγιστο, όταν υπάρχει δ > 0 τέτοιο ώστε

$$f(x) \le f(x_0) \text{ για κάθε } x \in \mathrm{A} \cap (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$$

Το $x_0$ λέγεται θέση ή σημείο τοπικού μεγίστου, ενώ το $f(x_0)$ τοπικό μέγιστο της *f*

**28.** **Πότε μια συνάρτηση *f* με πεδίο ορισμού Α, θα λέμε ότι παρουσιάζει στο $x_0 \in \mathrm{A}$ τοπικό ελάχιστο;**

Μια συνάρτηση *f* με πεδίο ορισμού Α, θα λέμε ότι παρουσιάζει στο $x_0 \in \mathrm{A}$ τοπικό ελάχιστο, όταν υπάρχει δ > 0 τέτοιο ώστε

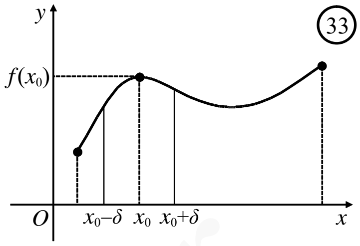
$$f(x) \ge f(x_0) \text{ για κάθε } x \in \mathrm{A} \cap (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$$

Το $x_0$ λέγεται θέση ή σημείο τοπικού ελαχίστου, ενώ το $f(x_0)$ τοπικό ελάχιστο της *f*

**29. Να διατυπώσετε το θεώρημα του Fermat και να το αποδείξετε:**

Έστω μια συνάρτηση $f$ ορισμένη σ’ ένα διάστημα *Δ* και $x_0$ ένα **εσωτερικό** σημείο του *Δ*. Αν η $f$ παρουσιάζει **τοπικό ακρότατο** στο $x_0$ και είναι **παραγωγίσιμη** στο σημείο αυτό, τότε: $f'(x_0)=0$

***ΑΠΟΔΕΙΞΗ***




Ας υποθέσουμε ότι η $f$ παρουσιάζει στο $x_0$ τοπικό μέγιστο. Επειδή το $x_0$ είναι εσωτερικό σημείο του *Δ* και η $f$ παρουσιάζει σ’ αυτό τοπικό μέγιστο, υπάρχει $\delta>0$ τέτοιο, ώστε

$(x_0-\delta, x_0+\delta)\subseteq \Delta$ και

$f(x)\le f(x_0)$, για κάθε $x\in(x_0-\delta, x_0+\delta)$. (1)

Επειδή, επιπλέον, η $f$ είναι παραγωγίσιμη στο $x_0$, ισχύει

$$f'(x_0)=\lim_{x\to x_0^-}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=\lim_{x\to x_0^+}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}.$$

Επομένως,

— αν $x\in(x_0-\delta, x_0)$, τότε, λόγω της (1), θα είναι $\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}\ge 0$, οπότε θα έχουμε

$$f'(x_0)=\lim_{x\to x_0^-}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}\ge 0 \qquad (2)$$

— αν $x\in(x_0, x_0+\delta)$, τότε, λόγω της (1), θα είναι $\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}\le 0$, οπότε θα έχουμε

$$f'(x_0)=\lim_{x\to x_0^+}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}\le 0. \qquad (3)$$

Έτσι, από τις (2) και (3) έχουμε $f'(x_0)=0$.

Η απόδειξη για τοπικό ελάχιστο είναι ανάλογη. ■

## ΣΧΟΛΙΟ

Σύμφωνα με το προηγούμενο θεώρημα, τα εσωτερικά σημεία του Δ, στα οποία η $f'$ είναι διαφορετική από το μηδέν, δεν είναι θέσεις τοπικών ακροτάτων.
Επομένως, οι *πιθανές θέσεις των τοπικών ακροτάτων* μιας συνάρτησης $f$ σ' ένα διάστημα Δ είναι:

**1. Τα εσωτερικά σημεία του Δ στα οποία η παράγωγος της $f$ μηδενίζεται.**
**2. Τα εσωτερικά σημεία του Δ στα οποία η $f$ δεν παραγωγίζεται.**
3. **Τα άκρα του Δ** (αν ανήκουν στο πεδίο ορισμού της).

Τα *εσωτερικά* σημεία του Δ στα οποία η $f$ δεν παραγωγίζεται ή η παράγωγός της είναι ίση με το μηδέν, λέγονται **κρίσιμα σημεία** της $f$ στο διάστημα Δ.

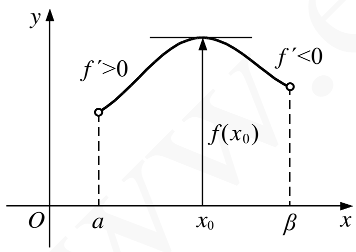
## 30. Κριτήριο για τα ακρότατα

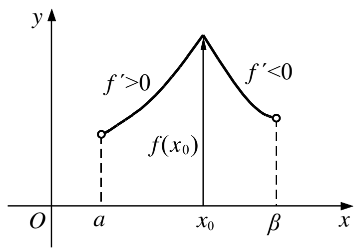
Έστω μια συνάρτηση $f$ παραγωγίσιμη σ' ένα διάστημα $(\alpha,\beta)$, με εξαίρεση ίσως ένα σημείο του $x_0$, στο οποίο όμως η $f$ είναι συνεχής. Αν $f'(x)>0$ στο $(\alpha,x_0)$ και $f'(x)<0$ στο $(x_0,\beta)$, τότε να αποδείξετε ότι το $f(x_0)$ είναι τοπικό μέγιστο της $f$.

### *ΑΠΟΔΕΙΞΗ*

Επειδή $f'(x)>0$ για κάθε $x\in(\alpha,x_0)$ και η $f$ είναι συνεχής στο $x_0$, *η* $f$ είναι γνησίως αύξουσα στο $(\alpha,x_0]$. Έτσι έχουμε $f(x)\le f(x_0)$, για κάθε $x\in(\alpha,x_0]$ (1)

Επειδή $f'(x)<0$ για κάθε $x\in(x_0,\beta)$ και η $f$ είναι συνεχής στο $x_0$, η $f$ είναι γνησίως φθίνουσα στο $[x_0,\beta)$. Έτσι έχουμε: $f(x)\le f(x_0)$, για κάθε $x\in[x_0,\beta)$ (2).




Επομένως, λόγω των (1) και (2), ισχύει: $f(x)\le f(x_0)$, για κάθε $x\in(\alpha,\beta)$,

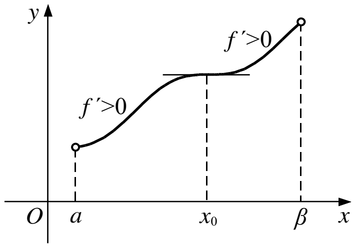
που σημαίνει ότι το $f(x_0)$ είναι μέγιστο της $f$ στο $(\alpha,\beta)$ και άρα τοπικό μέγιστο αυτής.

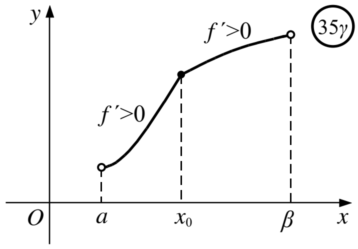
## 32. Θεώρημα

Έστω μια συνάρτηση $f$ παραγωγίσιμη σ' ένα διάστημα $(\alpha,\beta)$, με εξαίρεση ίσως ένα σημείο του $x_0$, στο οποίο όμως η $f$ είναι συνεχής. Αν η $f'(x)$ διατηρεί πρόσημο στο $(\alpha,x_0)\cup(x_0,\beta)$, τότε το $f(x_0)$ δεν είναι τοπικό ακρότατο και η $f$ είναι γνησίως μονότονη στο $(\alpha,\beta)$

***ΑΠΟΔΕΙΞΗ***

Έστω ότι $f'(x) > 0$, για κάθε $x \in (\alpha, x_0) \cup (x_0, \beta)$




Επειδή η $f$ είναι συνεχής στο $x_0$ θα είναι γνησίως αύξουσα σε κάθε ένα από τα διαστήματα $(\alpha, x_0]$ και $[x_0, \beta)$. Επομένως, για $x_1 < x_0 < x_2$ ισχύει $f(x_1) < f(x_0) < f(x_2)$. Άρα το $f(x_0)$ δεν είναι τοπικό ακρότατο της $f$. Θα δείξουμε, τώρα, ότι η $f$ είναι γνησίως αύξουσα στο $(\alpha, \beta)$. Πράγματι, έστω $x_1, x_2 \in (\alpha, \beta)$ με $x_1 < x_2$.

— Αν $x_1, x_2 \in (\alpha, x_0]$, επειδή η $f$ είναι γνησίως αύξουσα στο $(\alpha, x_0]$, θα ισχύει $f(x_1) < f(x_2)$.

— Αν $x_1, x_2 \in [x_0, \beta)$, επειδή η $f$ είναι γνησίως αύξουσα στο $[x_0, \beta)$, θα ισχύει $f(x_1) < f(x_2)$.

— Τέλος, αν $x_1 < x_0 < x_2$, τότε όπως είδαμε $f(x_1) < f(x_0) < f(x_2)$.

Επομένως, σε όλες τις περιπτώσεις ισχύει $f(x_1) < f(x_2)$, οπότε η $f$ είναι γνησίως αύξουσα στο $(\alpha, \beta)$.

Ομοίως, αν $f'(x) < 0$ για κάθε $x \in (\alpha, x_0) \cup (x_0, \beta)$.

**33. Έστω μια συνάρτηση f συνεχής σε ένα διάστημα Δ και παραγωγίσιμη στο εσωτερικό του Δ, πότε θα λέμε ότι η f στρέφει τα κοίλα προς τα άνω και πότε προς τα κάτω;**

Έστω μία συνάρτηση $f$ *συνεχής* σ' ένα διάστημα *Δ* και *παραγωγίσιμη* στο *εσωτερικό* του *Δ*. Θα λέμε ότι:

• Η συνάρτηση $f$ στρέφει τα **κοίλα προς τα άνω** ή είναι **κυρτή** στο *Δ*, αν η $f'$ είναι γνησίως αύξουσα στο *εσωτερικό* του *Δ*.

• Η συνάρτηση $f$ στρέφει τα **κοίλα προς τα κάτω** ή είναι **κοίλη** στο *Δ*, αν η $f'$ είναι γνησίως φθίνουσα στο *εσωτερικό* του *Δ*.

**34. Πότε το σημείο $\mathrm{A}(x_0, f(x_0))$ ονομάζεται σημείο καμπής της γραφικής παράστασης της *f***

Έστω μια συνάρτηση $f$ παραγωγίσιμη σ' ένα διάστημα $(\alpha,\beta)$, με εξαίρεση ίσως ένα σημείο του $x_0$. Αν

- η $f$ είναι κυρτή στο $(\alpha, x_0)$ και κοίλη στο $(x_0,\beta)$, ή αντιστρόφως, και
- η $C_f$ έχει εφαπτομένη στο σημείο $A(x_0, f(x_0))$,

τότε το σημείο $A(x_0, f(x_0))$ ονομάζεται **σημείο καμπής** της γραφικής παράστασης της $f$.

**35. Πότε η ευθεία $x = x_0$ λέγεται κατακόρυφη ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης της $f$**

Αν ένα τουλάχιστον από τα όρια $\lim\limits_{x\to x_0^+} f(x)$, $\lim\limits_{x\to x_0^-} f(x)$ είναι $+\infty$ ή $-\infty$, τότε η ευθεία $x = x_0$ λέγεται **κατακόρυφη ασύμπτωτη** της γραφικής παράστασης της $f$.

**36. Πότε η ευθεία $y=\ell$ λέγεται οριζόντια ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης της $f$ στο $+\infty$ (αντίστοιχα στο $-\infty$)**

Αν $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\ell$ (αντιστοίχως $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=\ell$), τότε η ευθεία $y=\ell$ λέγεται **οριζόντια ασύμπτωτη** της γραφικής παράστασης της $f$ στο $+\infty$ (αντιστοίχως στο $-\infty$).

**37. Πότε η ευθεία $y = \lambda x + \beta$ λέγεται πλάγια ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης της f στο $+\infty$ (αντίστοιχα στο $-\infty$)**

Η ευθεία $y=\lambda x+\beta$ λέγεται **ασύμπτωτη** της γραφικής παράστασης της $f$ στο $+\infty$, αντιστοίχως στο $-\infty$, αν

$$\lim_{x\to+\infty}[f(x)-(\lambda x+\beta)]=0,$$

αντιστοίχως

$$\lim_{x\to-\infty}[f(x)-(\lambda x+\beta)]=0.$$

**38. Να διατυπώσετε τους κανόνες de l'Hospital**

**ΘΕΩΡΗΜΑ 1ο (μορφή $\frac{0}{0}$)**

Αν $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=0$, $\lim\limits_{x\to x_0} g(x)=0$, $x_0\in\mathbb{R}\cup\{-\infty,+\infty\}$ και υπάρχει το $\lim\limits_{x\to x_0}\frac{f'(x)}{g'(x)}$ (πεπερασμένο ή άπειρο), τότε: $\lim\limits_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim\limits_{x\to x_0}\frac{f'(x)}{g'(x)}$.

**ΘΕΩΡΗΜΑ 2ο (μορφή $\frac{+\infty}{+\infty}$)**

Αν $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=+\infty$, $\lim\limits_{x\to x_0} g(x)=+\infty$, $x_0\in\mathbb{R}\cup\{-\infty,+\infty\}$ και υπάρχει το $\lim\limits_{x\to x_0}\frac{f'(x)}{g'(x)}$ (πεπερασμένο ή άπειρο), τότε: $\lim\limits_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim\limits_{x\to x_0}\frac{f'(x)}{g'(x)}$.

# ΟΛΟΚΛΗΡΩΤΙΚΟΣ ΛΟΓΙΣΜΟΣ

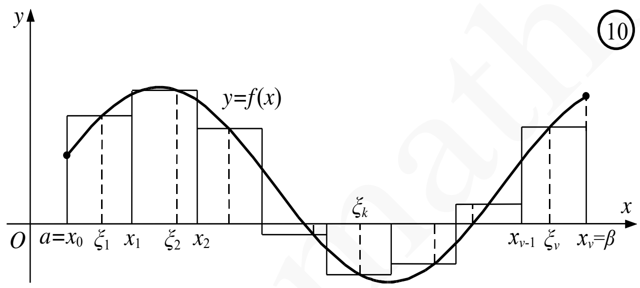
**1. Έστω *f* μια ορισμένη συνάρτηση σε ένα διάστημα Δ. Τι ονομάζεται αρχική συνάρτηση ή παράγουσα της f στο Δ.**

Έστω $f$ μια συνάρτηση ορισμένη σε ένα διάστημα *Δ*. **Αρχική συνάρτηση** ή **παράγουσα της *f* στο *Δ*[1]** ονομάζεται κάθε συνάρτηση *F* που είναι παραγωγίσιμη στο *Δ* και ισχύει

$F'(x) = f(x)$, για κάθε $x \in \Delta$.

**2. Πως ορίζεται το ορισμένο ολοκλήρωμα;**

Έστω μια συνάρτηση f σ υ ν ε χ ή ς στο $[\alpha, \beta]$. Με τα σημεία $\alpha = x_0 < x_1 < x_2 < ... < x_\nu = \beta$ χωρίζουμε το διάστημα $[\alpha, \beta]$ σε ν ισομήκη υποδιαστήματα μήκους $\Delta x = \dfrac{\beta - \alpha}{\nu}$.




Στη συνέχεια επιλέγουμε **αυθαίρετα** ένα $\xi_\kappa \in [x_{\kappa-1}, x_\kappa]$, για κάθε $\kappa \in \{1, 2, ..., \nu\}$, και σχηματίζουμε το άθροισμα

$$S_\nu = f(\xi_1)\Delta x + f(\xi_2)\Delta x + \cdots + f(\xi_\kappa)\Delta x + \cdots + f(\xi_\nu)\Delta x$$

το οποίο συμβολίζεται, σύντομα, ως εξής:

$$S_\nu = \sum_{\kappa=1}^{\nu} f(\xi_\kappa)\Delta x \ ^{(2)}.$$

Αποδεικνύεται ότι,

"Το όριο του αθροίσματος $S_\nu$, δηλαδή το $\lim\limits_{\nu\to\infty}\left(\sum\limits_{\kappa=1}^{\nu} f(\xi_\kappa)\Delta x\right)$ (3) υπάρχει στο $\mathbb{R}$ και είναι ανεξάρτητο από την επιλογή των ενδιάμεσων σημείων $\xi_\kappa$".

Το παραπάνω όριο (3) ονομάζεται **ορισμένο ολοκλήρωμα** της συνεχούς συνάρτησης *f* από το α στο β, συμβολίζεται με $\int_\alpha^\beta f(x)dx$ και διαβάζεται "ολοκλήρωμα της f από το α στο β". Δηλαδή,

$$\boxed{\int_\beta^\alpha f(x)dx = \lim_{\nu\to\infty}\left(\sum_{\kappa=1}^{\nu} f(\xi_\kappa)\Delta x\right)}$$

(1) Αποδεικνύεται ότι κάθε συνεχής συνάρτηση σε διάστημα Δ έχει παράγουσα στο διάστημα αυτό.

(2) Το άθροισμα αυτό ονομάζεται ένα άθροισμα RIEMANN

**3. Να αποδείξετε ότι: Έστω *f* μια συνάρτηση ορισμένη σε ένα διάστημα Δ. Αν η F είναι μια παράγουσα της f στο Δ, τότε**

- **Όλες οι συναρτήσεις της μορφής G(x)=F(x)+c, c ∈ $\mathbb{R}$, είναι παράγουσες της f στο Δ και**
- **Κάθε άλλη παράγουσα G της f στο Δ παίρνει τη μορφή G(x)=F(x)+c, c ∈ $\mathbb{R}$**

***ΑΠΟΔΕΙΞΗ***

• Κάθε συνάρτηση της μορφής $G(x)=F(x)+c$, όπου $x\in\Re$ ,είναι μια παράγουσα της *f* στο *Δ*, αφού

$$G'(x)=(F(x)+c)'=F'(x)=f(x),\ \text{για κάθε}\ x\in\Delta.$$

• Έστω *G* είναι μια άλλη παράγουσα της $f$ στο *Δ*. Τότε για κάθε $x\in\Delta$ ισχύουν $F'(x)=f(x)$ και $G'(x)=f(x)$, οπότε $G'(x)=F'(x)$, για κάθε $x\in\Delta$.

Άρα, σύμφωνα με το πόρισμα της § 2.6, υπάρχει σταθερά *c* τέτοια, ώστε

$$G(x)=F(x)+c,\ \text{για κάθε}\ x\in\Delta.$$

**4. Να διατυπώσετε το θεώρημα ολοκλήρωτικού λογισμού και να το αποδείξετε.**

Έστω $f$ μια συνεχής συνάρτηση σ’ ένα διάστημα $[\alpha,\beta]$. Αν G είναι μια παράγουσα της $f$ στο $[\alpha,\beta]$, τότε $\int_\alpha^\beta f(t)dt=G(\beta)-G(\alpha)$

***ΑΠΟΔΕΙΞΗ***

Σύμφωνα με το προηγούμενο θεώρημα, η συνάρτηση $F(x)=\int_\alpha^x f(t)dt$ είναι μια παράγουσα της $f$ στο $[\alpha,\beta]$. Επειδή και η *G* είναι μια παράγουσα της $f$ στο $[\alpha,\beta]$ , θα υπάρχει $c\in$ R τέτοιο, ώστε

$$G(x)=F(x)+c. \qquad (1)$$

Από την (1), για $x=\alpha$, έχουμε $G(\alpha)=F(\alpha)+c=\int_\alpha^\alpha f(t)dt+c=c$, οπότε $c=G(\alpha)$

Επομένως,

$$G(x)=F(x)+G(\alpha),$$

οπότε, για $x=\beta$, έχουμε

$$G(\beta)=F(\beta)+G(\alpha)=\int_\alpha^\beta f(t)dt+G(\alpha)$$

και άρα

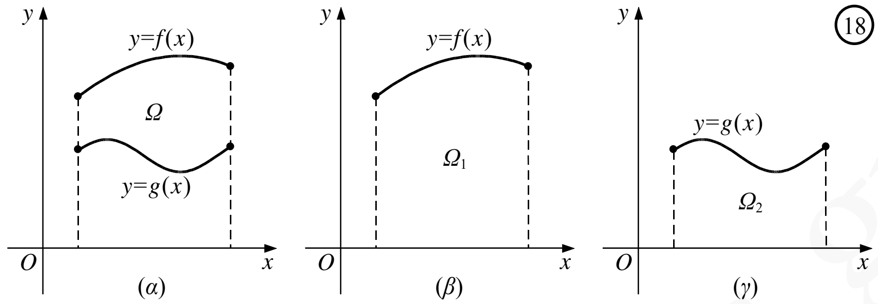
$$\int_\alpha^\beta f(t)dt=G(\beta)-G(\alpha).$$

## 5. Εμβαδόν χωρίου που ορίζεται από δύο θετικές συναρτήσεις:

Έστω, τώρα, δυο συναρτήσεις f και g, συνεχείς στο διάστημα $[\alpha,\beta]$ με $f(x)\geq g(x)\geq 0$ για κάθε $x\in[\alpha,\beta]$ και Ω το χωρίο που περικλείεται από τις γραφικές παραστάσεις των $f,g$ και τις ευθείες $x=\alpha$ και $x=\beta$ (Σχ. 18).

Να αποδείξετε ότι $E(\Omega)=\int_\alpha^\beta (f(x)-g(x))dx$

***ΑΠΟΔΕΙΞΗ***




Παρατηρούμε ότι

$$\mathrm{E}(\Omega)=\mathrm{E}(\Omega_1)-\mathrm{E}(\Omega_2)=\int_\alpha^\beta f(x)dx-\int_\alpha^\beta g(x)dx=\int_\alpha^\beta (f(x)-g(x))dx\,.$$

Επομένως,

$$\boxed{E(\Omega)=\int_\alpha^\beta (f(x)-g(x))dx} \qquad (1)$$

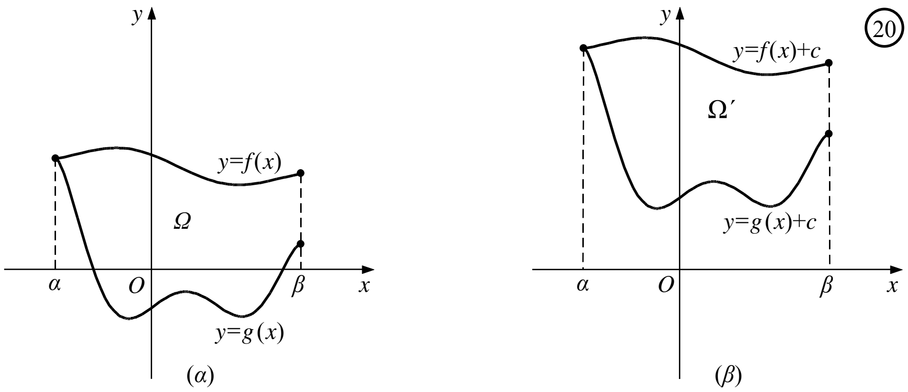
## 6. Εμβαδόν χωρίου που ορίζεται από δύο συναρτήσεις:

Έστω δυο συναρτήσεις f και g, συνεχείς στο διάστημα $[\alpha,\beta]$ με $f(x)\geq g(x)$ για κάθε $x\in[\alpha,\beta]$ και Ω το χωρίο που περικλείεται από τις γραφικές παραστάσεις των $f,g$ και τις ευθείες $x=\alpha$ και $x=\beta$.

Να αποδείξετε ότι $E(\Omega)=\int_\alpha^\beta (f(x)-g(x))dx$

***ΑΠΟΔΕΙΞΗ***

Επειδή οι συναρτήσεις f,g είναι συνεχείς στο [α,β] θα υπάρχει αριθμός $c\in\mathbb{R}$ τέτοιος ώστε $f(x)+\mathrm{c}\geq g(x)+\mathrm{c}$, για κάθε $x\in[\alpha,\beta]$. Είναι φανερό ότι το χωρίο Ω (σχ.α) έχει το ίδιο εμβαδόν με το χωρίο Ω′ (σχ.β)



Επομένως σύμφωνα με το προηγούμενο θεώρημα έχουμε

$$\mathrm{E}(\Omega)=\mathrm{E}(\Omega')=\int_{\alpha}^{\beta}[(f(x)+c)-(g(x)+c)]dx=\int_{\alpha}^{\beta}(f(x)-g(x))dx.$$

Άρα,

$$\boxed{E(\Omega)=\int_{\alpha}^{\beta}(f(x)-g(x))dx}$$

## 7. Εμβαδόν χωρίου που ορίζεται από συνάρτηση g(x) $\leq$ 0,τον άξονα x’x και τις ευθείες x=α και x=β, με α < β

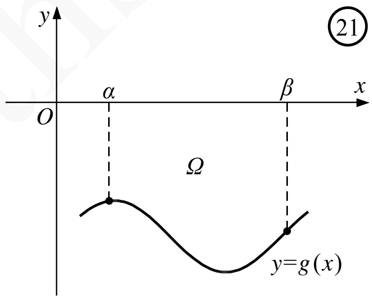
Έτσι αν για τη συνεχή συνάρτηση g ισχύει g(x) $\leq$ 0 για κάθε x$\in$[α,β], τότε $E(\Omega)=-\int_{\alpha}^{\beta}g(x)dx$

***ΑΠΟΔΕΙΞΗ***

Ο άξονας x’x είναι η γραφική παράσταση της f(x) = 0

Έχουμε λοιπόν

$$E(\Omega)=\int_{\alpha}^{\beta}(f(x)-g(x))dx=\int_{\alpha}^{\beta}[-g(x)]dx=$$
$$=-\int_{\alpha}^{\beta}g(x)dx.$$



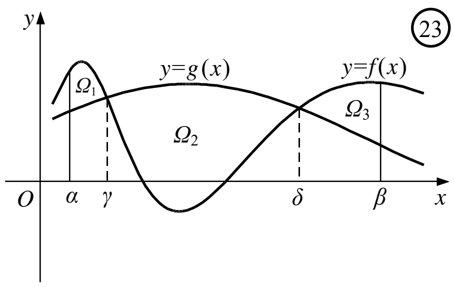

Επομένως, αν για μια συνάρτηση g ισχύει $g(x)\leq 0$ για κάθε $x\in[\alpha,\beta]$, τότε

$$\boxed{E(\Omega)=-\int_{\alpha}^{\beta}g(x)dx}$$

## 8. Εμβαδόν χωρίου που ορίζεται από δύο συναρτήσεις που δεν διατηρούν σταθερό πρόσημο.

Να αποδείξετε ότι το εμβαδόν του χωρίου Ω που περικλείεται από τις γραφικές παραστάσεις των συνεχών συναρτήσεων f,g στο διάστημα [α,β] όταν η διαφορά f(x) – g(x) δεν διατηρεί σταθερό πρόσημο στο [α,β] και τις ευθείες x=α και x=β είναι $E(\Omega)=\int_{\alpha}^{\beta}|f(x)-g(x)|dx$

Όταν η διαφορά $f(x)-g(x)$ δεν διατηρεί σταθερό πρόσημο στο $[\alpha,\beta]$, τότε το εμβαδόν του χωρίου Ω που περικλείεται από τις γραφικές παραστάσεις των $f,g$ και τις ευθείες $x=\alpha$ και $x=\beta$ είναι ίσο με το άθροισμα των εμβαδών των χωρίων $\Omega_1,\Omega_2$ και $\Omega_3$. Δηλαδή,



$$\begin{aligned}
\mathrm{E}(\Omega) &= \mathrm{E}(\Omega_1)+\mathrm{E}(\Omega_2)+\mathrm{E}(\Omega_3)\\
&= \int_{\alpha}^{\gamma}(f(x)-g(x))dx+\int_{\gamma}^{\delta}(g(x)-f(x))dx+\int_{\delta}^{\beta}(f(x)-g(x))dx\\
&= \int_{\alpha}^{\gamma}|f(x)-g(x)|\,dx+\int_{\gamma}^{\delta}|f(x)-g(x)|\,dx+\int_{\delta}^{\beta}|f(x)-g(x)|\,dx\\
&= \int_{\alpha}^{\beta}|f(x)-g(x)|\,dx
\end{aligned}$$

Επομένως,

$$\boxed{E(\Omega)=\int_{\alpha}^{\beta}|f(x)-g(x)|\,dx}$$

Βιβλιογραφία:

Μαθηματικά Θετικής και τεχνολογικής κατεύθυνσης Γ Λυκείου ΟΕΔΒ 2020

Ανδρεαδάκης Σ.-Κατσαργύρης Β.-Μέτης Σ.-Μπρουχούτας Κ.-Παπασταυρίδης Σ.-Πολύζος Γ.