ΑΛΓΕΒΡΑ Α΄ΛΥΚΕΙΟΥ : §2.3 Απόλυτη τιμή πραγματικών αριθμών

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1. Αν α < 0, να αποδείξετε ότι $|α|+\left|\frac{1}{α}\right| \geq 2$ (Υπόδειξη: αφού α<0, τότε |α|= -α)`

ΛΥΣΗ

1ος τρόπος:

Αφού α<0, τότε |α|= -α.

$|α|+\left|\frac{1}{α}\right| \geq 2$ <=> $-α - \frac{1}{α} \geq 2$ $\overset{\cdot α<0}{<=>}$ $-α^2 -1 \leq 2α$ <=> $0 \leq α^2+2α+1$ <=> $0 \leq (α+1)^2$, που ισχύει για οποιονδήποτε πραγματικό αριθμό άρα και για α<0. Η ισότητα ισχύει για α = -1 [$(α+1)^2 = 0$ <=> α+1 = 0 <=> α = -1].

2ος τρόπος: Για α<0

$|α|+\left|\frac{1}{α}\right| \geq 2$ <=> $|α|+\frac{1}{|α|} \geq 2$ $\overset{\cdot |α|>0}{<=>}$ $|α|^2 +1 \geq 2|α|$ <=> $|α|^2 -2|α| +1 \geq 0$| <=> , $(|α|-1)^2 \geq 0$| που ισχύει για οποιονδήποτε πραγματικό αριθμό άρα και για α<0. Η ισότητα ισχύει για α = -1 [$(|α|-1)^2 = 0$ <=> |α| - 1 = 0 <=> |α| = 1 <=> α = 1 , απορρίπτεται ή α= -1 δεκτή].

2. Αν α ,β∈IR–{0}, να αποδείξετε ότι: $\left|\frac{α}{β}\right|+\left|\frac{β}{α}\right| \geq 2$ (Υπόδειξη: $\left|\frac{α}{β}\right| = \frac{|α|}{|β|}$)

   Πότε ισχύει η ισότητα; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

   ΛΥΣΗ

   $\left|\frac{α}{β}\right|+\left|\frac{β}{α}\right| \geq 2$ <=> $\frac{|α|}{|β|}+\frac{|β|}{|α|} \geq 2$ $\overset{\cdot |α||β|>0}{<=>}$ $|α|^2 + |β|^2 \geq 2|α||β|$ <=> $|α|^2-2|α||β|+ |β|^2 \geq 0$ <=> $(|α| - |β|)^2 \geq 0$, που ισχύει για οποιονδήποτε πραγματικό αριθμό άρα και για α ,β∈IR–{0}. Η ισότητα ισχύει όταν $(|α| - |β|)^2 = 0$ <=> |α| - |β| = 0 <=> |α| = |β| <=> α = β ή α = -β.

3. Για x>4, να δείξετε ότι η παράσταση Α = $\frac{|x-3|}{3-x} - \frac{|x-2|}{x-2}$ έχει σταθερή τιμή (ανεξάρτητη του x) την οποία και να προσδιορίσετε. (Υπόδειξη: χ>4>3>2)

ΛΥΣΗ

Αφού x>4 , τότε x >3 και x>2 <=> x-3>0 και x-2>0. Τότε παίρνουμε: |x-3| = x-3 και |x-2| = x-2 και η παράσταση Α = $\frac{x-3}{3-x} - \frac{x-2}{x-2}$ = -1 -1 = - 2. Παρατηρούμε ότι η παράσταση Α έχει σταθερή τιμή -2.

4. Αν για τον x ισχύει ότι $x \geq 3$ να αποδείξετε ότι: $\dfrac{9x^2-49}{|3x-9|+2} = 3x+7$. (Υπόδειξη: $x \geq 3 \iff 3x \geq 9$)

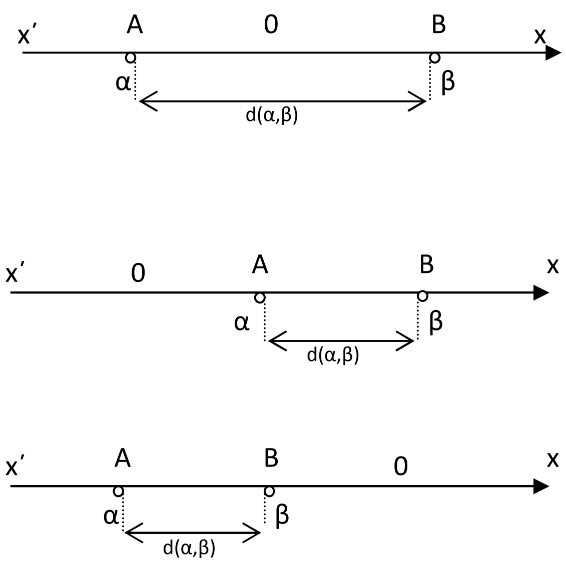
ΛΥΣΗ

$x \geq 3 \overset{\cdot 3>0}{\iff} 3x \geq 9 \iff 3x - 9 \geq 0$.

Έχουμε $\dfrac{9x^2-49}{|3x-9|+2} = \dfrac{9x^2-49}{3x-9+2} = \dfrac{(3x)^2-7^2}{3x-7} = \dfrac{(3x+7)(3x-7)}{3x-7}$ = 3x+7, αποδείχτηκε.

ΘΕΩΡΙΑ

1. Απόσταση δύο αριθμών



Έστω α και β δύο αριθμοί οι οποίοι παριστάνονται πάνω στον άξονα x' x με τα σημεία A και B αντιστοίχως.

Ονομάζουμε απόσταση των αριθμών α και β ή απόσταση του αριθμού α από τον αριθμό β, την απόλυτη τιμή της διαφοράς τους. Συμβολίζουμε με d(α,β). Ισχύει ότι d(α,β) $\geq$ 0

Δηλαδή, **(AB)= d(α , β) = |α - β|.**

Αφού |α-β| = |β-α|, τότε ισχύει

d(α,β) = d(β,α)

Αν β=0, τότε **d(α,0) = |α|**$\geq$ 0.

Παραδείγματα

d(1,5) = |1-5| = 4 , d(1,-5) = |1-(-5)| = 6,

d(x,5) = |x-5| = $\begin{cases} x-5 & ,\text{αν } x \geq 5 \\ -x+5 & ,\text{αν } x<5 \end{cases}$, **d(x,-5) = |x+5| =** $\begin{cases} x+5 & ,\text{αν } x \geq -5 \\ -x-5 & ,\text{αν } x<-5 \end{cases}$

2. Εξισώσεις με απόλυτες τιμές |□| = ○

Παραδείγματα:

1. Να λύσετε την εξίσωση |x-1| = 3

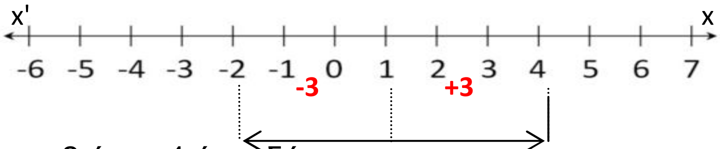
α) Αλγεβρική επίλυση:

(Μνημονικός κανόνας------> |□| = 3 <=> □ = 3 ή □ = -3)

|x-1| = 3 <=> x-1 = 3 ή x-1 = -3 ,<=> x = 4 ή x = -2

β) Γεωμετρική επίλυση

Είναι **|x-1| = 3 <=> d(x,1) = 3**. Η ισότητα μας λέει ότι **η απόσταση του x** (που ζητάμε) **από το 1 είναι 3**. Έτσι x είναι ο αριθμός του οποίου η απόσταση από το 1είναι ακριβώς 3. Όπως παρατηρούμε στον άξονα x'x οι αριθμοί είναι ο -2 και ο 4.



Άρα,
|x-**1**| = **3**<=> x = -2 ή x = 4 ή ισοδύναμα:
d(x,**1**) = **3** <=> x = -2 ή x = 4
(**1-3**) (**1+3**)

2. Να λύσετε την εξίσωση |x+1| = 3

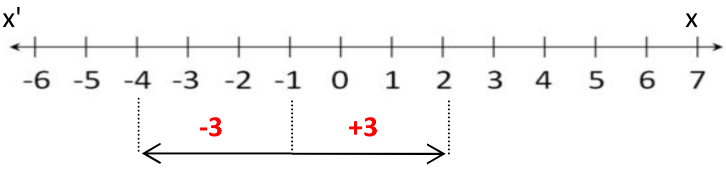
α) Αλγεβρική επίλυση:

(|□| = 3 <=> □ = 3 ή □ = -3)

|x+1| = 3 <=> x+1 = 3 ή x+1 = -3 ,<=> x = 2 ή x = - 4

β) Γεωμετρική επίλυση

Είναι **|x+1| = 3 <=> d(x,-1) = 3**. Η ισότητα μας λέει ότι **η απόσταση του x** (που ζητάμε) **από το -1 είναι 3**. Έτσι x είναι ο αριθμός του οποίου η απόσταση από το -1 είναι ακριβώς 3. Όπως παρατηρούμε στον άξονα x'x οι αριθμοί είναι ο -4 και ο 2.

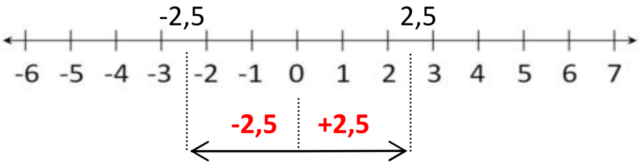


Άρα,
|x**+1**| = **3**<=> x = -4 ή x = 2 ή ισοδύναμα:
d(x,**-1**) = **3** <=> x = - 4 ή x = 2
(**-1-3**) (**-1+3**)

Για επίλυση Ασκήσεις Παραγράφου 2.

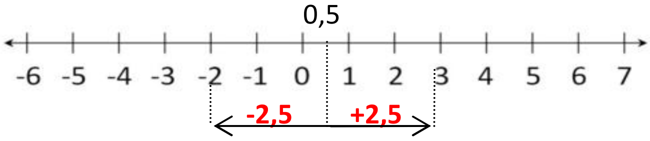
Να λύσετε τις εξισώσεις: α) | x | = 2,5 , β) | x - 0,5 | = 2,5, γ) | x + 0,5 | = 2,5 και δ) | x - 1 | = | x + 5 | αλγεβρικά και γεωμετρικά στο τετράδιό σας.

α) | x | = 2,5 <=> -2,5 < x < 2,5 <=> x ϵ (-2,5 , 2,5)
d(x, 0) = 2,5 <=> x ϵ (-2,5 , 2,5)



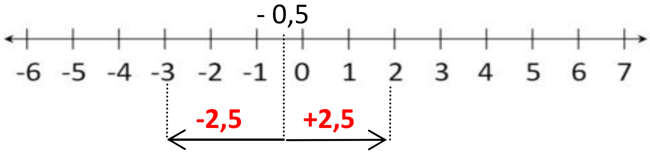
β) | x - 0,5 | = 2,5 <=> x- 0,5 = 2,5 ή x- 0,5 = - 2,5 <=> x = 3 ή x = -2

d(x, 0,5) = 2,5 <=> x = 3 ή x = -2

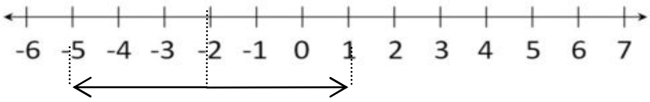


γ) | x + 0,5 | = 2,5 <=> x+ 0,5 = 2,5 ή x+ 0,5 = - 2,5 <=> x = 2 ή x = -3

d(x, -0,5) = 2,5 <=> x = 2 ή x = -3



δ) | x - 1 | = | x + 5 |<=> (x-1= x+5, αδύνατη) ή (x-1=-x - 5 <=> 2x=-4 <=>x = -2)
d(x, 1) = d(x, -5) <=> x = -2 (μέσο διαστήματος (1, -5))



3. Ανισώσεις με απόλυτες τιμές |□|<○

Παραδείγματα:

1. Να λύσετε την ανίσωση |x-1| < 3

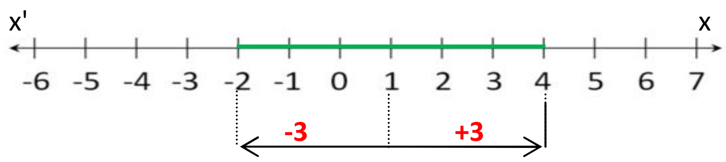
<u>α) Αλγεβρική επίλυση:</u>

(Μνημονικός κανόνας------> |□| < 3 <=> -3 < □ <3 <=> □ ϵ (-3,3))

|x-1| < 3 <=> -3 < x-1< 3 <=> -3+1< x < 3+1 <=> -2 < x < 4 <=> x ϵ (-2,4)

<u>β) Γεωμετρική επίλυση</u>

Έχουμε **|x-1| < 3 <=> d(x,1) < 3**. Η ανίσωση αυτή μας λέει **η απόσταση του x** (που ζητάμε) **από το 1 είναι μικρότερη του 3**. Έτσι x είναι ο αριθμός του οποίου η απόσταση από το 1 είναι μικρότερη του 3. Όπως παρατηρούμε στον άξονα x'x οι αριθμοί είναι ακριβώς όσοι βρίσκονται στο διάστημα (-2,4).



Άρα,
|x-**1**| < **3**<=> -2 < x < 4 <=> x ϵ (-2,4) ή ισοδύναμα:

d(x,**1**) < **3** <=> -2 < x < 4 <=> x ϵ (-2,4)
(**1-3**) (**1+3**)

2. Να λύσετε την ανίσωση |x+1| < 3

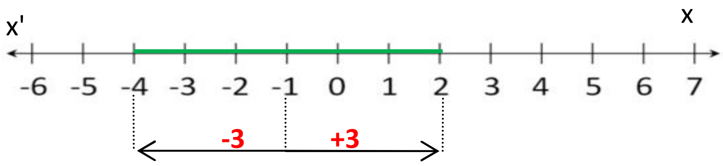
<u>α) Αλγεβρική επίλυση:</u>

(Μνημονικός κανόνας------> |□| < 3 <=> -3 < □ <3 <=> □ ϵ (-3,3))

|x+1| < 3 <=> -3 < x+1< 3 <=> -3-1< x < 3-1 <=> -4 < x < 2 <=> x ϵ (-4,2)

β) Γεωμετρική επίλυση

Έχουμε **$|x+1| < 3 \iff d(x,-1) < 3$**. Η ανίσωση αυτή μας λέει **η απόσταση του x** (που ζητάμε) **από το -1 είναι μικρότερη του 3**. Έτσι x είναι ο αριθμός του οποίου η απόσταση από το -1 είναι μικρότερη του 3. Όπως παρατηρούμε στον άξονα x'x οι αριθμοί είναι ακριβώς όσοι βρίσκονται στο διάστημα (-4,2).



Άρα,

$|x+1| < 3 \iff -4 < x < 2 \iff x \in (-4,2)$ ή ισοδύναμα:

$d(x,-1) < 3 \iff -4 < x < 2 \iff x \in (-4,2)$

$(-1-3)$ $(-1+3)$

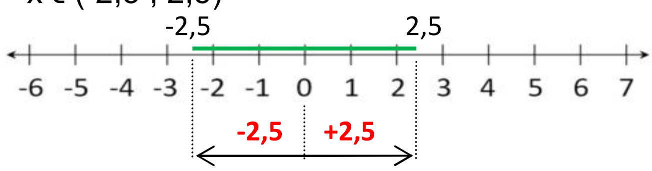
Σχόλιο! Προφανώς, αν έχουμε να λύσουμε την ανισοϊσότητα $|x-1| \leq 3$, τότε οι λύσεις της θα βρίσκονται στο κλειστό διάστημα [-2,4]. Ομοίως για την ανίσωση $|x+1| \leq 3$ οι λύσεις της θα βρίσκονται στο κλειστό διάστημα [-4,2].

Για επίλυση Ασκήσεις Παραγράφου 3.

Να λύσετε τις ανισώσεις: α) $|x| < 2{,}5$, β) $|x - 0{,}5| \leq 2{,}5$, γ) $|x + 0{,}5| < 2{,}5$ και αλγεβρικά και γεωμετρικά στο τετράδιό σας.

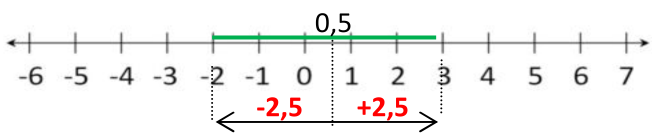
α) $|x| < 2{,}5 \iff -2{,}5 < x < 2{,}5 \iff x \in (-2{,}5 , 2{,}5)$

$d(x,0) < 2{,}5 \iff x \in (-2{,}5 , 2{,}5)$



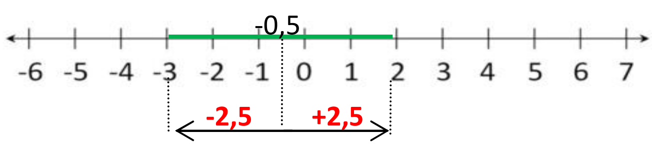
β) $|x - 0{,}5| \leq 2{,}5 \iff -2{,}5 \leq x - 0{,}5 \leq 2{,}5 \iff -2 \leq x \leq 3 \iff x \in [-2 , 3]$

$d(x, 0{,}5) \leq 2{,}5 \iff x \in [-2 , 3]$



γ) $|x + 0{,}5| < 2{,}5 \iff -2{,}5 < x+0{,}5 < 2{,}5 \iff -3 < x < 2 \iff x \in (-3 , 2)$

$d(x, 0{,}5) < 2{,}5 \iff x \in (-3 , 2)$



4. Ανισώσεις με απόλυτες τιμές |□|>○

3. Να λύσετε την ανίσωση |x-1| > 3

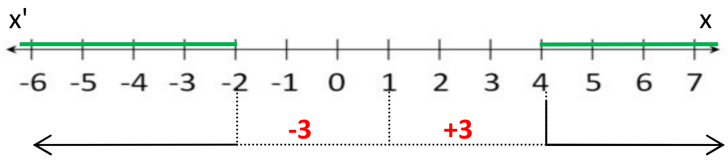
α) Αλγεβρική επίλυση:

(Μνημονικός κανόνας------> |□| > 3 <=> □ < - 3 ή □ > 3 <=> □ ϵ (-00 , -3) U (3, +00))

|x-1| > 3 <=> x-1< - 3 ή x -1 > 3 <=> x < -2 ή x > 4 <=> x ϵ (-00, -2) U (4, +00)

β) Γεωμετρική επίλυση

Έχουμε **|x-1| > 3 <=> d(x,1) > 3**. Η ανίσωση αυτή μας λέει **η απόσταση του x** (που ζητάμε) **από το 1 είναι μεγαλύτερη του 3**. Έτσι x είναι ο αριθμός του οποίου η απόσταση από το 1 είναι μεγαλύτερη του 3. Όπως παρατηρούμε στον άξονα x'x οι αριθμοί είναι ακριβώς όσοι βρίσκονται στο διάστημα (-00, -2) U (4, +00).



Άρα,
|x-**1**| > **3**<=> x < -2 ή x > 4 <=> x ϵ (-00, -2) U (4, +00) ή ισοδύναμα:

d(x,**1**) > **3** <=> x < -2 ή x > 4 <=> x ϵ (-00, -2) U (4, +00)
(**1-3**) (**1+3**)

4. Να λύσετε την ανίσωση **|x+1| > 3**

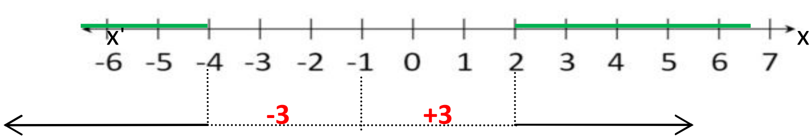
α) Αλγεβρική επίλυση:

(Μνημονικός κανόνας------> |□| > 3 <=> □ < - 3 ή □ > 3 <=> □ ϵ (-00 , -3) U (3, +00))

|x+1| > 3 <=> x+1< - 3 ή x +1 > 3 <=> x < -4 ή x > 2 <=> x ϵ (-00, -4) U (2, +00)

β) Γεωμετρική επίλυση

Έχουμε **|x+1| > 3 <=> d(x,1) > 3**. Η ανίσωση αυτή μας λέει **η απόσταση του x** (που ζητάμε) **από το -1 είναι μεγαλύτερη του 3**. Έτσι x είναι ο αριθμός του οποίου η απόσταση από το -1 είναι μεγαλύτερη του 3. Όπως παρατηρούμε στον άξονα x'x οι αριθμοί είναι ακριβώς όσοι βρίσκονται στο διάστημα (-00, -4) U (2, +00).



Άρα,
|x**+1**| > **3**<=> x < -4 ή x > 2 <=> x ϵ (-00, -4) U (2, +00) ή ισοδύναμα:

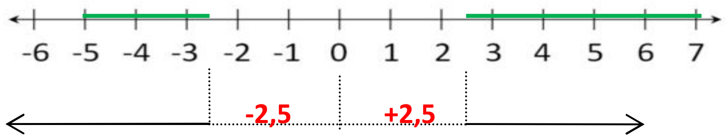
$d(x,-1) > 3 \Leftrightarrow x < -4$ ή $x > 4 \Leftrightarrow x \in (-00, -2) \cup (4, +00)$
(-1-3) (-1+3)

Σχόλιο! Προφανώς, αν έχουμε να λύσουμε την ανισοϊσότητα $|x-1| \geq 3$, τότε οι λύσεις της θα βρίσκονται στην ένωση ημίκλειστων διαστημάτων (00, -2] U [4, +00). Ομοίως για την ανίσωση $|x+1| \geq 3$ οι λύσεις της θα βρίσκονται στην ένωση ημίκλειστων διαστημάτων (00, -4] U [2, +00).

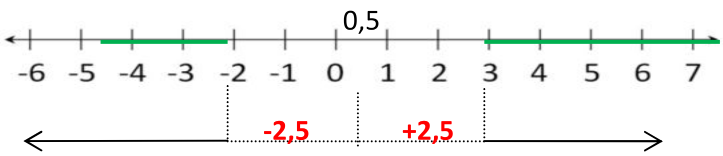
Για επίλυση Ασκήσεις Παραγράφου 4.

Να λύσετε τις ανισώσεις: α) $|x| > 2{,}5$, β) $|x - 0{,}5| \geq 2{,}5$, γ) $|x + 0{,}5| > 2{,}5$ και αλγεβρικά και γεωμετρικά στο τετράδιό σας.

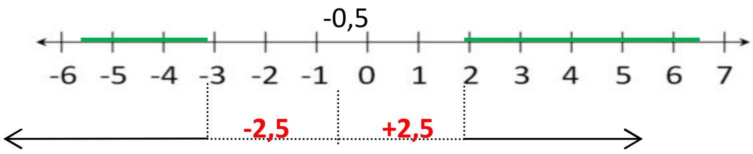
α) $|x| > 2{,}5 \Leftrightarrow x < -2{,}5$ ή $x > 2{,}5 \Leftrightarrow x \in (-00, -2{,}5) \cup (2{,}5, +00)$
$d(x,0) > 2{,}5 \Leftrightarrow x \in (-00, 2{,}5) \cup (2{,}5, +00)$



β) $|x - 0{,}5| \geq 2{,}5 \Leftrightarrow x-0{,}5 \leq -2{,}5$ ή $x-0{,}5 \geq 2{,}5 \Leftrightarrow x \leq -2$ ή $x \geq 3 \Leftrightarrow x \in (-00, -2] \cup [3, +00)$
$d(x, 0{,}5) \geq 2{,}5 \Leftrightarrow x \in (-00, -2] \cup [3, +00)$



γ) $|x + 0{,}5| > 2{,}5 \Leftrightarrow x+0{,}5 < -2{,}5$ ή $x+0{,}5 > 2{,}5 \Leftrightarrow x < -3$ ή $x > 2$



5. Γενικές ασκήσεις σε εξισώσεις και ανισώσεις με απόλυτες τιμές

5.1 Συμπλήρωσε τον πίνακα 1. με την απόσταση που εκφράζει τη σχέση, την επίλυση των σχέσεων και τις λύσεις τους. Μελέτησε πρώτα το παράδειγμα 1 και το σχόλιο 1 που δίνονται.

Παράδειγμα 1ο:

ΣΧΕΣΗ	ΑΠΟΣΤΑΣΗ	ΕΠΙΛΥΣΗ	ΛΥΣΕΙΣ
|x-1| = 3	d(x, 1) = 3	x= 1-3 ή x = 1+3 <=> **x= -2 ή χ= 4**	xϵ {-2,4}
|x-1|> 3	d(x, 1) > 3	x< 1-3 ή x > 1+3 <=> **x< -2 ή x > 4**	xϵ(-00,-2) U (4,+00)
|x-1|<3	d(x, 1) < 3	1-3< x< 1+3 <=> **-2 < x< 4**	xϵ(-2,4)

Σχόλιο 1.
i) Στις ανισοϊσότητες, οι απαντήσεις περιλαμβάνουν και το "=" και τα διαστήματα έχουν κλειστό(ά) άκρο(α)].

Πίνακας 1.

ΣΧΕΣΗ	ΑΠΟΣΤΑΣΗ	ΕΠΙΛΥΣΗ	ΛΥΣΕΙΣ
|x-2|= 0,1	d(x, 2) = 0,1	x= 2-0,1 ή x = 2+0,1<=>**x= 1,9 ή χ= 2,1**	xϵ {1,9 , 2,1}
|x-2|> 0,1	d(x, 2) > 0,1	x<2-0,1 ή x>2+0,1<=> **x<1,9 ή x>2,1**	xϵ(-00,1,9) U (2,1,+00)
|x-2|≥0,1	d(x,2) ≥ 0,1	x≤2-0,1 ή x≥2+0,1<=> **x≤1,9 ή x≥2,1**	xϵ(-00,1,9] U [2,1,+00)
|x-2|< 0,1	d(x, 2) < 0,1	2-0,1 < x < 2+0,1<=> **1,9<x<2,1**	xϵ(1,9,2,1)
|x-2|≤0,1	d(x, 2) ≤ 0,1	2-0,1 ≤ x ≤ 2+0,1<=> **1,9≤x≤2,1**	xϵ[1,9 , 2,1]
|x| = 0,1	d(x, 0) = 0,1	x= 0-0,1 ή x = 0+0,1<=>**x=-0,1 ή χ=0,1**	xϵ {-0,1 , 0,1}
|x| > 0,1	d(x, 0) > 0,1	x<0-0,1 ή x>0+0,1<=> **x<-0,1 ή x>0,1**	xϵ(-00,-0,1) U (0,1,+00)
|x|≥ 0,1	d(x, 0) ≥ 0,1	x≤0-0,1 ή x≥0+0,1<=> **x≤-0,1 ή x≥0,1**	xϵ(-00,-0,1] U [0,1,+00)
|x|< 0,1	d(x, 0) < 0,1	0-0,1 < x < 0+0,1<=> **-0,1<x<0,1**	xϵ(-0,1,0,1)
|x|≤ 0,1	d(x, 0) ≤ 0,1	0-0,1 ≤ x ≤ 0+0,1<=> **-0,1≤x≤0,1**	xϵ[-0,1,0,1]

(Μονάδες 30Χ1=30)

5.2 Συμπλήρωσε στον πίνακα 2. το μήκος, την ακτίνα και το κέντρο κάθε διαστήματος. Μελέτησε πρώτα το παράδειγμα 2 και το σχόλιο 2 που δίνονται.

Παράδειγμα 2ο:

ΔΙΑΣΤΗΜΑ	ΜΗΚΟΣ	ΚΕΝΤΡΟ (ΜΕΣΟ)	ΑΚΤΙΝΑ
[2,8]	8 - 2 = 6	(8 + 2) : 2 = 10:2 = 5	(8 - 2) : 2 = 6:2 = 3

Σχόλιο 2.
Ως μήκος, κέντρο και ακτίνα των διαστημάτων (α,β), [α,β), (α,β] , ορίζουμε το μήκος , κέντρο και ακτίνα του διαστήματος [α,β]

Πίνακας 2.

ΔΙΑΣΤΗΜΑ	ΜΗΚΟΣ	ΚΕΝΤΡΟ (ΜΕΣΟ)	ΑΚΤΙΝΑ
[-1, 5]	5-(-1)=6	[5+(-1)]: 2= 2	[5-(-1)]:2 = 3
(-4, 6]	6-(-4)=10	[6+(-4)]: 2= 1	[6-(-4)]:2 = 5
[-6, 0)	0-(-6)=6	[0+(-6)]: 2= -3	[0-(-6)]:2 = 5
(-2,5 , 3,5)	3,5-(-2,5) = 6	[3,5+(-2,5)]:2 = 0,5	[3,5-(-2,5)]:2 = 3

(Μονάδες 12Χ1 =12)

5. 3 Στις εξισώσεις ή ανισώσεις με απόλυτες χρησιμοποιούμε ουσιαστικά για την επίλυσή τους την έννοια του διαστήματος, του κέντρου και της ακτίνας.

Εφαρμογή

i) Ψάχνουμε για τους αριθμούς x οι οποίοι απέχουν από το 2 απόσταση ακριβώς 1 μονάδα.

Λύνουμε: **|x-2| = 1 <=> d (x,2) =1**.

Οι λύσεις είναι οι αριθμοί που βρίσκονται στα άκρα του διαστήματος [1,3] με κέντρο τον αριθμό 2 και ακτίνα 1. Δηλ. x=1 ή x = 3.

ii) Ψάχνουμε για τους αριθμούς x οι οποίοι απέχουν από το 2 απόσταση μικρότερη από 1 μονάδα.

Λύνουμε: **|x-2| < 1 <=> d (x,2) <1**.

Οι λύσεις είναι οι αριθμοί που βρίσκονται στο διάστημα (1,3) με κέντρο τον αριθμό 2 και ακτίνα 1. Δηλ. x ϵ (1,3)

iii) Ψάχνουμε για τους αριθμούς x οι οποίοι απέχουν από το 2 απόσταση μεγαλύτερη από 1 μονάδα.

Λύνουμε: **|x-2| > 1 <=> d (x,2) >1**.

Οι λύσεις είναι οι αριθμοί που βρίσκονται έξω από το διάστημα [1,3] με κέντρο τον αριθμό 2 και ακτίνα 1. Δηλ. x ϵ (-00, 1) U (3, +00).

5.4 Αντίστροφα: Με βάση τις λύσεις που δίνονται, συμπλήρωσε στον πίνακα 3. μία εξίσωση ή ανίσωση με απόλυτες τιμές που δίνουν αυτές ακριβώς τις λύσεις. Μελέτησε πρώτα το παράδειγμα 3 και το σχόλιο 3 που δίνονται.

Παράδειγμα 3ο:

i) Αν **x = - 5 x = 1**, η εξίσωση με απόλυτες τιμές που έχει αυτές ακριβώς τις λύσεις κατασκευάζεται ως εξής:

Διάστημα : [-5 , 1] ---> Κέντρο : (-5+1): 2 = -2 , Ακτίνα : (1-(-5)) : 2 = 3

Εξίσωση : |x - 2| = 3

ii) Αν **x ϵ [-5,1]** , η ανίσωση με απόλυτες τιμές που έχει αυτές ακριβώς τις λύσεις κατασκευάζεται ως εξής:

Διάστημα : [-5 , 1] ---> Κέντρο : (-5+1): 2 = -2 , Ακτίνα : (1-(-5)) : 2 = 3

Ανίσωση : |x - 2| ≤ 3

iii) Αν **x ϵ (-00 -5] U [1, +00)** , η ανίσωση με απόλυτες τιμές που έχει αυτές ακριβώς τις λύσεις κατασκευάζεται ως εξής:

Διάστημα : [-5 , 1] ---> Κέντρο : (-5+1): 2 = -2 , Ακτίνα : (1-(-5)) : 2 = 3

Ανίσωση : |x - 2| ≥ 3

Σχόλιο 3.
Όταν το διάστημα ή η ένωση διαστημάτων που περιέχουν τις λύσεις έχουν ανοιχτά άκρα, η ανισότητα που κατασκευάζουμε δεν περιέχει το "=".

Πίνακας 3.

ΛΥΣΕΙΣ	ΔΙΑΣΤΗΜΑ	ΚΕΝΤΡΟ	ΑΚΤΙΝΑ	ΕΞΙΣΩΣΗ 'Η ΑΝΙΣΩΣΗ
x= -2 ή x = 2	[-2,2]	0	2	|x|=2
xϵ(-2,2)	[-2,2]	0	2	|x| <2
xϵ[-2,2]	[-2,2]	0	2	x| ≤2
xϵ(-00,-2)U (2, +00)	[-2,2]	0	2	|x|>2
xϵ(-00,-2]U [2, +00)	[-2,2]	0	2	|x|≥2
x= -5 ή x = 1	[-5,1]	-2	3	|x-2|=3
xϵ (-5,1)	[-5,1]	-2	3	|x-2|<3
xϵ [-5,1]	[-5,1]	-2	3	|x-2|≤3
xϵ(-00,-5)U (1, +00)	[-5,1]	-2	3	|x-2|>3
xϵ(-00,-5]U [1, +00)	[-5,1]	-2	3	|x-2|≥3

(Μονάδες 40X1=40)

Πόσες μονάδες συγκέντρωσες;
Από τον Πίνακα 1 ....
Από τον Πίνακα 2 ....
Από τον Πίνακα 3 ....

5.5. ***α)*** *Να λύσετε τις παρακάτω ανισώσεις αλγεβρικά και γεωμετρικά:*

i) $|1-2x|<5$

ii) $|1-2x|\geq 1$

β) Να βρείτε τις ακέραιες τιμές του x για τις οποίες συναληθεύουν οι παραπάνω ανισώσεις.

[Υπόδειξη: Μπορείτε να ξεκινήσετε: Επειδή οι αντίθετοι αριθμοί έχουν την ίδια απόλυτη τιμή, τότε $|1-2x| = |2x-1|$. Επίσης, $|2x-1| = |2(x-\frac{1}{2})| = |2||x-\frac{1}{2}| = 2|x-\frac{1}{2}|$
...
ή να ξεκινήσετε με το συνήθη τρόπο |□|< ○ ή |□|>○ ...]

Προαιρετικά και για περισσότερη εξάσκηση αυτήν και την άλλη εβδομάδα : Από την

Τράπεζα Θεμάτων Άλγεβρας Α΄ Λυκείου (eclass) μπορείτε να ασχοληθείτε κατά βούληση με τα θέματα § 2.3 ΑΠΟΛΥΤΗ ΤΙΜΗ ΠΡΑΓΜΑΤΙΚΩΝ ΑΡΙΘΜΩΝ (κάποια είναι όμοια) (Μέτριας δυσκολίας: 2-504, 2-509, 2-991, 2-996, 2-1009, 2-1062, 2-1074, 2-1089, 2-1091, 2-1273, 2-3884, 2-4290, 2-4295, 2-4318, 2-7521, Αυξημένης δυσκολίας: 4-2287, 4-2301, 4-2302, 4-7791, 4-8453)

Στην επόμενη σελίδα ακολουθούν οδηγίες για το κριτήριο της Δευτέρας!

Ζ.Κουνή

Για τη Δευτέρα, θα γράψετε ένα σύντομο on line κριτήριο αξιολόγησης στην ενότητα 2.3 ΑΠΟΛΥΤΕΣ ΤΙΜΕΣ.

Θα κάνετε επανάληψη:
1. Από το βιβλίο σελ. από 61μέχρι 68 (θεωρία και ασκήσεις)
2. Το παρόν Φύλλο Εργασίας σελ. από 1 έως 13 (θεωρία και ασκήσεις).

Για τις ασκήσεις 1-5 των σελ. 67,68 του σχ. βιβλίου παραθέτω λύση ή υποδείξεις για επίλυση:

<u>άσκηση 1 σελ. 67</u>
Θα αποδείξουμε ότι: $|α-β| \le |α-γ|+|γ-β|$
Λύση
Είναι: $|α-β| = |α - γ + γ + β|$
Με τη βοήθεια της τριγωνικής ανισότητας : $|α \pm β| \le |α|+|β|$
(Γενικότερα: $|\$ \pm @| \le |\$| + |@|$) , παίρνουμε : $|α - γ + γ + β| \le |α - γ| + |γ + β|$

<u>άσκηση 2 σελ. 67</u>
Αν α > β, να αποδείξετε ότι
i) $α = \frac{α+β+|α-β|}{2}$ και ii) $β = \frac{α+β-|α-β|}{2}$
Υπόδειξη για i) και ii): Αφού α > β , τότε α - β > 0. Άρα |α-β| = α-β ....

<u>άσκηση 3 σελ. 67</u>
Τι σημαίνει για τους αριθμούς x και y:
i) Η ισότητα |x| + |y| = 0 , ii) Η ανισότητα |x| +|y| >0

Λύση
i) Επειδή $|x| \ge 0$ (Η "=" μόνο όταν x = 0) και $|y| \ge 0$ (Η "=" μόνο όταν y = 0), τότε |x| + |y| = 0 <=> |x| + |y| = 0 <=> x=y=0
ii) Σύμφωνα με την προηγούμενη άσκηση, |x| +|y| >0 <=> $|x| \neq 0$ και $|y| |\neq 0$ <=> $x \neq 0$ και $y \neq 0$.

<u>άσκηση 4 σελ. 68</u>

Έστω 0<α<β. i) Να διατάξετε από τον μικρότερο στο μεγαλύτερο τους αριθμούς 1, α/β και β/α. ii) Να δείξετε στον πραγματικό άξονα ότι ο αριθμός α/β βρίσκεται πλησιέστερα στο 1 από ό,τι ο αριθμός β/α.

Λύση

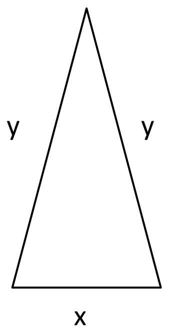
i) : Αφού 0<α<β , τότε $\frac{α}{β}<1$ (διαιρούμε με τον θετικό β τα μέλη της ανίσωσης α<β) και $1<\frac{β}{α}$ <=> $\frac{β}{α}>1$ (διαιρούμε με τον θετικό α τα μέλη της ανίσωσης α<β). Οπότε προκύπτει ότι: $\frac{α}{β}<1<\frac{β}{α}$ (1)

ii) Η έκφραση "βρίσκεται πλησιέστερα στο 1" σχετίζεται με την απόσταση των αριθμών από τον αριθμό 1. Συνεπώς, αρκεί να δείξουμε ότι: d(α/β , 1) < d (β/α , 1) <=> $|1-\frac{\alpha}{\beta}|<|1-\frac{\beta}{\alpha}| \overset{(1)}{\mathbf{<=>}} 1-\frac{\alpha}{\beta}<1-\frac{\beta}{\alpha}$.

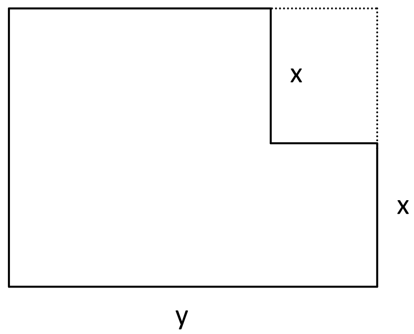
$1-\frac{\alpha}{\beta}<1-\frac{\beta}{\alpha} \overset{\cdot\alpha\beta>0}{\mathbf{<=>}}$ ... <=> $(\alpha-\beta)^2>0$, που ισχύει αφού $\alpha \neq \beta$.

<u>άσκηση 5 σελ. 68</u>

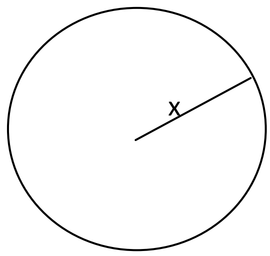
Αν $|x-1|<0{,}1$ και $|y-4|<0{,}2$, να εκτιμήσετε την τιμή της περιμέτρου των παρακάτω σχημάτων:



Σχήμα 1.



Σχήμα 2.



Σχήμα 3.

Υπόδειξη:
$|x-1|<0{,}1$ <=> ...<=> $1{,}9<x<2{,}1$ (1)
$|y-4|<0{,}2$ <=> ... <=> $3{,}8<y<4{,}2$ (2)

Περίμετρος Σχήματος1 $P_1 = x+2y$. Από τις σχέσεις (1) και (2) ...
Περίμετρος Σχήματος2 $P_2 = 4x+2y$. Από τις σχέσεις (1) και (2) ...
Περίμετρος Σχήματος3 $P_2 = 2\pi x$ ($\pi \approx 3{,}14$). Από την σχέση (1) ...

Καλή επανάληψη!