3.3 ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ $2^{ΟΥ}$ ΒΑΘΜΟΥ

Σχολικό βιβλίο σελ. 88-96

ΟΡΙΣΜΟΣ: Η ισότητα που έχει ή μπορεί να πάρει τη μορφή $αx^2+βx+γ = 0$, $α\neq0$, λέγεται εξίσωση δεύτερου βαθμού (ως προς x). Τα γράμματα α, β και γ κατά σύμβαση δηλώνουν τους οποιουσδήποτε συντελεστές της εξίσωσης.

Όταν α, β , γ ≠0, το πολυώνυμο $αx^2+βx+γ$, $α\neq0$ είναι τριώνυμο του x και η εξίσωση $αx^2+βx+γ = 0$ λέγεται αλλιώς και τριωνυμική.

Α΄ ΜΕΡΟΣ

ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ $2^{ΟΥ}$ ΒΑΘΜΟΥ ΠΟΥ ΕΧΟΥΝ ΤΗ ΜΟΡΦΗ $αx^2+βx+γ = 0$, $α\neq0$

1. Παραδείγματα εξισώσεων $αx^2+βx+γ= 0$, $α\neq0$, πλήρους και ελλιπούς μορφής

ΕΞΙΣΩΣΗ	ΣΥΝΤΕΛΕΣΤΗΣ ΤΟΥ x^2	ΣΥΝΤΕΛΕΣΤΗΣ ΤΟΥ x	ΣΤΑΘΕΡΟΣ ΟΡΟΣ
$3x^2-2x - 5 = 0$ (πλήρης μορφή-τριωνυμική)	$α = 3$	$β = - 2$	$γ = - 5$
$3x^2-2x = 0$ (ελλιπής μορφή-διωνυμική)	$α = 3$	$β = - 2$	$γ = 0$
$3x^2 - 5 =0$ (ελλιπής μορφή-διωνυμική)	$α = 3$	$β = 0$	$γ = - 5$
$αx^2-(α+1)x -3α=0$ (πλήρης μορφή-τριωνυμική)	$α΄= α$	$β΄ = - (α+1)$	$γ΄ = - 3α$
$(λ-1)\, x^2- 4λx +(λ^2-9) = 0$ (πλήρης μορφή-τριωνυμική)	$α = λ -1$	$β = -4λ$	$γ = λ^2-9$

2. Επίλυση εξίσωσης $αx^2+βx+γ= 0$, $α\neq0$

Η επίλυση της εξίσωσης **$αx^2+βx+γ= 0$, $α\neq0$ θα δώσει τις λύσεις της που λέγονται αλλιώς ρίζες της εξίσωσης ή ρίζες του τριωνύμου $αx^2+βx+γ$, $α\neq0$, όταν η εξίσωση είναι στην πλήρη μορφή.**

Η επίλυση γίνεται με τη μέθοδο συμπλήρωσης τετραγώνου [$α^2+2αβ+β^2=(α + β)^2$] και μέσω ισοδύναμων εξισώσεων :

$\alpha x^2+\beta x+\gamma=0$ (1) $\Leftrightarrow$	(Διαιρούμε με α , αφού **α≠0)**
$x^2+\frac{\beta}{\alpha}x+\frac{\gamma}{\alpha}=\frac{0}{\alpha}$ $\Leftrightarrow$	(Μεταφέρουμε τον όρο $\frac{\gamma}{\alpha}$ στο β΄ μέλος)
$x^2+\frac{\beta}{\alpha}x=-\frac{\gamma}{\alpha}$ $\Leftrightarrow$	Μετασχηματίζουμε τον όρο $\frac{\beta}{\alpha}x$ σε $2\frac{\beta}{2\alpha}x$
$x^2+2\frac{\beta}{2\alpha}x=-\frac{\gamma}{\alpha}$ $\Leftrightarrow$	Προσθέτουμε και στα δύο μέλη της εξίσωσης τον όρο $\left(\frac{\beta}{2\alpha}\right)^2$, ώστε να συμπληρώσουμε τετράγωνο στο α΄ μέλος.
$x^2+2\frac{\beta}{2\alpha}x+\left(\frac{\beta}{2\alpha}\right)^2=\left(\frac{\beta}{2\alpha}\right)^2-\frac{\gamma}{\alpha}$ $\Leftrightarrow$	Χρησιμοποιούμε την ταυτότητα $\alpha^2+2\alpha\beta+\beta^2=(\alpha+\beta)^2$ για να μετατρέψουμε το α΄ μέλος σε τετράγωνο, με $\alpha \to x$ και $\beta \to \frac{\beta}{2\alpha}$. Στο β΄ μέλος κάνουμε τις πράξεις.
$\left(x+\frac{\beta}{2\alpha}\right)^2=\frac{\beta^2}{4\alpha^2}-\frac{\gamma}{\alpha}$ $\Leftrightarrow$ $\left(x+\frac{\beta}{2\alpha}\right)^2=\frac{\beta^2-4\alpha\gamma}{4\alpha^2}$ $\Leftrightarrow$	Θέτουμε **$\Delta=\beta^2-4\alpha\gamma$**
$\left(\mathbf{x}+\frac{\boldsymbol{\beta}}{2\boldsymbol{\alpha}}\right)^2=\frac{\boldsymbol{\Delta}}{4\boldsymbol{\alpha}^2}$ (2)	

- **Αν Δ > 0**, αποτετραγωνίζουμε με ρίζα την εξίσωση (2) και με πράξεις παίρνουμε ισοδύναμες εξισώσεις:

$$\left(x+\frac{\beta}{2\alpha}\right)^2=\frac{\Delta}{4\alpha^2} \Leftrightarrow \sqrt{\left(x+\frac{\beta}{2\alpha}\right)^2}=\sqrt{\frac{\Delta}{4\alpha^2}} \Leftrightarrow$$

$$\sqrt{\left(x+\frac{\beta}{2\alpha}\right)^2}=\frac{\sqrt{\Delta}}{\sqrt{4\alpha^2}} \Leftrightarrow \left|x+\frac{\beta}{2\alpha}\right|=\frac{\sqrt{\Delta}}{|2\alpha|} \Leftrightarrow$$

$$\left|x+\frac{\beta}{2\alpha}\right|=\left|\frac{\sqrt{\Delta}}{2\alpha}\right| \quad (\text{ αφού } \sqrt{\Delta}>0, \text{ τότε } |\sqrt{\Delta}|=\sqrt{\Delta}\ ) \Leftrightarrow$$

$$x+\frac{\beta}{2\alpha}=\frac{\sqrt{\Delta}}{2\alpha} \text{ ή } x+\frac{\beta}{2\alpha}=-\frac{\sqrt{\Delta}}{2\alpha} \Leftrightarrow x=-\frac{\beta}{2\alpha}+\frac{\sqrt{\Delta}}{2\alpha} \text{ ή } x=-\frac{\beta}{2\alpha}-\frac{\sqrt{\Delta}}{2\alpha} \Leftrightarrow$$

$$x=\frac{-\beta+\sqrt{\Delta}}{2\alpha} \text{ ή } x=\frac{-\beta-\sqrt{\Delta}}{2\alpha}$$

Στην περίπτωση αυτή λέμε ότι η εξίσωση (2), άρα και η ισοδύναμή της (1) έχει δύο λύσεις (ή **δύο ρίζες**) **άνισες**, τις

$x_1 = \frac{-\beta + \sqrt{\Delta}}{2\alpha}$ και $x_2 = \frac{-\beta - \sqrt{\Delta}}{2\alpha}$. Για συντομία γράφουμε: $x_{1,2} = \frac{-\beta \pm \sqrt{\Delta}}{2\alpha}$.

και πρόκειται για τις ρίζες του τριωνύμου **$\alpha x^2+\beta x+\gamma$, $\alpha\neq0$, όταν η εξίσωση είναι στην πλήρη μορφή.**

- **Αν Δ = 0,** από την εξίσωση (2) παίρνουμε:

$$\left(x+\frac{\beta}{2\alpha}\right)^2 = 0 \Leftrightarrow \left(x+\frac{\beta}{2\alpha}\right)\left(x+\frac{\beta}{2\alpha}\right) = 0 \Leftrightarrow$$

$$x+\frac{\beta}{2\alpha} = 0 \text{ ή } x+\frac{\beta}{2\alpha} = 0 \Leftrightarrow x+\frac{\beta}{2\alpha} = 0 \text{ ή } x+\frac{\beta}{2\alpha} = 0 \Leftrightarrow x = -\frac{\beta}{2\alpha} \text{ ή } x = -\frac{\beta}{2\alpha}.$$

Στην περίπτωση αυτή λέμε ότι η εξίσωση (2), άρα και η ισοδύναμή της (1) έχει διπλή λύση (ή **διπλή ρίζα**) την $x_1 = x_2 = -\frac{\beta}{2\alpha}$ **ή σύντομα την** $x = -\frac{\beta}{2\alpha}$ **και πρόκειται για τη ρίζα του τριωνύμου $\alpha x^2+\beta x+\gamma$, $\alpha\neq0$, όταν η εξίσωση είναι στην πλήρη μορφή.**

- Αν Δ < 0, τότε η εξίσωση (2), άρα και η ισοδύναμή της (1) δεν έχει λύσεις πραγματικούς αριθμούς (ή **δεν έχει πραγματικές ρίζες**).

Συνοψίζοντας τα παραπάνω:

Η εξίσωση $\alpha x^2+\beta x+\gamma = 0$, $\alpha\neq0$, έχει $\Delta=\beta^2-4\alpha\gamma$ και αν

Δ>0, τότε έχει δύο πραγματικές ρίζες άνισες	$x_{1,2} = \frac{-\beta \pm \sqrt{\Delta}}{2\alpha}$.
Δ=0, τότε έχει μία διπλή πραγματική ρίζα	$x = -\frac{\beta}{2\alpha}$
Δ<0, τότε είναι αδύνατη στο R	**δεν έχει πραγματικές ρίζες**

3. Παραγοντοποίηση τριωνύμου $\alpha x^2+\beta x+\gamma$, $\alpha\neq0$ της εξίσωσης $\alpha x^2+\beta x+\gamma=0$, $\alpha\neq0$.

Αν το τριώνυμο $\alpha x^2+\beta x+\gamma$, $\alpha\neq0$ έχει πραγματικές ρίζες ($\Delta\geq0$), τότε με τη βοήθειά τους, μπορούμε να το γράψουμε σε μορφή γινομένου.

Έτσι, αν έχει δύο άνισες πραγματικές **ρίζες x_1, x_2** , το τριώνυμο $\alpha x^2+\beta x+\gamma$, γράφεται: **$\alpha(x-x_1)(x-x_2)$**. Το ίδιο ισχύει και για τα διώνυμα δεύτερου βαθμού $\alpha x^2+\beta x$ και $\alpha x^2+\gamma$ της εξίσωσης $\alpha x^2+\beta x+\gamma=0$, $\alpha\neq0$ ελλιπούς μορφής.

Αν έχει διπλή **ρίζα $x_1=x_2=\rho$**, το τριώνυμο $\alpha x^2+\beta x+\gamma$ γράφεται $\boldsymbol{\alpha(x-\rho)^2}$.

Παραδείγματα επίλυσης εξισώσεων δεύτερου βαθμού ελλιπούς ή πλήρους μορφής

α) Ελλιπείς μορφές

- $3x^2-2x = 0 \Leftrightarrow x(3x-2) = 0 \Leftrightarrow x = 0$ ή $3x-2 = 0 \Leftrightarrow x = 0$ ή $x = \frac{2}{3}$ (οι ρίζες)

  Παραγοντοποίηση του διωνύμου $3x^2-2x$

  1^ος^ τρόπος: $3x^2-2x = x(3x-2)$

  2^ος^ τρόπος: Αφού οι ρίζες του διωνύμου $3x^2-2x$ είναι 0 και $\frac{2}{3}$, τότε το διώνυμο $3x^2-2x$ με α=3 γράφεται (βλέπε 1.1): $3\left(x-\frac{2}{3}\right)(x-0) =$

  $(3x-2)x=x(3x-2)$

- $3x^2 -5 =0 \Leftrightarrow 3x^2 = 5 \Leftrightarrow x^2 = \frac{5}{3} \Leftrightarrow x =\sqrt{\frac{5}{3}}$ ή $x = -\sqrt{\frac{5}{3}}$

  Παραγοντοποίηση του διωνύμου $3x^2 -5$

  Αφού οι ρίζες του διωνύμου $3x^2 -5$ είναι $\sqrt{\frac{5}{3}}$ και $-\sqrt{\frac{5}{3}}$, τότε το διώνυμο $3x^2 -5$ με α=3 γράφεται (βλέπε 1.1): $3\left(x-\sqrt{\frac{5}{3}}\right)\left(x+\sqrt{\frac{5}{3}}\right)$

Πλήρεις μορφές

- $3x^2-2x - 5 = 0$

$$\left.\begin{array}{l}\alpha = 3\\ \beta =- 2\\ \gamma =- 5\end{array}\right\}$$

$\Delta= \beta^2-4\alpha\gamma = (-2)^2-4\cdot 3\cdot (-5) = 4+60=64>0$. Άρα η εξίσωση έχει δύο πραγματικές και άνισες ρίζες τις $\mathbf{x_1= \frac{-\beta + \sqrt{\Delta}}{2\alpha}} = \frac{2 + \sqrt{64}}{6} = \frac{5}{3}$ και $\mathbf{x_2 = \frac{-\beta - \sqrt{\Delta}}{2\alpha}} = \frac{2 - \sqrt{64}}{6} = -1$. Συνεπώς οι ρίζες της εξίσωσης είναι οι αριθμοί -1 και $\frac{5}{3}$.

Παραγοντοποίηση του τριωνύμου $3x^2-2x-5$

Αφού οι ρίζες του τριωνύμου $3x^2-2x-5$ είναι -1 και $\frac{5}{3}$, τότε με α=3 το τριώνυμο γράφεται (βλέπε 1.1): $3\left(x-\frac{5}{3}\right)(x+1) = (3x-5)(x+1)$

- $x^2-2x+1=0$

$\left.\begin{array}{l} \alpha = 1 \\ \beta = -2 \\ \gamma = 1 \end{array}\right\}$ $\Delta = \beta^2-4\alpha\gamma = (-2)^2-4\cdot 1\cdot 1 = 4-4 = 0$. Άρα η εξίσωση έχει διπλή πραγματική ρίζα την $\mathbf{x_1 = \frac{-\beta}{2\alpha}} = \frac{2}{2} = 1$. Συνεπώς η ρίζα της εξίσωσης είναι ο αριθμός 1.

Παραγοντοποίηση του τριωνύμου x^2-2x+1

Αφού το τριώνυμο x^2-2x+1 έχει διπλή ρίζα την 1, τότε το τριώνυμο με α=1 γράφεται (βλέπε 1.1): $(x-1)^2$

ΣΧΟΛΙΟ: Μπορούμε να λύσουμε την εξίσωση $x^2-2x+1=0$ και πιο σύντομα, γιατί όταν η Δ=0, το πρώτο μέλος της εξίσωσης γράφεται ως τέλειο τετράγωνο: $x^2-2x+1=(x-1)^2$. Οπότε $x^2-2x+1=0 \Leftrightarrow (x-1)^2=0 \Leftrightarrow x-1=0 \Leftrightarrow x=1$

4. Παραμετρικές εξισώσεις δεύτερου βαθμού

Παράδειγμα προσδιορισμού παραμέτρου για ύπαρξη ριζών εξίσωσης δεύτερου βαθμού: Για ποιες τιμές του λ η εξίσωση $x^2 - 2(\lambda-1)x + \lambda^2-3 = 0$ (1) έχει δύο ρίζες άνισες, μία διπλή, καμία ρίζα και ρίζα το 1;

Για λ=1, πόσες και ποιες ρίζες έχει η εξίσωση (1)

<u>Απάντηση:</u>

Η εξίσωση $x^2 - 2(\lambda-1)x + \lambda^2-3 = 0$ είναι της μορφής $\alpha x^2+\beta x+\gamma = 0$, $\alpha\neq 0$ με α=1,

$\beta = -2(\lambda-12)$ και $\gamma = \lambda^2-3$.

Έχει διακρίνουσα $\Delta = [-2(\lambda-1)]^2 - 4\bullet 1\bullet(\lambda^2-3) = 4(\lambda-1)^2 - 4\bullet(\lambda^2-3) = 4(\lambda^2-2\lambda+1)$

$-4\bullet(\lambda^2-3) = 4\lambda^2-8\lambda+4-4\lambda^2+12 = -8\lambda+16$

α) Για να έχει η εξίσωση (1) δύο διαφορετικές πραγματικές ρίζες, πρέπει

$\mathbf{\Delta>0} \Leftrightarrow -8\lambda+16>0 \Leftrightarrow -8\lambda > -16 \Leftrightarrow \lambda < \frac{-16}{-8} \Leftrightarrow \mathbf{\lambda<2}$

β) Για να έχει η εξίσωση (1) δύο ίσες πραγματικές ρίζες, πρέπει Δ=0 $\Leftrightarrow$ $-8λ +16 = 0 \Leftrightarrow$ **λ =2**

γ) Για να μην έχει πραγματικές ρίζες η εξίσωση (1), πρέπει Δ<0 $\Leftrightarrow -8λ +16 <0 \Leftrightarrow -8λ < -16 \Leftrightarrow λ>\frac{-16}{-8} \Leftrightarrow$ **λ>2.**

Συνοψίζοντας:

Η εξίσωση $x^2 – 2(λ-1) x + λ^2-3 = 0$ έχει $Δ=-8λ +16$.

Αν $Δ>0 \Leftrightarrow λ<2$, τότε έχει δύο διαφορετικές πραγματικές ρίζες.

Αν $Δ<0 \Leftrightarrow λ>2$, τότε δεν έχει πραγματικές ρίζες.

Αν $Δ=0 \Leftrightarrow λ=2$, τότε έχει διπλή πραγματική ρίζα.

δ) Για να έχει η εξίσωση (1) ρίζα τον αριθμό 0, πρέπει ο αριθμός να την επαληθεύει. Δηλαδή, $1^2 – 2 (λ-1)\cdot 1 + λ^2-3 = 0 \Leftrightarrow 1-2λ+2+λ^2-3=0 \Leftrightarrow λ^2 -2λ=0 \Leftrightarrow λ(λ-2)=0 \Leftrightarrow$ **λ = 0 ή λ=2**

Άρα, η εξίσωση (1) τον αριθμό 1 τον έχει ρίζα όταν **λ=0 ή λ=2**.

ε) Για λ = 1, η εξίσωση θα έχει δύο διαφορετικές ρίζες, σύμφωνα με το ερ. α) . Πράγματι για λ=1 η εξίσωση (1) γίνεται $x^2 – 2(1-1) x + 1^2-3 = 0 \Leftrightarrow x^2-2=0 \Leftrightarrow x^2=2 \Leftrightarrow x=\sqrt{2}$ **ή** $x=-\sqrt{2}$ **.**

5. Τύποι του Vieta

Στην περίπτωση που η εξίσωση $αx^2+βx+γ= 0$, $α\neq 0$, έχει πραγματικές άνισες ρίζες **(Δ>0)**, τότε το άθροισμα S των ριζών είναι :

$$S = x_1+x_2 = \frac{-β + \sqrt{Δ}}{2α} + \frac{-β - \sqrt{Δ}}{2α} = \frac{-2β}{2α} = -\frac{β}{α}$$

Και το γινόμενο P των ριζών είναι:

$$P = x_1 \cdot x_2 = \frac{-β + \sqrt{Δ}}{2α} \cdot \frac{-β - \sqrt{Δ}}{2α} = \frac{(-β)^2 - \sqrt{Δ}^2}{4α^2} = \frac{β^2 - Δ}{2α} = \frac{β^2 - (β^2 - 4αγ)}{4α^2} = \frac{4αγ}{4α^2} = \frac{γ}{α}$$

Παρόμοια αποδεικνύεται ότι αν η εξίσωση $αx^2+βx+γ= 0$, $α\neq 0$, έχει πραγματικές ίσες ρίζες **(Δ=0)**, τότε το άθροισμα S των ριζών είναι :

$$S = x_1+x_2 = \frac{-β}{2α} + \frac{-β}{2α} = \frac{-2β}{2α} = -\frac{β}{α}$$

Και το γινόμενο P των ριζών είναι:

$P = x_1 \cdot x_2 = \dfrac{-\beta}{2\alpha} \cdot \dfrac{-\beta}{2\alpha} = \dfrac{(-\beta)^2}{4\alpha^2} = \dfrac{\beta^2}{4\alpha^2} = \dfrac{4\alpha\gamma}{4\alpha^2} = \dfrac{\gamma}{\alpha}$, αφού $\Delta=0 \Leftrightarrow \beta^2-4\alpha\gamma = 0 \Leftrightarrow \beta^2 = 4\alpha\gamma$.

Συνοψίζοντας τα παραπάνω:

Η εξίσωση $\alpha x^2+\beta x+\gamma= 0$, $\alpha\neq0$, έχει $\Delta=\beta^2-4\alpha\gamma$ και αν $\Delta \geq 0$, τότε

$S = x_1+x_2 = -\dfrac{\beta}{\alpha}$ και $P = x_1 \cdot x_2 = \dfrac{\gamma}{\alpha}$. Αυτοί οι τύποι είναι γνωστοί ως τύποι Vieta.

Η εξίσωση $\alpha x^2+\beta x+\gamma= 0$, $\alpha\neq0$ με τη βοήθεια των τύπων του Vieta, μετασχηματίζεται ως εξής:

$\alpha x^2+\beta x+\gamma= 0 \Leftrightarrow$	(Διαιρούμε με α , αφού **$\alpha\neq0$)**
$x^2+\dfrac{\beta}{\alpha}x+\dfrac{\gamma}{\alpha}= 0 \Leftrightarrow$	**$S = -\dfrac{\beta}{\alpha}$ και $P = \dfrac{\gamma}{\alpha}$**
$x^2-Sx+P= 0 \Leftrightarrow$	$S = x_1+x_2$ και $P = x_1 \cdot x_2$
$x^2-(x_1+x_2)\,x+(x_1 \cdot x_2) = 0$	

Αφού η εξίσωση $\alpha x^2+\beta x+\gamma= 0$, $\alpha\neq0$ με τη βοήθεια των τύπων του Vieta, μετασχηματίζεται στην ισοδύναμη $x^2-Sx+P= 0$, τότε μπορούμε όταν γνωρίζουμε το άθροισμα και το γινόμενο των ριζών μιας εξίσωσης δεύτερου βαθμού, να συμπεράνουμε την ίδια την εξίσωση.

Παράδειγμα σχηματισμού εξίσωσης δεύτερου βαθμού, γνωρίζοντας το άθροισμα και το γινόμενο των ριζών της:

Βρείτε την εξίσωση δεύτερου βαθμού που οι ρίζες της έχουν άθροισμα -3 και γινόμενο 0,4.

Απάντηση:

Γνωρίζουμε ότι η εξίσωση δεύτερου βαθμού **$\alpha x^2+\beta x+\gamma= 0$, $\alpha\neq0$, γράφεται ισοδύναμα $x^2-Sx+P= 0$.** Οπότε αφού $S = -3$ και $P = 0,4$, τότε η ζητούμενη εξίσωση είναι: **$x^2+3x+0,4 = 0$**

ΣΧΟΛΙΟ: Η εξίσωση $x^2+3x+0,4 = 0$ είναι μία από τις άπειρες εξισώσεις δεύτερου βαθμού που οι ρίζες τους έχουν άθροισμα -3 και γινόμενο 0,4. Για παράδειγμα η εξίσωση $2x^2+6x+0,8 = 0$ έχει ρίζες με άθροισμα -3 και γινόμενο 0,4. Γιατί; Μπορείτε να βρείτε άλλες;

Παράδειγμα προσδιορισμού ριζών εξίσωσης δεύτερου βαθμού χωρίς να λυθεί:

Έστω η εξίσωση $x^2+4x-5 =0$ (1). Ποιες είναι οι ρίζες της;

Απάντηση:

Έχουμε α = 1, β = 4 και γ =-5, οπότε **S =** $-\frac{\beta}{\alpha}$ **= - 4 και P =** $\frac{\gamma}{\alpha}$ **= -5.**

1ος τρόπος

Από το γινόμενο -5 < 0, συμπεραίνουμε ότι οι ρίζες x_1 και x_2 είναι ετερόσημοι παράγοντες του -5. Παίρνουμε τους διαιρέτες του 5 και βρίσκουμε ποιοι δίνουν γινόμενο -5 και άθροισμα -4:

Γινόμενο	Άθροισμα	Συμπέρασμα
-1•5 = -5	-1+5=6	Οι αριθμοί -1 και 5 δεν είναι ρίζες
1• (-5) =-5	1+(-5) =-4	Οι αριθμοί 1 και -5 είναι ρίζες.

Άρα οι ρίζες της εξίσωσης (1) είναι οι αριθμοί 1 και -5.

2ος τρόπος

Μπορούμε να δημιουργήσουμε σύστημα δύο εξισώσεων α΄ βαθμού με αγνώστους τις δύο ρίζες της εξίσωσης:

$$\left.\begin{aligned} x_1 + x_2 &= -4 \\ x_1 \bullet x_2 &= -5 \end{aligned}\right\} \left.\begin{aligned} x_1 &= -4 - x_2 \\ (-4 - x_2)x_2 &= -5 \end{aligned}\right\} \left.\begin{aligned} x_1 &= -4 - x_2 \\ -4x_2 - x_2^2 + 5 &= 0 \end{aligned}\right\} \left.\begin{aligned} x_1 &= -4 - x_2 \\ x_2^2 + 4x_2 - 5 &= 0 \end{aligned}\right\} \left.\begin{aligned} x_1 &= -4 - x_2 \\ x_2 &= 1 \text{ ή } x_2 = -4 \end{aligned}\right\}$$

Για x_2 = 1 είναι x_1=-4-1=-5, δεκτές τιμές.

Για x_2 = -4 είναι x_1=-4-(-4) =0, απορριπτέες τιμές.

Άρα οι ρίζες της εξίσωσης (1) είναι οι αριθμοί 1 και -5.

Β΄ ΜΕΡΟΣ

ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ ΠΟΥ ΜΠΟΡΟΥΝ ΝΑ ΠΑΡΟΥΝ ΤΗ ΜΟΡΦΗ $\alpha x^2+\beta x+\gamma = 0, \alpha \neq 0$

1. ΚΛΑΣΜΑΤΙΚΕΣ (ΡΗΤΕΣ) ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ

Όπως στις κλασματικές εξισώσεις που ανάγονται σε εξισώσεις 1ου βαθμού, που ήδη έχουμε δει σε προηγούμενα μαθήματα, έτσι και στις κλασματικές εξισώσεις που ανάγονται σε εξισώσεις 2ου βαθμού, θέτουμε τους απαραίτητους **περιορισμούς** και στη συνέχεια λύνουμε. Δηλαδή, βρίσκουμε το **ΕΚΠ** των παρονομαστών και το θέτουμε **διάφορο του μηδενός**, αφού μέσα στο ΕΚΠ βρίσκονται ουσιαστικά οι παρονομαστές της εξίσωσης, ώστε να προκύψει το πεδίο ορισμού της εξίσωσης. Στη συνέχεια, προτιμούμε να κάνουμε **απαλοιφή παρονομαστών** και λύνουμε με την **ισοδύναμη εξίσωση 2ου βαθμού** που προκύπτει. Δεν ξεχνάμε **στο τέλος να ελέγξουμε αν οι ρίζες της εξίσωσης 2ου βαθμού είναι δεκτές ή απορρίπτονται με βάση τους περιορισμούς που**

θέσαμε, γιατί μόνο όταν ισχύουν αυτοί οι περιορισμοί, η αρχική εξίσωση και η εξίσωση 2ου βαθμού είναι ισοδύναμες.

Παράδειγμα επίλυσης κλασματικής εξίσωσης:

$$\frac{x+1}{x^2-1}+\frac{2x}{x^2-2x+1}=0 \quad (1)$$

Επίλυση:

$$\left.\begin{aligned} &\blacktriangleright x^2-1 = (x+1)(x-1) \\ &x^2-2x+1 = (x-1)^2 \end{aligned}\right\} \text{ΕΚΠ παρονομαστών} = (x+1)(x-1)^2$$

Οπότε, η εξίσωση ορίζεται μόνο όταν:

$(x+1)(x-1)^2 \neq 0 \iff x+1 \neq 0$ και $(x-1)^2 \neq 0 \iff x \neq -1$ και $x \neq 1$

Άρα η εξίσωση (1) ορίζεται μόνο όταν $x \in R-\{-1,1\}$.

$$\blacktriangleright \frac{x+1}{x^2-1}+\frac{2x}{x^2-2x+1}=0 \iff \frac{x+1}{(x+1)(x-1)}+\frac{2x}{(x-1)^2}=0 \iff$$

$$\cancel{(x+1)(x-1)^2}\frac{x+1}{\cancel{(x+1)(x-1)}}+(x+1)\cancel{(x-1)^2}\frac{2x}{\cancel{(x-1)^2}}=(x+1)(x-1)^2\cdot 0$$

<u>1ος τρόπος (συνέχεια)</u>

$(x-1)(x+1)+2x(x+1)=0 \Leftrightarrow x^2-1+2x^2+2x=0 \Leftrightarrow 3x^2+2x-1=0$ (2)

$\Delta = 4+12=16>0$, $x_{1,2}=\dfrac{-2\pm\sqrt{16}}{6} \Leftrightarrow x=-1$ (απορρίπτεται λόγω πεδίου ορισμού της εξίσωσης (1)) ή $x=\dfrac{1}{3}$ (δεκτή)

<u>2ος τρόπος (συνέχεια)</u>

$(x-1)(x+1)+2x(x+1)=0 \Leftrightarrow (x+1)(x-1+2x)=0 \iff (x+1)(3x-1)=0$ (3) $\iff$

$x+1=0 \iff x=-1$(απορρίπτεται λόγω πεδίου ορισμού της εξίσωσης (1)) ή $x=\dfrac{1}{3}$ (δεκτή)

ΣΧΟΛΙΟ

1. Και στους δύο τρόπους καταλήξαμε σε μία ισοδύναμη εξίσωση 2ου βαθμού της αρχικής κλασματικής εξίσωσης (1). Παρατηρούμε ότι στο 2ο τρόπο η ισοδύναμη εξίσωση **$(x+1)(3x-1)=0$** (3) είναι η **παραγοντοποιημένη** μορφή της εξίσωσης **$3x^2+2x-1=0$ (2). Πράγματι, αφού οι ρίζες της εξίσωσης (2)**

είναι οι αριθμοί -1 και $\frac{1}{3}$, τότε το τριώνυμο $3x^2+2x-1$, γράφεται:

$3(x+1)(x-\frac{1}{3})$ ή $(x+1)(3x-1)$.

2. Από την παραγοντοποιημένη μορφή **$(x+1)(3x-1)$** του τριωνύμου **$3x^2+2x-1$** μπορούμε να εξάγουμε τις ρίζες του, άρα και τις ρίζες της εξίσωσης **$3x^2+2x-1=0$.**

2. ΔΙΤΕΤΡΑΓΩΝΕΣ ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ

Οι διτετράγωνες εξισώσεις είναι εξισώσεις $4^{ου}$ βαθμού ως προς x που έχουν ή μπορούν να πάρουν τη μορφή **$\alpha x^4+\beta x^2+\gamma = 0$ με $\alpha \neq 0$.**

Για την επίλυσή τους θέτουμε έστω **$x^2 = y$** και δημιουργούμε στη θέση της αρχικής εξίσωσης μία εξίσωση $2^{ου}$ βαθμού ως προ y, **$\alpha y^2+\beta y+\gamma = 0$, $\alpha \neq 0$,**

την οποία ονομάζουμε **επιλύουσα** της αρχικής εξίσωσης. Στη συνέχεια, εφόσον η επιλύουσα έχει πραγματικές ρίζες y, **βρίσκουμε από την εξίσωση $x^2 = y$ τις ρίζες x της αρχικής εξίσωσης.**

Παράδειγμα επίλυσης διτετράγωνης εξίσωσης:

$x^4-8x^2+7=0$ (1)

Θέτουμε **$x^2 = y$** , **οπότε $x^4 = y^2$** και η (1) δίνει: **$y^2 - 8y +7 = 0$ (επιλύουσα) (2).**

$\Delta_y = 64-28=36>0$, $y_{1,2} = \frac{5 \pm \sqrt{36}}{2} = \frac{5 \pm 6}{2} \Leftrightarrow y = \frac{11}{2}$ ή $y = -\frac{1}{2}$

Παρατηρούμε ότι από τις δύο ρίζες y της εξίσωσης (2) μόνο η $y = \frac{11}{2}$ είναι θετική

και **στη συνέχεια έχει νόημα** από την εξίσωση **$x^2 = y$ να βρούμε τις ρίζες x της αρχικής εξίσωσης (1). Συνεπώς,** $x^2 = \frac{11}{2} \Leftrightarrow x = \sqrt{\frac{11}{2}}$ ή $x = -\sqrt{\frac{11}{2}}$.

Άρα η εξίσωση (1) έχει ρίζες τους αριθμούς $x = \sqrt{\frac{11}{2}}$ ή $x = -\sqrt{\frac{11}{2}}$

ΣΧΟΛΙΟ

Εκτός από τις διτετράγωνες κάθε εξίσωση της μορφής $\alpha x^{2\nu} +\beta x^{\nu}+\gamma = 0$ με $\alpha \neq 0$, μπορεί να επιλυθεί με την ίδια μέθοδο της επιλύουσας.

Παράδειγμα: $x^6-x^3+3 = 0$. (1) .Θέτουμε **$x^3 = y$, οπότε $x^6 = y^2$** , και η (1) δίνει: **$y^2 -y +3 = 0$ (επιλύουσα) (2). Συνεχίζουμε όπως και πριν.**

3. ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ ΟΠΟΥ ΣΤΗ ΘΕΣΗ ΤΟΥ ΑΓΝΩΣΤΟΥ Χ ΕΧΟΥΝ ΠΟΛΥΩΝΥΜΟ ΤΟΥ Χ Ή ΟΠΟΙΑΔΗΠΟΤΕ ΑΛΓΕΒΡΙΚΗ ΠΑΡΑΣΤΑΣΗ (ΣΥΝΘΕΣΗ)

Για να λύσουμε αυτές τις εξισώσεις ή κάνουμε πράξεις και τις φέρνουμε στη μορφή $αx^2+βx+γ = 0$, $α≠0$ ή χρησιμοποιούμε τη μέθοδο της επιλύουσας.

Παράδειγμα:

$2(x-1)^2-3(x-1)+1=0$ (1)

<u>1ος τρόπος (Πράξεις)</u>

$2(x-1)^2-3(x-1)+1=0 \Leftrightarrow 2x^2-4x+2-3x+3+1=0 \Leftrightarrow 2x^2 - 7x + 6 = 0 \Leftrightarrow x=2$ ή $x=\frac{3}{2}$

<u>1ος τρόπος (Επιλύουσα)</u>

Θέτουμε **x-1=y**, οπότε η (1) γίνεται $2y^2 - 3y + 1 = 0 \Leftrightarrow y = 1$ ή $y = \frac{1}{2}$

Για $y = 1$: **x-1=y** $\Leftrightarrow x-1=1 \Leftrightarrow x = 2$

Για $y = \frac{1}{2}$: **x-1=y** $\Leftrightarrow x-1=\frac{1}{2} \Leftrightarrow x = \frac{3}{2}$

Άρα η εξίσωση (1) έχει ρίζες τους αριθμούς $\frac{3}{2}$ και 2.

4. ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ ΤΗΣ ΜΟΡΦΗΣ $αx^2+β|x|+γ = 0$, $α≠0$

Για να λύσουμε τις εξισώσεις αυτές, χρησιμοποιούμε τη γνωστή ιδιότητα των απόλυτων τιμών: $|x^2|=|x|^2= x^2$, αφού $x^2 \geq 0$ και συνεχίζουμε με τη μέθοδο της επιλύουσας.

Παράδειγμα:

$x^2 - 7|x| + 12 = 0$ (1).

$x^2 - 7|x| + 12 = 0 \Leftrightarrow |x|^2 - 7|x| +12 = 0$ (2).

Θέτουμε $|x| = ω$ και η (2) δίνει: $ω^2-7ω+12 = 0 \Leftrightarrow ω=3$ ή $ω=4$.

Για $ω=3$, $|x| = ω \Leftrightarrow |x| = 3 \Leftrightarrow x=3$ ή $x=-3$

Για $ω=4$, $|x| = ω \Leftrightarrow |x| = 4 \Leftrightarrow x=4$ ή $x=-4$

Άρα η εξίσωση (1) έχει ρίζες τους αριθμούς -4, -3, 3 και 4.

Γ΄ ΜΕΡΟΣ

ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ Β ΒΑΘΜΟΥ :ΤΡΑΠΕΖΑ ΘΕΜΑΤΩΝ

ΘΕΜΑ 2	**1262, 1264, 1269,1280, 1285, 1288, 1290, 1312, 1315, 1316, 1331, 1332, 1334, 1337, 1348, 1346, 1349, 1359**
ΘΕΜΑ 4	**1388, 1407, 1412, 1418, 1431, 1439, 1440, 1445, 1448, 1451, 1452, 1456, 1459, 1460, 1461, 1463, 1469, 1475, 1476, 1477, 1478, 1482, 1491, 1504, 1508, 1509, 1516,**