§2.4 ΡΙΖΕΣ ΠΡΑΓΜΑΤΙΚΩΝ ΑΡΙΘΜΩΝ 26-11-2020

1. ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ $x^{\nu} = \alpha$

Α. Έστω η εξίσωση **$x^{\nu} = \alpha$** , όπου **α μη αρνητικός πραγματικός αριθμός** ($\alpha \geq 0$) και **ν θετικός ακέραιος αριθμός** ($\nu \in Z^{+}$).

i) Αν **ν άρτιος** , τότε η εξίσωση **$x^{\nu} = \alpha$**, έχει δύο λύσεις, μία μη αρνητική και μία αρνητική.

Τη μη αρνητική λύση x την ονομάζουμε ν-οστή ρίζα του μη αρνητικού αριθμού α και τη συμβολίζουμε με $\sqrt[\nu]{\alpha}$. Διαβάζουμε : νιοστή ρίζα του άλφα. Γράφουμε: $x = \sqrt[\nu]{\alpha}$ Η αρνητική λύση x είναι $x = -\sqrt[\nu]{\alpha}$.

Οπότε **$x^{\nu} = \alpha \iff x = \sqrt[\nu]{\alpha}$** ή $x = -\sqrt[\nu]{\alpha}$ **($\square^{\nu} = \bigcirc \iff \square = \sqrt[\nu]{\bigcirc}$ ή $\square = -\sqrt[\nu]{\bigcirc}$)**

Παράδειγμα 1ο : $x^2 = 9 \iff x = \sqrt{9}$ (τετραγωνική ρίζα ή ρίζα του 9) ή $x = -\sqrt{9}$.

Πόσο κάνει $\sqrt{9}$; Κάνει 3, γιατί $3^2 = 9$. Άρα $x = \sqrt{9} = 3$

Πόσο κάνει $-\sqrt{9}$; Κάνει -3, γιατί $(-3)^2 = 9$. ; Άρα $x = -\sqrt{9} = -3$.

Παράδειγμα 2ο: $x^4 = 16 \iff x = \sqrt[4]{16}$ (τέταρτη ρίζα του 16) ή $x = -\sqrt[4]{16}$.

Πόσο κάνει $\sqrt[4]{16}$; Κάνει 2, γιατί $2^4 = 16$. Άρα $x = \sqrt[4]{16} = 2$

Πόσο κάνει $-\sqrt[4]{16}$; Κάνει -2, γιατί $(-2)^4 = 16$. Άρα $x = -\sqrt[4]{16} = -2$.

ii) Αν **ν περιττός** , τότε η εξίσωση **$x^{\nu} = \alpha$**, έχει μία λύση μη αρνητική. Τη μη αρνητική λύση x την ονομάζουμε ν-οστή ρίζα του μη αρνητικού αριθμού α και τη συμβολίζουμε με $\sqrt[\nu]{\alpha}$. Διαβάζουμε : νιοστή ρίζα του άλφα. Γράφουμε: $x = \sqrt[\nu]{\alpha}$

Οπότε **$x^{\nu} = \alpha \iff x = \sqrt[\nu]{\alpha}$ ($\square^{\nu} = \bigcirc \iff \square = \sqrt[\nu]{\bigcirc}$)**

Παράδειγμα 3ο: $x^3 = 125 \iff x = \sqrt[3]{125}$ (κυβική ρίζα του 125).

Πόσο κάνει $\sqrt[3]{125}$; Κάνει 5, γιατί $5^3 = 125$. Άρα $x = \sqrt[3]{125} = 5$

ΣΧΟΛΙΑ!

1. Τη νιοστή ρίζα μη αρνητικού αριθμού α, $\sqrt[\nu]{\alpha}$, μπορούμε να τη λέμε και ν τάξης ρίζα.
Παράδειγμα 4ο: Την τέταρτη ρίζα μη αρνητικού αριθμού α, $\sqrt[4]{\alpha}$, μπορούμε να την λέμε και ρίζα τέταρτης τάξης.

2. Για τη δεύτερη ρίζα μη αρνητικού αριθμού α, αντί $\sqrt[2]{\alpha}$, γράφουμε $\sqrt{\alpha}$.

3. Τη δεύτερη ρίζα ή ρίζα δεύτερης τάξης μη αρνητικού αριθμού α, $\sqrt{\alpha}$, τη λέμε συνήθως τετραγωνική ρίζα. Την τρίτη ρίζα ή ρίζα τρίτης τάξης μη αρνητικού αριθμού α, $\sqrt[3]{\alpha}$, τη λέμε συνήθως κυβική ρίζα.

4. Ορίζουμε πρώτη ρίζα ή ρίζα πρώτης τάξης μη αρνητικού αριθμού α, $\sqrt[1]{\alpha}$, τον μη αρνητικό αριθμό α.

5. Τον αριθμό κάτω από τη ρίζα ν-οστής τάξης τον λέμε υπόρριζη ποσότητα ή υπόρριζο.

Β. Έστω η εξίσωση **$x^{\nu} = \alpha$** , όπου **α αρνητικός πραγματικός αριθμός** (α<0) και **ν θετικός ακέραιος αριθμός** (ν ϵ Z^{+}).

i) Αν **ν άρτιος** , τότε η εξίσωση **$x^{\nu} = \alpha$, είναι αδύνατη.**

Παράδειγμα 5ο: Η εξίσωση **$x^2 = -4$ είναι αδύνατη**

ii) Αν **ν περιττός** , τότε η εξίσωση **$x^{\nu} = \alpha$**, έχει μία λύση αρνητική, την $x = -\sqrt[\nu]{-\alpha}$

Οπότε **$x^{\nu} = \alpha \iff x = -\sqrt[\nu]{-\alpha}$ ($\square^{\nu} = \bigcirc \iff \square = -\sqrt[\nu]{-\bigcirc}$)**

Παράδειγμα 6ο: $x^5 = -243 \iff x = -\sqrt[5]{243} \iff x = -3$. Πράγματι: $(-3)^5 = -243$

<u>Ασκήσεις</u>

Άσκηση 1 σελ. 74

Ασκήσεις 1-6 σελ. 87 σχ. βιβλίου.

2. ΙΔΙΟΤΗΤΕΣ ΡΙΖΩΝ

1. Αν **α ≥ 0 και ν θετικός ακέραιος**, τότε $\sqrt[\nu]{\alpha^\nu} = \left(\sqrt[\nu]{\alpha}\right)^\nu = \alpha$

<u>Παράδειγμα 7ο</u>: $\sqrt{3^2} = \left(\sqrt{3}\right)^2 = \left(\sqrt{3}\right)\cdot\left(\sqrt{3}\right) = 3$

2. Αν **α < 0 και ν άρτιος θετικός ακέραιος**, τότε $\sqrt[\nu]{\alpha^\nu} = |\alpha| \geq$ **0**.

<u>Παράδειγμα 8ο:</u> $\sqrt{(-3)^2} = |-3| = 3$

<u>Παράδειγμα 9ο</u>: $\sqrt{(x-1)^2} = |x-1|$, γιατί το x-1 δεν είναι πάντα μη αρνητικός αριθμός .

Οπότε, $\sqrt{(x-1)^2} = |x-1| = \begin{cases} x-1, \text{ όταν } x \geq 1 \\ 1-x, \text{ όταν } x<1 \end{cases}$

<u>Παράδειγμα 10ο</u>: $\left(\sqrt{x-1}\right)^2 = x-1$, μόνο όταν $x-1 \geq 0 \iff x \geq$ **1**. Για x<1 δεν ορίζεται η ρίζα.

Άσκηση 2.1 : Να λύσετε τις ασκήσεις 2,3 ,4(να βρείτε πρώτα Πεδίο ορισμού) σελ. 74 σχ. βιβλίο

νέα

Άσκηση 2.2 : Να υπολογίσετε την παράσταση $\sqrt{37+12\sqrt{7}}$

Θα προσπαθήσουμε να γράψουμε το υπόρριζο $37+12\sqrt{7}$ ως τέλειο τετράγωνο, βασιζόμενοι στις ταυτότητες $\alpha \pm 2\sqrt{\alpha}\sqrt{\beta} + \beta = (\sqrt{\alpha} \pm \sqrt{\beta})^2$.

Η παράσταση $37+12\sqrt{7}$ γράφεται διαδοχικά: $37 + 2\cdot 3\cdot(2\sqrt{7}) = 3^2 + (2\sqrt{7})^2 + 2\cdot 3\cdot 2\sqrt{7} =$

$= (3+2\sqrt{7})^2$. Άρα $\sqrt{37+12\sqrt{7}} = \sqrt{(3+2\sqrt{7})^2} = 3+2\sqrt{7}$ (αφού $3+2\sqrt{7}>0$)

3. Αν α, β ≥ 0 και ν θετικός ακέραιος, τότε $\sqrt[\nu]{\alpha}\cdot\sqrt[\nu]{\beta} = \sqrt[\nu]{\alpha\beta}$.

<u>Παράδειγμα 11ο</u>: Απλοποιούμε μία ρίζα: $\sqrt{50} = \sqrt{2\cdot 25} = \sqrt{2}\sqrt{25} = 5\sqrt{2}$

Άσκηση 2.3: Να λύσετε την άσκηση 5 σελ. 74 σχ. βιβλίου.
(Υπόδειξη: Στην άσκηση 5 πρώτα να απλοποιήσετε τις ρίζες)

Η ιδιότητα 3. ισχύει και για περισσότερους από δύο μη αρνητικούς αριθμούς:
$\sqrt[\nu]{\alpha_1}\cdot\sqrt[\nu]{\alpha_2}\cdot \ldots \cdot\sqrt[\nu]{\alpha_\kappa} = \sqrt[\nu]{\alpha_1\cdot\alpha_2\cdot\ldots\cdot\alpha_\kappa}$.)
Εφαρμογή: Από την ιδιότητα 1., αν $\alpha_1=\alpha_2=\ldots=\alpha_\kappa=\alpha \geq 0$, προκύπτει η σχέση

$\underbrace{\sqrt[\nu]{\alpha}\cdot\sqrt[\nu]{\alpha}\cdot\ldots\cdot\sqrt[\nu]{\alpha}}_{\kappa \text{ παράγοντες } \sqrt[\nu]{\alpha}} = \sqrt[\nu]{\underbrace{\alpha\cdot\alpha\cdot\ldots\cdot\alpha}_{\kappa \text{ παράγοντες } \alpha}}$ δηλαδή $\left(\sqrt[\nu]{\alpha}\right)^\kappa = \sqrt[\nu]{\alpha^\kappa}$

<u>Παράδειγμα 12ο</u>: $\sqrt{4^3} = \left(\sqrt{4}\right)^3 = 2^3 = 8$

Άσκηση 2.4 : Να λύσετε την άσκηση 6 σελ. 74 σχ. βιβλίου.

4. Αν $\alpha \geq 0$, $\beta > 0$ και ν θετικός ακέραιος, τότε $\dfrac{\sqrt[\nu]{\alpha}}{\sqrt[\nu]{\beta}} = \sqrt[\nu]{\dfrac{\alpha}{\beta}}$

<u>Παράδειγμα 13ο:</u> Για $x \geq 0$ και $y > 0$, να μετατρέψετε την παράσταση $A = \sqrt{x}\sqrt{\dfrac{x}{y}}$ σε ισοδύναμη με ρητό παρονομαστή (να μην υπάρχει ρίζα στον παρονομαστή).

$$A = \sqrt{\mathbf{x}}\sqrt{\frac{\mathbf{x}}{\mathbf{y}}} = \sqrt{\mathbf{x}}\frac{\sqrt{\mathbf{x}}}{\sqrt{\mathbf{y}}} = \frac{\mathbf{x}}{\sqrt{\mathbf{y}}} = \frac{\mathbf{x}\sqrt{\mathbf{y}}}{\sqrt{\mathbf{y}}\sqrt{\mathbf{y}}} = \frac{\mathbf{x}\sqrt{\mathbf{y}}}{\mathbf{y}}$$

Άσκηση 2.5 : Να λύσετε την άσκηση 9 σελ. 74 σχ. βιβλίου
(Υπόδειξη: Να απλοποιήσετε πρώτα τις ρίζες)

<u>Παράδειγμα 14ο:</u> Να μετατρέψετε την παράσταση $B = \dfrac{\sqrt{3}}{\sqrt{5}-\sqrt{3}}$ σε ισοδύναμη με ρητό παρονομαστή.

Για να λύσουμε την άσκηση χρησιμοποιούμε τη συζυγή παράσταση του παρονομαστή. Στις παραστάσεις με τετραγωνικές ρίζες, συζυγείς ονομάζουμε τις παραστάσεις που το γινόμενο τους δημιουργεί διαφορά τετραγώνων.
Δηλαδή

* Η παράσταση $\sqrt{\mathbf{A}}\mathbf{-B}$ έχει συζυγή την $\sqrt{\mathbf{A}}\mathbf{+B}$ αφού
$(\sqrt{\mathbf{A}}\mathbf{+B})(\sqrt{\mathbf{A}}\mathbf{-B}) = \sqrt{\mathbf{A}}^2 \mathbf{-B^2} = A - B^2$

* Η παράσταση $\mathbf{A-}\sqrt{\mathbf{B}}$ έχει συζυγή την $\mathbf{A+}\sqrt{\mathbf{B}}$ αφού
$(\mathbf{A+}\sqrt{\mathbf{B}})(\mathbf{A-}\sqrt{\mathbf{B}}) = A^2 - \sqrt{\mathbf{B}}^2 = A^2 - B$

* Η παράσταση $\sqrt{\mathbf{A}}\mathbf{-}\sqrt{\mathbf{B}}$ έχει συζυγή την $\sqrt{\mathbf{A}}\mathbf{+}\sqrt{\mathbf{B}}$ αφού
$(\sqrt{\mathbf{A}}\mathbf{+}\sqrt{\mathbf{B}})(\sqrt{\mathbf{A}}\mathbf{-}\sqrt{\mathbf{B}}) = \sqrt{\mathbf{A}}^2 \mathbf{-}\sqrt{\mathbf{B}}^2 = \mathbf{A - B}$

$B = \dfrac{\sqrt{3}}{\sqrt{5}-\sqrt{3}}$ => (πολλαπλασιάζουμε αριθμητή και παρονομαστή με τη συζυγή παράσταση του παρονομαστή) $B = \dfrac{\sqrt{3}(\sqrt{5}+\sqrt{3})}{\left(\sqrt{5}-\sqrt{3}\right)\left(\sqrt{5}+\sqrt{3}\right)} =$

$$\frac{\sqrt{3}\sqrt{5}+\sqrt{3}^2}{\sqrt{5}^2-\sqrt{3}^2} = \frac{\sqrt{15}+3}{5-3} = \frac{\sqrt{15}+3}{2}$$

Άσκηση 2.6: Να λύσετε την άσκηση 10 σελ. 75 σχ. βιβλίου

3. ΔΥΝΑΜΕΙΣ ΘΕΤΙΚΩΝ ΑΡΙΘΜΩΝ ΜΕ ΡΗΤΟ ΕΚΘΕΤΗ

Αν α θετικός πραγματικός αριθμός ($\alpha > 0$), μ ακέραιος και ν θετικός ακέραιος, τότε ορίζουμε $\boldsymbol{\alpha^{\frac{\mu}{\nu}} = \sqrt[\nu]{\alpha^{\mu}}}$. Επιπλέον, αν μ και ν θετικοί ακέραιοι, τότε ορίζουμε $\mathbf{0}^{\frac{\mu}{\nu}} = 0$.

Παράδειγμα 14ο: $3^{\frac{2}{5}} = \sqrt[5]{3^2}$ Πράγματι: $x = 3^{\frac{2}{5}} \iff x^5 = \left(3^{\frac{2}{5}}\right)^5 \iff x^5 = 3^2 \iff$

$x = \sqrt[5]{3^2}$. Άρα $\boxed{3^{\frac{2}{5}} = \sqrt[5]{3^2}}$.

Παράδειγμα 15ο: $3^{-\frac{2}{5}} = \sqrt[5]{3^{-2}} = \sqrt[5]{\frac{1}{9}}$

Παράδειγμα 16ο: $\sqrt[5]{2\sqrt{2\sqrt[3]{2}}} = \sqrt[5]{2\sqrt{2\cdot 2^{\frac{1}{3}}}} = \sqrt[5]{2\sqrt{2^{\frac{4}{3}}}} = \sqrt[5]{2\cdot 2^{\frac{\frac{4}{3}}{2}}} = \sqrt[5]{2\cdot 2^{\frac{4}{6}}} = \sqrt[5]{2\cdot 2^{\frac{2}{3}}} =$

$\sqrt[5]{2\cdot 2^{\frac{4}{6}}} = \sqrt[5]{2^{\frac{5}{3}}} = 2^{\frac{\frac{5}{3}}{5}} = 2^{\frac{5}{15}} = 2^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{2}$

Άσκηση 3.1 Να λύσετε την άσκηση 8 σελ. 74 σχ. βιβλίου

νέα

Άσκηση 3.2

Δίνονται οι αριθμοί: $A = \left(\sqrt{2}\right)^6$ και $B = \left(\sqrt[3]{2}\right)^6$

α) Να δείξετε ότι: $A - B = 4$

β) Να διατάξετε από το μικρότερο στο μεγαλύτερο τους αριθμούς: $\sqrt{2}$, 1 , $\sqrt[3]{2}$

Λύση

Είναι $A = \left(\sqrt{2}\right)^6 = \left(2^{\frac{1}{2}}\right)^6 = 2^3$. Είναι $B = \left(\sqrt[3]{2}\right)^6 = \left(2^{\frac{1}{3}}\right)^6 = 2^2$

α) Έχουμε: A-B = $2^3 - 2^2 = 2^2(2-1) = 2^2 = 4$, αποδείχτηκε

β)

1ος τρόπος

$\left.\begin{aligned} \sqrt{2} &= 2^{\frac{1}{2}} \\ \sqrt[3]{2} &= 2^{\frac{1}{3}} \\ 1 &= 2^0 \end{aligned}\right\}$

Επειδή για τη βάση ισχύει 2>1 και για τους εκθέτες ισχύει $0 < \frac{1}{3} < \frac{1}{2}$, τότε $2^0 < 2^{\frac{1}{3}} < 2^{\frac{1}{2}}$.

Άρα $1 < \sqrt[3]{2} < 2^{\frac{1}{2}}$

2ος τρόπος

Σίγουρα ισχύει ότι $1 < \sqrt{2}$. Συγκρίνουμε $\sqrt{2}$ και $\sqrt[3]{2}$. Υψώνουμε και τις δύο ρίζες σε εκθέτη 6 (ΕΚΠ των τάξεων 2 και 3 των ριζών). Παίρνουμε $\sqrt{2}^6$ και $\sqrt[3]{2}^6$. Όμως $\sqrt{2}^6 = \left(\sqrt{2}^2\right)^3 = 2^3$ και $\sqrt[3]{2}^6 = \left(\sqrt[3]{2}^3\right)^2 = 2^2$. Παρατηρούμε ότι $2^2 < 2^3$. Οπότε, $\sqrt[3]{2}^6 < \sqrt{2}^6$.

Άρα , αφού $\sqrt{2} > 0$ και $\sqrt[3]{2} > 0$ ισχύει ότι $\sqrt[3]{2}^6 < \sqrt{2}^6 \iff \sqrt[3]{2} < \sqrt{2}$. Άρα $1 < \sqrt[3]{2} < \sqrt{2}$.

νέα

Άσκηση 3.3

α) Να δείξετε ότι: $3 < \sqrt[3]{30} < 4$.

β) Να συγκρίνετε τους αριθμούς $\sqrt[3]{30}$ και $6-\sqrt[3]{30}$

Λύση

α) Θέλουμε να δείξουμε ότι $3 < \sqrt[3]{30} < 4$. Αρκεί να δείξουμε ότι $3^3 < \left(\sqrt[3]{30}\right)^3 < 4^3$ <=>

$3^3 < 30 < 4^3$ <=> 27< 30 < 64, που ισχύει. Άρα $3 < \sqrt[3]{30} < 4$.

β) Από το ερώτημα α) γνωρίζουμε ότι $3 < \sqrt[3]{30} < 4 \ (1)$. Θα προσπαθήσουμε να δούμε σε ποιο διάστημα παίρνει τιμές η παράσταση $6-\sqrt[3]{30}$.   +6

Είναι $3 < \sqrt[3]{30} < 4$ <=> $-3 > -\sqrt[3]{30} > -4$ <=> $-4 < -\sqrt[3]{30} < -3$ <=> $6-4 < 6-\sqrt[3]{30} < 6-3$ <=> $2 < 6-\sqrt[3]{30} < 3 \ (2)$. Από σχέσεις (1) και (2), προκύπτει ότι $6-\sqrt[3]{30}$ < $\sqrt[3]{30}$

νέα

Άσκηση 3.4

Να γράψετε με μορφή δυνάμεων τις ρίζες:

α) $\sqrt{x^2}$, $\sqrt{x^4}$, $\sqrt{x^6}$

β) $\sqrt{x^3}$, $\sqrt{x^5}$, $\sqrt{x^7}$

Λύση

Το πεδίο ορισμού γενικά των ριζών $\sqrt[\nu]{x^\mu}$, αν ο μ = άρτιος, είναι όλο το R. Ενώ, αν ο μ= περιττός , το πεδίο ορισμού είναι το διάστημα [0, +00), δηλαδή οι μη αρνητικοί αριθμοί x.

α) Επειδή ο x μπορεί να είναι μη αρνητικός ή αρνητικός αριθμός, γράφουμε:

$\sqrt{x^2} = |x|^{\frac{2}{2}} = |x| = \begin{cases} x, \text{ αν } x \geq 0 \\ -x, \text{ αν } x<0 \end{cases}$, $\sqrt{x^4} = |x|^{\frac{4}{2}} = |x|^2 = x^2$, $\sqrt{x^6} = |x|^{\frac{6}{2}} = |x|^3 = \begin{cases} x^3, \text{ αν } x \geq 0 \\ -x^3, \text{ αν } x<0 \end{cases}$

β) Επειδή ο x είναι μη αρνητικός αριθμός , γράφουμε:

$\sqrt{x^3} = x^{\frac{3}{2}}$, $\sqrt{x^5} = x^{\frac{5}{2}}$, $\sqrt{x^7} = x^{\frac{5}{2}}$

νέα

Άσκηση 3.5

Να λύσετε την εξίσωση $\sqrt{(x-4)^2} = 2$

Λύση

Η ρίζα του α΄ μέλους της εξίσωσης ορίζεται τότε ακριβώς όταν $(x-4)^2 \geq 0$, που ισχύει για οποιονδήποτε πραγματικό αριθμό x. Άρα το πεδίο ορισμού της εξίσωσης είναι όλο το R.

Επειδή $\sqrt{(x-4)^2} = |x-4|$ (αφού ο όρος x-4 μπορεί να είναι μη αρνητικός ή αρνητικός), τότε η αρχική εξίσωση γίνεται: |x-4| = 2 <=> x-4=2 ή x-4=-2<=> x=6 ή x= 2.