1ο Πρότυπο Λύκειο, 23/10/2020

Άλγεβρα Α΄Λυκείου

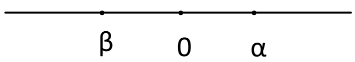
2.2 ΔΙΑΤΑΞΗ ΠΡΑΓΜΑΤΙΚΩΝ ΑΡΙΘΜΩΝ: Ορισμοί και ιδιότητες (σ.54-60 σχ. βιβ.)

1. Πότε ένας αριθμός α λέμε ότι είναι μεγαλύτερος του αριθμού β;

Ορισμός: Ο αριθμός α λέμε ότι είναι μεγαλύτερος από τον αριθμό β, συμβολικά α > β, όταν η διαφορά α - β είναι θετικός αριθμός. Κάθε θετικός αριθμός είναι μεγαλύτερος από το μηδέν.

- Ο ορισμός γράφεται ισοδύναμα: **α > β <=> α - β > 0**

Γεωμετρική ερμηνεία: Πάνω στον άξονα των πραγματικών αριθμών η ανισότητα α > β σημαίνει ότι ο αριθμός α είναι δεξιότερα του β.



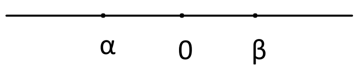
Όταν για τους αριθμούς α και β ισχύει α > β ή α = β, γράφουμε α$\geq$ β.

2. Πότε ένας αριθμός α λέμε ότι είναι μικρότερος του αριθμού β;

Ορισμός: Ο αριθμός α λέμε ότι είναι μικρότερος από τον αριθμό β, συμβολικά α < β, όταν η διαφορά α-β είναι αρνητικός αριθμός. Κάθε αρνητικός αριθμός είναι μικρότερος από το μηδέν.

- Ο ορισμός γράφεται ισοδύναμα: **α < β <=> α - β < 0**

Γεωμετρική ερμηνεία: Πάνω στον άξονα των πραγματικών αριθμών η ανισότητα α < β σημαίνει ότι ο αριθμός α είναι αριστερότερα του β.



Όταν για τους αριθμούς α και β ισχύει α < β ή α = β, γράφουμε α$\leq$ β.

3. Ανισότητες και οι πράξεις πρόσθεση και πολλαπλασιασμός

- (α > 0 και β > 0) => α + β > 0
- (α < 0 και β < 0) => α + β < 0
- (α και β ομόσημοι) <=> αβ > 0 <=> $\frac{\alpha}{\beta} > 0$
- (α και β ετερόσημοι) <=> αβ < 0 <=> $\frac{\alpha}{\beta} < 0$
- Για κάθε πραγματικό αριθμό α ισχύει ότι $\alpha^2 \geq 0$. Η ισότητα ισχύει μόνο όταν α = 0. Δηλαδή, $\alpha^2 = 0$ <=> α = 0 και $\alpha^2 > 0$ <=> $\alpha \neq 0$.

Εφαρμογή 1η : Να αποδείξετε ότι **αν** για τον πραγματικό αριθμό α ισχύει ότι **α < -1**, **τότε** ισχύει ότι **7+4α < 4+α**.

1ος τρόπος:

Με α < -1, για να αποδείξουμε την ανισότητα 7+4α < 4+α, **αρκεί να αποδείξουμε ότι η διαφορά (7+4α) - (4+α) είναι αρνητικός αριθμός**.

Πράγματι:

(7+4α) - (4+α) = 7-4+4α-α = 3+3α = 3(1+α).

Επειδή 3>0 και α+1<0 (αφού α < -1), τότε 3(1+α) < 0.

Άρα (7+4α) - (4+α) < 0, οπότε είναι και (7+4α) < (4+α) .

2ος τρόπος:

Με α < -1, για να αποδείξουμε την ανισότητα 7+4α < 4+α **αρκεί να αποδείξουμε την ισχύ μιας ισοδύναμης με αυτήν ανισότητας**.

Πράγματι:

$$7+4\alpha < 4+\alpha \iff 7+4\alpha-4-\alpha < 0 \iff 3+3\alpha < 0 \iff 3(1+\alpha) < 0 \overset{3>0}{\iff} 1+\alpha < 0 \iff \alpha < -1$$

Η ανισότητα που καταλήξαμε ισχύει λόγω υπόθεσης ότι α <-1.

Ασκήσεις: 1 και 2 σελ. 59 σχ. βιβλίου

4. Ιδιότητες των ανισοτήτων

Με βάση την ισοδυναμία : **α < β <=> α - β < 0,** αποδεικνύονται οι παρακάτω ιδιότητες των ανισοτήτων:

1. (Μεταβατική ιδιότητα) Αν α > β και β > γ τότε και α > γ.

2. Αν γ οποιονδήποτε πραγματικός αριθμός και α > β, τότε $\alpha \pm \gamma > \beta \pm \gamma$.
   Αντίστροφα: Αν γ οποιονδήποτε πραγματικός αριθμός και $\alpha \pm \gamma > \beta \pm \gamma$, τότε α > β (Ιδιότητα διαγραφής).
   Οπότε, **αν γ οποιοσδήποτε πραγματικός αριθμός, τότε, α > β <=> $\alpha \pm \gamma > \beta \pm \gamma$**

3. Αν γ > 0 και α > β, τότε αγ > βγ.
   Επίσης, αν γ > 0 και α > β, τότε $\frac{\alpha}{\gamma} > \frac{\beta}{\gamma}$
   Αντίστροφα: Αν γ > 0 και αγ > βγ, τότε α > β (Ιδιότητα διαγραφής).
   Επίσης, αν γ > 0 και $\frac{\alpha}{\gamma} > \frac{\beta}{\gamma}$, τότε α > β.

   Οπότε, **αν γ > 0, τότε α > β <=> αγ > βγ και αν γ > 0, τότε α > β <=>$\frac{\alpha}{\gamma} > \frac{\beta}{\gamma}$**.

4. Αν γ < 0 και α > β, τότε αγ < βγ.
   Αντίστροφα: Αν γ < 0 και αγ > βγ, τότε α < β (Ιδιότητα διαγραφής). Οπότε,
   αν γ < 0, τότε α > β <=> αγ < βγ.

5. Αν α > β και γ > δ, τότε α + γ > β + δ (πρόσθεση κατά μέλη ομόστροφων ανισοτήτων). Όμοια: αν α < β και γ < δ, τότε α + γ < β + δ. Η ιδιότητα ισχύει και για περισσότερες ομόστροφες ανισότητες.

6. Αν α, β, γ, δ **θετικοί αριθμοί** και α < β και γ < δ, τότε αγ < βδ (πολλαπλασιασμός κατά μέλη ομόστροφων ανισοτήτων). Η ισότητα ισχύει και για περισσότερες ομόστροφες ανισότητες.

7. Αν α, β και ν θετικοί αριθμοί, τότε $\alpha > \beta \iff \alpha^\nu > \beta^\nu$ ή $\alpha < \beta \iff \alpha^\nu < \beta^\nu$

8. Αν α, β και ν θετικοί αριθμοί, τότε $\alpha = \beta \Leftrightarrow \alpha^{\nu} = \beta^{\nu}$.

Απόδειξη:

[=>] Αν α = β, τότε από ιδιότητα 6 θα έχουμε ααα...α = βββ...β, δηλαδή $\alpha^{\nu} = \beta^{\nu}$.

[<=] Αν $\alpha^{\nu} = \beta^{\nu}$, θα αποδείξουμε ότι α = β με τη μέθοδο της απαγωγής σε άτοπο.

Έστω λοιπόν ότι αν $\alpha^{\nu} = \beta^{\nu}$, τότε α > β. Τότε από την Ιδιότητα 7 θα είχαμε ότι $\alpha^{\nu} > \beta^{\nu}$, άτοπο. Όμοια, έστω ότι αν $\alpha^{\nu} = \beta^{\nu}$, τότε α < β. Τότε από την Ιδιότητα 7 θα είχαμε ότι $\alpha^{\nu} > \beta^{\nu}$, άτοπο.

Άρα αν $\alpha^{\nu} = \beta^{\nu}$, τότε α = β.

Εφαρμογή 2η: Αν α, β ομόσημοι αριθμοί, τότε $\boldsymbol{\alpha < \beta \Leftrightarrow \frac{1}{\alpha} > \frac{1}{\beta}}$**.**

Για να αποδείξουμε την ισοδυναμία δύο ανισοτήτων, είτε ξεκινούμε από την πρώτη ανισότητα και με ισοδύναμες πράξεις καταλήγουμε στη δεύτερη ανισότητα, είτε ξεκινούμε από τη δεύτερη ανισότητα και με ισοδύναμες πράξεις καταλήγουμε στην πρώτη ανισότητα.

1ος τρόπος:

$$\alpha < \beta \underset{\text{Ιδ.3}}{\overset{:\alpha\beta>0}{\Longleftrightarrow}} \frac{\alpha}{\alpha\beta} < \frac{\beta}{\alpha\beta} \Leftrightarrow \frac{1}{\beta} < \frac{1}{\alpha} \Leftrightarrow \frac{1}{\alpha} > \frac{1}{\beta}$$

2ος τρόπος:

$$\frac{1}{\alpha} > \frac{1}{\beta} \overset{\cdot\alpha\beta>0}{\Longleftrightarrow} \alpha\beta\frac{1}{\alpha} > \alpha\beta\cdot\frac{1}{\beta} \Leftrightarrow \beta > \alpha$$

Εφαρμογή 3η: Αν $-2 \le x \le 3$ και $1 \le y \le 2$, να βρεθεί μεταξύ ποιων αριθμών περιέχονται οι τιμές των παραστάσεων: α) x + y, β) x - y και γ) $\frac{1}{2}x - 7y + 5$

α) $\left.\begin{array}{r} -2 \le x \le 3 \\ 1 \le y \le 2 \end{array}\right\} \overset{+}{\Rightarrow} -2+1 \le x+y \le 3+2 \Rightarrow -1 \le x+y \le 5$

β) **Προσοχή! Επειδή μόνο μπορούμε όταν προσθέτουμε κατά μέλη ομόστροφες ανισότητες προκύπτει ομόστροφη ανισότητα, ενώ αν αφαιρούμε δεν προκύπτει απαραίτητα ομόστροφη**, τότε αρχικά $1 \le y \le 2 \overset{\cdot(-1)}{\Longleftrightarrow} -2 \le -y \le -1$. Οπότε:

$$\left.\begin{array}{r} -2 \le x \le 3 \\ -2 \le -y \le -1 \end{array}\right\} \overset{+}{\Rightarrow} -2-2 \le x-y \le 3-1 \Rightarrow -4 \le x-y \le 2$$

γ) $-2 \le x \le 3 \overset{\cdot\frac{1}{2}>0}{\Longleftrightarrow} \frac{1}{2}\cdot(-2) \le \frac{1}{2}\cdot x \le \frac{1}{2}\cdot 3 \Leftrightarrow -1 \le \frac{1}{2}\cdot x \le 1{,}5$ (1)

$1 \le y \le 2 \overset{\cdot(-7)}{\Longleftrightarrow} -14 \le -7y \le -7 \overset{+5}{\Longleftrightarrow} -14+5 \le -7y+5 \le -7+5 \Leftrightarrow -9 \le -7y+5 \le -2$ (2)

(1)+(2) => $-1-9 \le \frac{1}{2}\cdot x - 7y + 5 \le 1{,}5-2 \Rightarrow -10 \le \frac{1}{2}\cdot x - 7y + 5 \le -0{,}5$

Ασκήσεις: 3,4,5,6 σελ. 59-60 σχ. βιβλ. και Εφαρμογή 1ii 1iii σελ. 58