Κεφ. 2 : ΟΙ ΠΡΑΓΜΑΤΙΚΟΙ ΑΡΙΘΜΟΙ (σελίδες 43-78 σχ. βιβλίο)
(Πράξεις και ιδιότητες, Διάταξη, Απόλυτη τιμή, Ρίζα)

§2.1 Οι πράξεις και οι ιδιότητές τους (σελίδες: 43-53 σχ. βιβλίο)

<u>ΘΕΩΡΙΑ</u>

- **Ρητοί αριθμοί** : **Q** = $\{\frac{\alpha}{\beta}$ / α, β ϵ Z, με β $\neq 0\}$. Κάθε ρητός μπορεί να γραφεί ως δεκαδικός ή περιοδικός δεκαδικός (δηλ. με επαναλαμβανόμενα δεκαδικά ψηφία). Π.χ. $-\frac{12}{5}$ = -2,4 , $\frac{1}{3}$ =0,333...= $0,\overline{3}$

- **Άρρητοι αριθμοί**: **Q'**. Δεν μπορούν να γραφούν με μορφή κλάσματος. Τέτοιοι αριθμοί είναι αυτοί που έχουν άπειρα δεκαδικά ψηφία μη επαναλαμβανόμενα. Π.χ. $\sqrt{2}$ =1,414213562... ή όπως το π = 3,14... ή το e = 2,71828...

- **Πραγματικοί αριθμοί : R = QUQ'**

- **Πρόσθεση-Πολλαπλασιασμός**

Ιδιότητα	Πρόσθεση	Πολλαπλασιασμός
Αντιμεταθετική		
Προσεταιριστική		
Ουδέτερο στοιχείο	*Μηδενικό*	*Μοναδιαίο*
Αντίθετο/Αντίστροφο στοιχείο	*Αντίθετο*	*Αντίστροφο*
Επιμεριστική		
		$\alpha\beta = 0 \Leftrightarrow$ .... $\alpha\beta \neq 0 \Leftrightarrow$ ....
	$\alpha = \beta$ *και* $\gamma = \delta \Rightarrow \alpha + \gamma =$	$\alpha = \beta$ *και* $\gamma = \delta \Rightarrow \alpha\gamma =$ ....
	$\alpha = \beta \Leftrightarrow \alpha + \gamma =$ .... *(* $\Leftarrow$ *: διαγραφή ίδιου προσθετέου)*	*Αν* $\gamma \neq 0$, $\alpha = \beta \Leftrightarrow \alpha\gamma =$ .... *(* $\Leftarrow$ *: διαγραφή ίδιου παράγοντα)*

- **Αφαίρεση-Διαίρεση**

Αφαίρεση	**Διαίρεση**
$\alpha - \beta = \alpha + (-\beta)$	$\alpha : \beta = \frac{\alpha}{\beta} = \alpha \cdot \frac{1}{\beta}$ $(\beta \neq 0)$

-Δυνάμεις

Ορισμός: Δύναμη με βάση έναν πραγματικό αριθμό α (α ϵ R) και εκθέτη ένα φυσικό αριθμό ν (ν ϵ N, ν>1) που συμβολίζεται με α^{ν}, λέμε το γινόμενο ν παραγόντων ίσων με τον αριθμό α.

Δηλ. $\boldsymbol{\alpha^\nu = \alpha \cdot \alpha \cdot \alpha \cdot \alpha \cdot \ldots \cdot \alpha}$. Ορίζουμε ακόμη **$\alpha^1 = \alpha$ και $\alpha^0 = 1$ (με $\alpha \neq 0$) και $\alpha^{-\nu} = \dfrac{1}{\alpha^\nu}$, $\alpha \neq 0$ και $\nu \geq 1$.**

Ιδιότητες:

$\alpha^\mu \cdot \alpha^\nu =$ ...., $\alpha^\mu : \alpha^\nu = \dfrac{\alpha^\mu}{\alpha^\nu} =$ .... ($\alpha \neq 0$), $(\alpha \cdot \beta)^\nu =$ .... , $\left(\dfrac{\alpha}{\beta}\right)^\nu =$........... ($\beta \neq 0$), $(\alpha^\mu)^\nu =$ .... μ, ν ακέραιοι αριθμοί.

-Ταυτότητες

Ορισμός: Ταυτότητα λέγεται η ισότητα που επαληθεύεται για οποιεσδήποτε τιμές των γραμμάτων της.

Βασικές ταυτότητες:

$(\alpha + \beta)^2 =$	$(\alpha + \beta)^3 =$
$(\alpha - \beta)^2 =$	$(\alpha - \beta)^3 =$
$\alpha^2 - \beta^2 =$	$\alpha^3 - \beta^3 =$
$(\alpha+\beta+\gamma)^2 =$	$\alpha^3 + \beta^3 =$
$\alpha^\nu - \beta^\nu = (\alpha-\beta)(\alpha^{\nu-1} + \alpha^{\nu-2}\beta + \ldots + \alpha\beta^{\nu-2} + \beta^{\nu-1})$	$\alpha^\nu + \beta^\nu = (\alpha+\beta)(\alpha^{\nu-1} - \alpha^{\nu-2}\beta + \ldots - \alpha\beta^{\nu-2} + \beta^{\nu-1})$, *όταν ν περιττός*
$\alpha^3+\beta^3+\gamma^3-3\alpha\beta\gamma = \dfrac{1}{2}(\alpha+\beta+\gamma)[(\alpha-\beta)^2+(\beta-\gamma)^2+(\gamma-\alpha)^2]$. *Αν* $\alpha+\beta+\gamma=0$ *ή* $\alpha=\beta=\gamma \Leftrightarrow \alpha^3+\beta^3+\gamma^3-3\alpha\beta\gamma$ *(ταυτότητα Euler)*	

-Αναλογίες

Ορισμός: Αναλογία ονομάζουμε την ισότητα δύο λόγων. Για παράδειγμα $\dfrac{\alpha}{\beta} = \dfrac{\gamma}{\delta}$

Ιδιότητες:

$\dfrac{\alpha}{\beta} = \dfrac{\gamma}{\delta} \Leftrightarrow \alpha\delta = \ldots\ldots,$ $\qquad \dfrac{\alpha}{\beta} = \dfrac{\gamma}{\delta} \Leftrightarrow \dfrac{\alpha}{\gamma} = \dfrac{\ldots.}{\ldots.},$ $\qquad \dfrac{\alpha}{\beta} = \dfrac{\gamma}{\delta} \Leftrightarrow \dfrac{\delta}{\beta} = \dfrac{\ldots..}{\ldots..}$

$\dfrac{\alpha}{\beta} = \dfrac{\gamma}{\delta} \Leftrightarrow \dfrac{\alpha \pm \beta}{\beta} = \dfrac{\ldots\ldots\ldots}{\ldots\ldots\ldots},$ $\qquad \dfrac{\alpha}{\beta} = \dfrac{\gamma}{\delta} \Leftrightarrow \dfrac{\alpha}{\alpha \pm \beta} = \dfrac{\ldots\ldots\ldots}{\ldots\ldots\ldots}$

$\dfrac{\alpha}{\beta} = \dfrac{\gamma}{\delta} = \ldots = \dfrac{\kappa}{\lambda} = \dfrac{\alpha + \gamma + \ldots + \kappa}{\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots}$