A
(9)

ΘΕΩΡΙΑ:

ΑΣΚΗΣΕΙΣ:

ΜΟ:

ΤΕΤΡΑΜΗΝΙΑΙΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ Β' ΤΑΞΗΣ
2° ΠΡΟΤΥΠΟ ΛΥΚΕΙΟ ΘΕΣΣΑΛΟΝΙΚΗΣ
ΤΕΤΑΡΤΗ 21 ΟΚΤΩΒΡΙΟΥ 2020
ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ:
ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ

ΘΕΜΑ 1ο

Α. Να χαρακτηρίσετε με Σ(ωστό) ή Λ(άθος) τις προτάσεις που ακολουθούν.

1.Λ. Αν $|\vec{\alpha}|=|\vec{\beta}|$, τότε $\vec{\alpha}=\vec{\beta}$

2.Λ $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{OA}-\overrightarrow{OB}$

3.Σ. $|\vec{\alpha}|=|-\vec{\alpha}|$

4.Λ.. Αν $\lambda\cdot\vec{\alpha}=\vec{\beta}$ με $\lambda>0$, τότε $\vec{\alpha}\uparrow\downarrow\vec{\beta}$

5.Σ. Αν $|\overrightarrow{MA}|=|\overrightarrow{MB}|$ με Α,Β σταθερά σημεία, τότε το Μ βρίσκεται στη μεσοκάθετη του ΑΒ.

6.Σ Αν $\vec{u}\parallel y'y$, τότε $\vec{u}=(0,y)$

Μονάδες 6

Β. Να συμπληρώσετε τις σχέσεις:

1. $\overrightarrow{AB}=-\overrightarrow{BA}$

2. Μ μέσο του ΑΒ $\Leftrightarrow \overrightarrow{MA}=\overrightarrow{BM}$

3. Έστω $\vec{\alpha}=(x_1,y_1)$ και $\vec{\beta}=(x_2,y_2)$, τότε $\vec{\alpha}+\vec{\beta}=$ ...(x_1+x_2, y_1+y_2)

4. Έστω $\vec{\alpha}=(x_1,y_1)$ και $\vec{\beta}=(x_2,y_2)$, τότε $\lambda\vec{\alpha}+\mu\vec{\beta}=(\lambda x_1+\mu x_2, \lambda y_1+\mu y_2)$

Μονάδες 4

Γ.
Τι γνωρίζετε για την γωνία δύο διανυσμάτων;

Μονάδες 5

σελ. 14 σχ. βιβλίο

Δ. Να αποδείξετε ότι η διανυσματική ακτίνα του μέσου τμήματος ισούται με το ημιάθροισμα των διανυσματικών ακτίνων των άκρων του τμήματος.

Μονάδες 10

σελ 25. σχ. βιβλίο

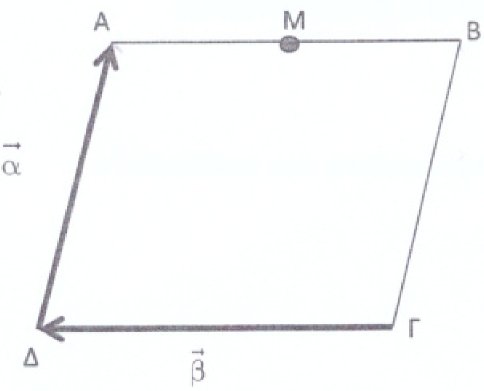
ΘΕΜΑ 2ο

Σε ένα παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ με Μ μέσο της ΑΒ, $\vec{ΔΑ}=\vec{α}$ και $\vec{ΓΔ}=\vec{β}$, τότε υπολόγισε ως γραμμικό συνδυασμό των $\vec{α}$ και $\vec{β}$ τα διανύσματα:

Σύντομες διαδρομές

$\vec{α} = \vec{ΔΑ} = \vec{ΓΒ}$

$\vec{β} = \vec{ΓΔ} = \vec{ΒΑ}$



1. $\vec{ΑΓ}=$ $\vec{ΑΔ}+\vec{ΔΓ} = -\vec{α}-\vec{β}$ ......
2. $\vec{ΔΒ}=$ $\vec{ΔΓ}+\vec{ΓΒ} = -\vec{β}+\vec{α}$ ......
3. $\vec{ΔΜ}=$ $\vec{ΔΑ}+\vec{ΑΜ} = \vec{α}-\frac{\vec{β}}{2}$ ......
4. $\vec{ΜΓ}=$ $\vec{ΜΒ}+\vec{ΒΓ} = -\frac{\vec{β}}{2}-\vec{α}$ ......
5. $\vec{ΜΑ}=$ $\frac{\vec{β}}{2}$ ......

Μονάδες 25

ΘΕΜΑ 3ο

1. Για τα διανύσματα $\vec{ΡΑ}$ και $\vec{ΡΒ}$ και $\vec{ΡΓ}$ ισχύει $3\vec{ΡΑ} -5\vec{ΡΒ}+2\vec{ΡΓ}=\vec{0}$. Να αποδείξετε ότι τα σημεία Α, Β, Γ είναι συνευθειακά.

$3\vec{ΡΑ}-5\vec{ΡΒ}+2\vec{ΡΓ}=\vec{0} \Rightarrow 3\vec{ΡΑ}-3\vec{ΡΒ}-2\vec{ΡΒ}+2\vec{ΡΓ}=\vec{0} \Rightarrow$

$3(\vec{ΡΑ}-\vec{ΡΒ})-2(\vec{ΡΒ}-\vec{ΡΓ})=\vec{0} \Rightarrow 3\vec{ΒΑ}-2\vec{ΓΒ}=\vec{0} \Rightarrow$

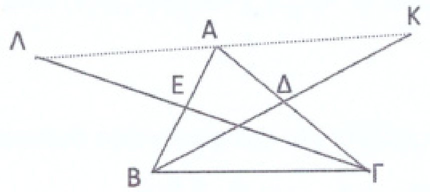
$3\vec{ΒΑ}=2\vec{ΓΒ} \Rightarrow \vec{ΒΑ}=\frac{2}{3}\vec{ΓΒ} \Rightarrow \vec{ΒΑ} \parallel \vec{ΓΒ} \Rightarrow ΒΑ \parallel ΓΒ$

Επειδή Β κοινό σημείο των ΒΑ, ΓΒ, τότε Α, Β, Γ συνευθειακά.

Μονάδες 25

ΘΕΜΑ 4ο

1. Θεωρούμε τρίγωνο ΑΒΓ.
Προεκτείνουμε τις διαμέσους ΒΔ και ΓΕ κατά τμήματα ΔΚ=ΒΔ και ΕΛ=ΓΕ.
Να δείξετε ότι το Α είναι μέσο του ΚΛ.



Μονάδες 25

$\vec{ΑΚ} = \vec{ΑΔ}+\vec{ΔΚ} = \frac{\vec{ΑΓ}}{2}+\vec{ΒΔ} = \frac{\vec{ΑΓ}}{2}+\frac{\vec{ΒΑ}+\vec{ΒΓ}}{2} = \frac{\vec{ΑΓ}+\vec{ΒΑ}+\vec{ΒΓ}}{2}$ (1)

Δ μέσο ΑΓ, $\vec{ΔΚ}=\vec{ΒΔ}$

$\vec{ΒΔ} = \frac{\vec{ΒΑ}+\vec{ΒΓ}}{2}$ (διανυσματική ακτίνα μέσου)

$\vec{ΑΛ} = \vec{ΑΕ}+\vec{ΕΛ} = \frac{\vec{ΑΒ}}{2}+\vec{ΓΕ} = \frac{\vec{ΑΒ}}{2}+\frac{\vec{ΓΑ}+\vec{ΓΒ}}{2} = \frac{\vec{ΑΒ}+\vec{ΓΑ}+\vec{ΓΒ}}{2}$ (2)

Ε μέσο ΑΒ, $\vec{ΕΛ}=\vec{ΓΕ}$

$\vec{ΓΕ} = \frac{\vec{ΓΑ}+\vec{ΓΒ}}{2}$ (διανυσματική ακτίνα μέσου)

Από (1) και (2): $\vec{ΑΚ}=-\vec{ΑΛ} \Leftrightarrow \vec{ΑΚ}=\vec{ΛΑ} \Leftrightarrow$ Α μέσο του ΚΛ

(Ενδεικτική λύση)

ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ !

B
(8)

ΘΕΩΡΙΑ:	
ΑΣΚΗΣΕΙΣ:	
ΜΟ:	

ΤΕΤΡΑΜΗΝΙΑΙΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ Β΄ ΤΑΞΗΣ
2[o] ΠΡΟΤΥΠΟ ΛΥΚΕΙΟ ΘΕΣΣΑΛΟΝΙΚΗΣ
ΤΕΤΑΡΤΗ 21 ΟΚΤΩΒΡΙΟΥ 2020
ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ:
ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ

ΘΕΜΑ 1ο

Α. Να χαρακτηρίσετε με Σ(ωστό) ή Λ(άθος) τις προτάσεις που ακολουθούν.

1.Λ. Αν $\lambda>0$ και $|\vec{\alpha}|=\lambda|\vec{\beta}|$, τότε $\vec{\alpha}\parallel\vec{\beta}$

2.Λ. Αν $\vec{u}\parallel x'x$, τότε $\vec{u}=(0,y)$

3.Λ.. Αν $|\vec{\alpha}+\vec{\beta}|=|\vec{\alpha}|+|\vec{\beta}|$, τότε $\vec{\alpha}\uparrow\downarrow\vec{\beta}$

4.Σ. Αν ΑΜ διάμεσος τριγώνου ΑΒΓ, τότε $\overrightarrow{AM}=\dfrac{\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{A\Gamma}}{2}$

5Λ.$(\widehat{\vec{\alpha},\vec{\beta}})+(\widehat{\vec{\beta},-\vec{\alpha}})=2\pi$

6.Σ Αν $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{B\Gamma}=\vec{0}$, τότε τα σημεία Α,Β,Γ είναι συνευθειακά.

Μονάδες 6

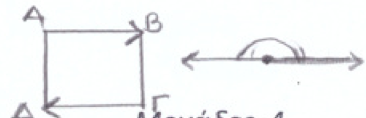
Β. Να συμπληρώσετε τις σχέσεις:

1. $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{\Delta\Gamma}$ $\Leftrightarrow$ ΑΒΓΔπαραλληλόγραμμο

2. Έστω $\vec{\alpha}=(x_1,y_1)$ και $\vec{\beta}=(x_2,y_2)$, τότε $\vec{\alpha}=\vec{\beta}\Leftrightarrow$ ...$x_1=x_2$ και $y_1=y_2$

3. Έστω $\vec{\alpha}=(x_1,y_1)$, τότε $\lambda\vec{\alpha}=$ ...$(\lambda x_1,\lambda y_1)$...

4. Αν ΑΒΓΔ τετράγωνο, τότε $(\widehat{\overrightarrow{AB},\overrightarrow{\Gamma\Delta}})=$ ...π rad (=180°)



Μονάδες 4

Γ.

Πότε δύο μη μηδενικά διανύσματα $\vec{\alpha}$ και $\vec{\beta}$ λέγονται ίσα και πότε αντίθετα ; Πώς τα συμβολίζουμε ;

σελ. 13-14 σχ. βιβλίο

Μονάδες 5

Δ. Να αποδείξετε ότι κάθε διάνυσμα του επιπέδου $\vec{\alpha}$ γράφεται κατά μοναδικό τρόπο ως γραμμικός συνδυασμός των διανυσμάτων $\vec{i}$ και $\vec{j}$, δηλ. $\vec{\alpha}=\lambda\vec{i}+\mu\vec{j}$

Μονάδες 10

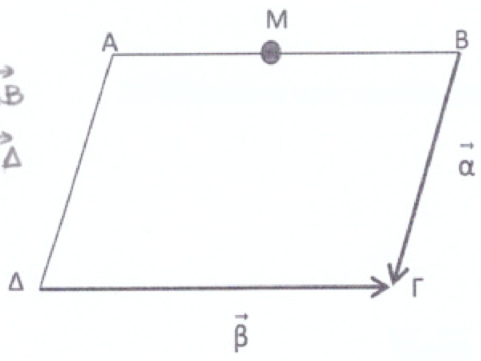
σελ. 31 σχ. βιβλίο

ΘΕΜΑ 2°

2. Σε ένα παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ με Μ μέσο της ΑΒ, $\overrightarrow{B\Gamma}=\vec{\alpha}$ και $\overrightarrow{\Delta\Gamma}=\vec{\beta}$, τότε υπολόγισε ως γραμμικό συνδυασμό των $\vec{\alpha}$ και $\vec{\beta}$ τα διανύσματα:

$\vec{b}=\overrightarrow{\Delta\Gamma}=\overrightarrow{AB}$

$\vec{a}=\overrightarrow{B\Gamma}=\overrightarrow{A\Delta}$



Σύντομες διαδρομές

1. $\overrightarrow{A\Gamma}=\overrightarrow{A\Delta}+\overrightarrow{\Delta\Gamma}=\vec{a}+\vec{b}$
2. $\overrightarrow{\Delta B}=\overrightarrow{\Delta\Gamma}+\overrightarrow{\Gamma B}=\vec{b}-\vec{a}$
3. $\overrightarrow{\Delta M}=\overrightarrow{\Delta A}+\overrightarrow{AM}=-\vec{a}+\frac{\vec{b}}{2}$
4. $\overrightarrow{M\Gamma}=\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{B\Gamma}=\frac{\vec{b}}{2}+\vec{a}$
5. $\overrightarrow{BM}=-\frac{\vec{b}}{2}$

Μονάδες 25

ΘΕΜΑ 3°

Αν $\overrightarrow{OA}=\vec{\alpha}+2\vec{\beta}$, $\overrightarrow{OB}=2\vec{\alpha}-\vec{\beta}$ και $\overrightarrow{O\Gamma}=4\vec{\alpha}-7\vec{\beta}$, να αποδείξετε ότι τα σημεία Α, Β, Γ είναι συνευθειακά.

Μονάδες 25

$\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA}=2\vec{a}-\vec{b}-\vec{a}-2\vec{b}=\vec{a}-3\vec{b}$

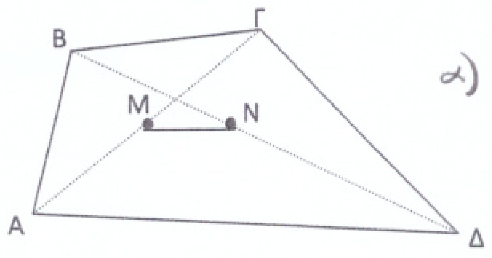
$\overrightarrow{A\Gamma}=\overrightarrow{O\Gamma}-\overrightarrow{OA}=4\vec{a}-7\vec{b}-\vec{a}-2\vec{b}=3\vec{a}-9\vec{b}=3(\vec{a}-3\vec{b})$

Παρατηρούμε ότι $\overrightarrow{A\Gamma}=3\overrightarrow{AB}$, άρα $\overrightarrow{A\Gamma}\parallel AB$. Τότε $A\Gamma\parallel AB$.
Επειδή Α κοινό σημείο των ΑΓ, ΑΒ, τα σημεία Α, Β, Γ είναι συνευθειακά.

ΘΕΜΑ 4°

Δίνεται τετράπλευρο ΑΒΓΔ. Αν Μ, Ν είναι τα μέσα των διαγωνίων του ΑΓ και ΒΔ αντίστοιχα, να αποδείξετε ότι α) $\overrightarrow{MN}=\frac{1}{2}(\overrightarrow{A\Delta}-\overrightarrow{B\Gamma})$ και β) $\overrightarrow{MN}=\frac{1}{2}(\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{\Delta\Gamma})$

Μονάδες 25



α) $\overrightarrow{MN}=\overrightarrow{AN}-\overrightarrow{AM}=\overrightarrow{A\Delta}+\overrightarrow{\Delta N}-\frac{\overrightarrow{A\Gamma}}{2}$ | Μ μέσο ΑΓ, Ν μέσο ΒΔ

$=\overrightarrow{A\Delta}+\frac{\overrightarrow{\Delta B}}{2}-\frac{\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{B\Gamma}}{2}=$

$=\frac{\overrightarrow{A\Delta}}{2}+\frac{\overrightarrow{A\Delta}}{2}+\frac{\overrightarrow{\Delta B}}{2}-\frac{\overrightarrow{AB}}{2}-\frac{\overrightarrow{B\Gamma}}{2}$

$=\frac{\overrightarrow{A\Delta}}{2}+\cancel{\frac{\overrightarrow{AB}}{2}}-\cancel{\frac{\overrightarrow{AB}}{2}}-\frac{\overrightarrow{B\Gamma}}{2}$

$=\frac{1}{2}(\overrightarrow{A\Delta}-\overrightarrow{B\Gamma})$

β) $\overrightarrow{MN}=\overrightarrow{\Delta N}-\overrightarrow{\Delta M}=$

$=\frac{\overrightarrow{\Delta B}}{2}-\frac{\overrightarrow{\Delta A}+\overrightarrow{\Delta\Gamma}}{2}$ | Ν μέσο ΔΒ, ΔΜ διανυσματική ακτίνα μέσου

$=\frac{\overrightarrow{\Delta B}-\overrightarrow{\Delta A}-\overrightarrow{\Delta\Gamma}}{2}$

$=\frac{\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{\Delta\Gamma}}{2}$

$=\frac{1}{2}(\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{\Delta\Gamma})$

ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ !