1ο ΠΡΟΤΥΠΟ ΓΥΜΝΑΣΙΟ ΘΕΣΣΑΛΟΝΙΚΗΣ - Β΄ ΓΥΜΝΑΣΙΟΥ- 29/10/2020

Εργασία στις αλγεβρικές παραστάσεις και στις εξισώσεις

Ονοματεπώνυμο:...

Α.ΑΛΓΕΒΡΙΚΕΣ ΠΑΡΑΣΤΑΣΕΙΣ

Θυμάμαι!

1. Αλγεβρική λέγεται μια παράσταση που περιέχει πράξεις με αριθμούς και μεταβλητές. Για παράδειγμα, η παράσταση $Α = 2α^2 + β^2 − (α + β) + 1$ είναι αλγεβρική.
2. Αν σε μια αλγεβρική παράσταση αντικαταστήσουμε τις μεταβλητές της με αριθμούς, τότε η τιμή της αριθμητικής παράστασης που προκύπτει λέγεται τιμή της αλγεβρικής παράστασης. Για παράδειγμα , η τιμή της παράστασης $Α = 2α^2 + β^2 − (α + β) + 1$ για $α = -3$ και $β = 2$ είναι: $Α = 2(-3)^2 + 2^3 -(-3+2) +1 = 2•9 +8-(-2)+1=18+8+2+1=29$
3. Οι προσθετέοι της αλγεβρικής παράστασης λέγονται όροι της παράστασης. Για παράδειγμα, οι όροι της παράστασης $Α = 2α^2 + β^2 − (α + β) + 1$ είναι: $2α^2$, $β^2$, $− (α + β)$, 1.
Επαναληπτικές ασκήσεις
4. Επιμεριστική ιδιότητα: $α \cdot (β + γ) = α\cdot β + α\cdot γ$ και $α \cdot (β - γ) = α\cdot β + α\cdot γ$. Για παράδειγμα , $-2(3 - β) = - (2\cdot3) +(2\cdot β) = -6 +2β$,
$-α (-β - 3 + δ) = (α\cdot β) +(3\cdot α) - (α\cdot δ) = αβ+3α-αδ$
Η επιμεριστική ιδιότητα μας βοηθάει στην αναγωγή όμοιων όρων, δηλαδή στην απλοποίηση της αλγεβρικής παράστασης. Για παράδειγμα, $α -9 + 2(3α-β) - 5(α-2β-1) = α - 9 + (2\cdot 3α) - (2\cdot β) - (5\cdot α)+ (5\cdot 2β)+(5\cdot 1) = α - 9 + 6α - 2β - 5α +10β +5 = (α + 6α - 5α) +(10β - 2β) +(5-9) = 2α +8β-4$

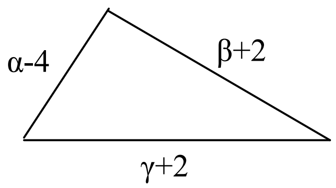
Επαναληπτικές ασκήσεις στις αλγεβρικές παραστάσεις

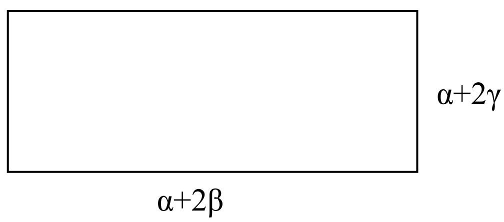
1. Δίνεται η παράσταση $3(x − 2y) − 2(3x − y) − (5 − y)$.
α) Να γράψετε τους όρους της
β) Να την απλοποιήσετε
γ) Να βρείτε την τιμή της αν $x + y = −2$.

Λύση

α) Όροι της παράστασης: **$3(x − 2y)$, $− 2(3x − y)$, $− (5 − y)$**
β) $3\cdot x-3\cdot 2y-2\cdot 3x+2\cdot y-5+y=3x-6y-6x+2y-5+y= -3x-3y-5 = -3(x+y)-5$
γ) Αφού $x + y = −2$, τότε $-3(x+y)-5 = -3(-2)-5= 6-5 =1$

2. Αν το ορθογώνιο έχει περίμετρο 40 cm, να βρείτε την περίμετρο του τριγώνου.





Λύση

Περίμετρος τριγώνου = $α-4+β+2+γ+2 = α+β+γ+4-4 = α+β+γ$
Περίμετρος ορθογωνίου = $2(α+2β)+2(α+2γ) = 2α+4β+2α+4γ = 4α+4β+4γ = 4(α+β+γ)$
Από την εκφώνηση γνωρίζουμε ότι Περίμετρος ορθογωνίου = 40 cm. Άρα $4(α+β+γ) = 40$, οπότε $α+β+γ = 40:4 = 10$.
Άρα η περίμετρος του τριγώνου είναι 10cm.

Β. ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ

Θυμάμαι!

1. Για οποιουσδήποτε πραγματικούς αριθμούς ισχύει μόνο μία από τις σχέσεις:

$$α = β, \quad α < β, \quad α > β$$

2. Αν $α = β$, τότε $α + γ = β + γ$. Αντίστροφα: αν $α + γ = β + γ$, τότε $α = β$
(διαγραφή του γ)
3. Αν $α = β$, τότε $α - γ = β - γ$. Αντίστροφα: αν $α - γ = β - γ$, τότε $α = β$
(διαγραφή του γ)
4. Αν $α = β$, τότε $α \cdot γ = β \cdot γ$. Αντίστροφα: αν $α \cdot γ = β \cdot γ$ και $γ \neq 0$, τότε $α = β$
(διαγραφή του γ)
5. Αν $α = β$ και $γ \neq 0$, τότε $\frac{α}{γ} = \frac{β}{γ}$. Αντίστροφα: αν $\frac{α}{γ} = \frac{β}{γ}$ και $γ \neq 0$, τότε $α = β$
(διαγραφή του γ)
6. Με βάση τις παραπάνω ιδιότητες λύνονται οι εξισώσεις.
   - ✓ Εξίσωση είναι μια ισότητα που περιέχει έναν άγνωστο αριθμό x.
   - ✓ Λύση ή ρίζα μιας εξίσωσης λέγεται ο αριθμός που πρέπει να βάλουμε στη θέση του αγνώστου, ώστε η ισότητα που προκύπτει να αληθεύει. Για παράδειγμα, στην εξίσωση $-3x - 2 = 13 - 2x$ ο αριθμός $x = -15$ είναι λύση, διότι αν κάνουμε την επαλήθευση έχουμε: $-3 \cdot (-15) - 2 = 13 - 2 \cdot (-15)$ δηλαδή, $45 - 2 = 13 + 30$, δηλαδή, $43 = 43$, που ισχύει.
   - ✓ Αν η εξίσωση έχει ή παίρνει τη μορφή $0x = α$, με $α \neq 0$, λέγεται αδύνατη, ενώ με $α = 0$, λέγεται αόριστη ή ταυτότητα
   - ✓ Αν η εξίσωση έχει ή παίρνει τη μορφή $\frac{Α}{Β} = \frac{Γ}{Δ}$, τότε προτιμάμε τη μέθοδο του χιαστί. $\frac{\mathbf{Α}}{\mathbf{Β}} = \frac{\mathbf{Γ}}{\mathbf{Δ}}$.
   - ✓ Εξισώσεις με τις ίδιες λύσεις ή ρίζες λέγονται ισοδύναμες. Για παράδειγμα οι εξισώσεις $2x-1=7$ και η εξίσωση $2x=8$, είναι ισοδύναμες με λύση $x = 4$.

Επαναληπτικές ασκήσεις στις εξισώσεις

1. Να λύσετε τις εξισώσεις:

i. $3(x - 2) - 5(1 - 2x) = 2(4x - 4) - 5(2 - x)$

Λύση

$3(x - 2) - 5(1 - 2x) = 2(4x - 4) - 5(2 - x)$,

$3x-6-5+10x=8x-8-10+5x$,

$3x+10x-8x-5x=-10-8+5+6$,

$0x = -7$, αδύνατη.

ii. $\frac{3y - 2}{2} - \frac{y - 2}{3} = \frac{y - 2}{4} - \frac{y - 14}{6}$,

Λύση

$$\overset{6}{\cancel{12}}\,6\,\frac{3y-2}{\cancel{2}} - \overset{4}{\cancel{12}}\frac{y-2}{\cancel{3}} = \overset{3}{\cancel{12}}\,\frac{y-2}{\cancel{4}} - \overset{2}{\cancel{12}}\frac{y-14}{\cancel{6}},$$

$$6(3y-2)-4(y-2)=3(y-2)-2(y-4),$$

18y-12-4y+8=3y-6-2y+28,

18y-4y-3y+2y= -6+28+12-8,

13y = 26,

y = 26/13 = 2

iii. $\frac{1}{2}\left(\frac{\alpha+2}{3}+2\right) - \frac{3}{4}\left(4-\frac{\alpha-2}{2}\right) = \frac{1}{3}\cdot\frac{\alpha-4}{4} - \frac{14-\alpha}{6}$ (Υπόδειξη: Για πιο εύκολη απαλοιφή παρονομαστών, κάνε πρώτα επιμεριστική ιδιότητα στους όρους του α΄ μέλους της εξίσωσης)

Λύση

$$\frac{1}{2}\cdot\frac{\alpha+2}{3}+\frac{1}{2}\cdot 2-\frac{3}{4}\cdot 4+\frac{3}{4}\cdot\frac{\alpha-2}{2}=\frac{1}{3}\cdot\frac{\alpha-4}{4} - \frac{14-\alpha}{6},$$

Κάνουμε τους πολλαπλασιασμούς κλασμάτων (αριθμητή επί αριθμητή και παρονομαστή επί παρονομαστή)

$$\frac{\alpha+2}{6}+\underbrace{1-3}_{2}+\frac{3\alpha-6}{8}=\frac{\alpha-4}{12} - \frac{14-\alpha}{6},$$

Κάνουμε απαλοιφή παρονομαστών με ΕΚΠ = 24

$$24\frac{\alpha+2}{6}+24\cdot(-2)+24\frac{3\alpha-6}{8}=24\frac{\alpha-4}{12} - 24\frac{14-\alpha}{6},$$

4(α+2) - 48 + 3(3α-6) = 2(α-4) - 4(14-α) ,

4α + 8 - 48 +9α -18 = 2α - 8 -56 +4α ,

9α - 2α = -8 -56 -8 +48 ,

7α = -6

α = -6/7

iv. Να βρείτε την τιμή του α, αν οι εξισώσεις x+4=2 και αx-x = α(2x-1)-3 είναι ισοδύναμες.

x+4 = 2, x = 2-4 x = -2	Αφού οι εξισώσεις είναι ισοδύναμες, τότε έχουν την ίδια λύση x = -2. Βάζουμε στην εξίσωση αx-x = α(2x-1)-3 όπου x το -2 και προσπαθούμε να βρούμε την τιμή της μεταβλητής α. Δηλαδή, - 2α - (-2) = α(- 4 - 1) - 3, - 2α + 2 = - 5α - 3, - 2α + 5α = - 3 - 2, 3α = -5, α = -5/3. Για α = -5/3 η δεύτερη εξίσωση αx-x = α(2x-1)-3 γράφεται $-\frac{5}{3}x - x = -\frac{5}{3}(2x-1)-3$
Άρα για α = -5/3, οι δύο εξισώσεις χ + 4 = 2 και $-\frac{5}{3}x - x = -\frac{5}{3}(2x-1)-3$ έχουν την ίδια λύση x = -2, δηλαδή είναι ισοδύναμες.	

2. Να λύσετε τα προβλήματα:

i. Για να καλυφθούν τα έξοδα της εκδρομής ενός τμήματος της Β΄ γυμνασίου, ο/η κάθε μαθητής/τρια έπρεπε να πληρώσει 6,5 €. Επειδή όμως 4 μαθητές/τριες δεν μπορούσαν να συμμετάσχουν οι υπόλοιποι πλήρωσαν 7,8 €. Πόσους/σες μαθητές/τριες έχει το τμήμα;

Λύση (ενδεικτική)

Έστω x όλοι/ες οι μαθητές/τριες του σχολείου . Ο/Η καθένας/μία θα πλήρωνε 6,5 €. Συνεπώς το κόστος της εκδρομής είναι 6,5x €. Επειδή δεν θα συμμετέχουν 4 μαθητές/τριες, οι υπόλοιποι x - 4 θα πληρώσουν από 7,8 € , δηλαδή 7,8(x-4) €.

Επειδή το κόστος δεν αλλάζει, θα έχουμε :
6,5x =7,8(x-4) <=> 6,5x = 7,8x-31,2 <=> 6,5x-7,8x = 31,2 <=>
-1,3x = 31,2 <=> x =24

Άρα όλοι/ες οι μαθητές/τριες είναι 24.

ii. Μία ορειβάτισσα χρειάστηκε 6 ώρες για την άνοδο και την κάθοδο ενός βουνού. Αν στην άνοδο διανύει 300 m/h και στην κάθοδο 600 m/h, να βρείτε πόσα μέτρα είναι η άνοδος.

Λύση (ενδεικτική)

Δεχόμαστε ότι όσα μέτρα είναι η άνοδος τόσα μέτρα είναι και η κάθοδος.

Έστω x τα μέτρα της ανόδου. Αφού η ορειβάτισσα στην άνοδο διανύει 300 μέτρα τη μία ώρα, για τα x μέτρα της ανόδου θα χρειαστεί x/300 ώρες. Ομοίως, αφού διανύει στην κάθοδο 600 μέτρα τη μία ώρα, για τα x μέτρα της καθόδου θα χρειαστεί x/600 ώρες. Επειδή ο συνολικός χρόνος είναι 6 ώρες, θα έχουμε:

$$\frac{x}{300} + \frac{x}{600} = 6 \iff 600\frac{x}{300} + 600\frac{x}{600} = 600 \cdot 6 \iff 2x + x = 3600 \iff 3x = 3600 \iff$$
x = 1200

Άρα τα μέτρα της ανόδου είναι 1200.

iii. 50 επιβάτες ενός πλοίου κατέβηκαν σε δύο λιμάνια Α και Β. Το εισιτήριο για το λιμάνι Α είναι 55 € και για το λιμάνι Β 72€. Αν όλοι οι επιβάτες πλήρωσαν 3090 €, να βρείτε πόσοι επιβάτες κατέβηκαν στο λιμάνι Α και πόσοι στο λιμάνι Β.

Λύση (ενδεικτική)

Έστω x οι επιβάτες που κατέβηκαν στο λιμάνι Α.

Με το εισιτήριο να κοστίζει 55 € για το λιμάνι Α, οι x επιβάτες πλήρωσαν όλοι $55x$ €.

Ομοίως, οι υπόλοιποι $50 - x$ επιβάτες που κατέβηκαν στο λιμάνι Β, με το εισιτήριο να κοστίζει 72 €, πλήρωσαν όλοι $72(50 - x)$.

Επειδή οι επιβάτες που κατέβηκαν στα δύο λιμάνια πλήρωσαν 3090 €, θα έχουμε:

$55x + 72(50 - x) = 3090 \Leftrightarrow 55x - 72x = 3090 - 3600 \Leftrightarrow -17x = -510 \Leftrightarrow 17x = 510 \Leftrightarrow x = 510:17 \Leftrightarrow x = 30$.

Άρα οι επιβάτες που κατέβηκαν στο λιμάνι Α είναι 30 και εκείνοι που κατέβηκαν στο λιμάνι Β είναι 50-30 = 20.

ΣΧΟΛΙΟ

1. Κάποιες φορές μπορούμε τον άγνωστο να μην τον θέσουμε από το ερώτημα του προβλήματος, αλλά να χρησιμοποιήσουμε ως άγνωστο κάποια άλλη μεταβλητή του προβλήματος μέσα από την εκφώνηση. Για παράδειγμα, στο πρόβλημα με την ορειβάτισσα, μπορούμε να βάλουμε ως άγνωστο, αντί τα μέτρα της ανόδου, το χρόνο της ανόδου.

Δηλ.

Έστω x οι ώρες που χρειάστηκε η ορειβάτισσα για την άνοδο. Αφού η ορειβάτισσα στην άνοδο διανύει 300 μέτρα τη μία ώρα, στις x ώρες διάνυσε $300x$ μέτρα. Ομοίως, αφού τις μένουν $6-x$ ώρες και διανύει στην κάθοδο 600 μέτρα τη μία ώρα, στις $6-x$ ώρες διανύει $600(6-x)$ μέτρα. Επειδή ο συνολικός χρόνος είναι 6 ώρες, θα έχουμε:

Επειδή όσα μέτρα είναι η άνοδος τόσα μέτρα είναι και η κάθοδος, θα έχουμε:

$300x = 600(6-x) \Leftrightarrow \ldots \Leftrightarrow x = 4$.Άρα χρειάστηκε 4 ώρες για την άνοδο και διάνυσε $4 \cdot 300 = 1200$ μέτρα.

2. Επίσης, όλα τα παραπάνω προβλήματα λύνονται και με τη βοήθεια συστημάτων, τα οποία όμως θα τα μάθετε καλύτερα στην γ΄ γυμνασίου!

3. Μην ξεχνάτε και την πρακτική αριθμητική ως μέθοδο λύσης προβλημάτων!