Α΄ ΛΥΚΕΙΟΥ

Πρόβλημα 1

Οι αριθμοί α, β είναι θετικοί και τέτοιοι ώστε

$$10\left(\alpha^2+\beta^2\right)=29\alpha\beta \qquad \text{και} \qquad \alpha+\beta=7.$$

Να υπολογίσετε την τιμή των αθροισμάτων $\dfrac{1}{\alpha}+\dfrac{1}{\beta}$ και $\dfrac{1}{\alpha^2}+\dfrac{1}{\beta^2}$.

Λύση

Από την ταυτότητα $(\alpha+\beta)^2=\alpha^2+\beta^2+2\alpha\beta$ και τις σχέσεις

$$10\left(\alpha^2+\beta^2\right)=29\alpha\beta \qquad \text{και} \qquad \alpha+\beta=7.$$

παίρνουμε ότι:

$$10\left[(\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta\right]=29\alpha\beta \Rightarrow 10(\alpha+\beta)^2-20\alpha\beta=29\alpha\beta$$

$$\Rightarrow 10(\alpha+\beta)^2=49\alpha\beta \overset{\alpha+\beta=7}{\Rightarrow} \alpha\beta=\frac{10(\alpha+\beta)^2}{49}=\frac{10\cdot 7^2}{49}\Rightarrow \alpha\beta=10.$$

Έτσι έχουμε:

$$\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}=\frac{\alpha+\beta}{\alpha\beta}=\frac{7}{10} \text{ και}$$

$$\frac{1}{\alpha^2}+\frac{1}{\beta^2}=\left(\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}\right)^2-\frac{2}{\alpha\beta}=\left(\frac{7}{10}\right)^2-\frac{2}{10}=\frac{49}{100}-\frac{2}{10}=\frac{29}{100}.$$

Διαφορετικά, αφού πρώτα βρούμε ότι $\alpha\beta=10$ μπορούμε να προχωρήσουμε ως εξής: Από την εξίσωση $\alpha+\beta=7$ έχουμε ότι $\beta=7-\alpha$, οπότε με αντικατάσταση του β στην εξίσωση $\alpha\beta=10$ έχουμε:

$$\alpha(7-\alpha)=10 \Leftrightarrow 7\alpha-\alpha^2=10 \Leftrightarrow \alpha^2-7\alpha+10=0.$$

Η τελευταία εξίσωση έχει διακρίνουσα $\Delta=9$ και ρίζες $\alpha=\dfrac{7\pm 3}{2}\Leftrightarrow \alpha=5$ ή $\alpha=2$, οπότε έχουμε: $(\alpha,\beta)=(5,2)$ ή $(\alpha,\beta)=(2,5)$. Με αντικατάσταση βρίσκουμε άμεσα και από τα δύο ζεύγη: $\dfrac{1}{\alpha}+\dfrac{1}{\beta}=\dfrac{7}{10}$ και $\dfrac{1}{\alpha^2}+\dfrac{1}{\beta^2}=\dfrac{29}{100}$.

Πρόβλημα 2

Να προσδιορίσετε το μεγαλύτερο και το μικρότερο από τα κλάσματα:

$$\frac{3019}{3020}, \frac{3020}{3021}, \frac{3021}{3022}, \frac{4019}{4020}, \frac{4020}{4021}, \frac{4021}{4022},$$

χωρίς να τα μετατρέψετε σε δεκαδικό αριθμό. Να αιτιολογήσετε την απάντηση σας.

Λύση

Το κοινό χαρακτηριστικό των έξι κλασμάτων είναι το ότι ο παρονομαστής τους είναι μεγαλύτερος από τον αριθμητή τους κατά 1. Όλα είναι της μορφής

$$\frac{\nu}{\nu+1}=\frac{\nu+1-1}{\nu+1}=1-\frac{1}{\nu+1},$$

οπότε σε σύγκριση δύο τέτοιων κλασμάτων $\frac{\mu}{\mu+1}, \frac{\nu}{\nu+1}$ έχουμε:

$$\frac{\mu}{\mu+1}>\frac{\nu}{\nu+1} \Leftrightarrow 1-\frac{1}{\mu+1}>1-\frac{1}{\nu+1} \Leftrightarrow -\frac{1}{\mu+1}>-\frac{1}{\nu+1} \Leftrightarrow \frac{1}{\mu+1}<\frac{1}{\nu+1} \Leftrightarrow \mu>\nu .$$

Επομένως μεγαλύτερο από τα δεδομένα κλάσματα είναι το κλάσμα που έχει το μεγαλύτερο αριθμητή, δηλαδή το $\frac{4021}{4022}$, και μικρότερο είναι αυτό που έχει το μικρότερο αριθμητή, , δηλαδή το $\frac{3019}{3020}$.

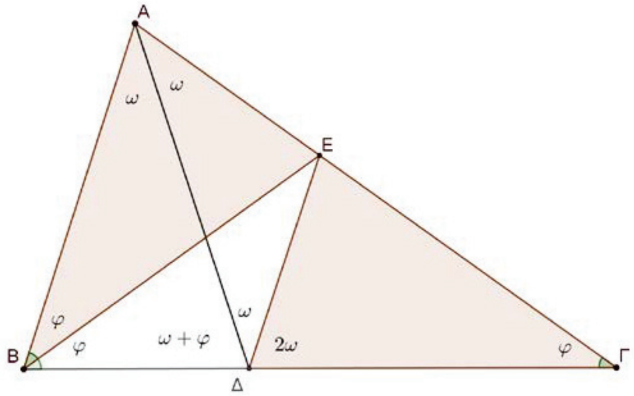
Πρόβλημα 3

Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ τέτοιο ώστε $\mathrm{A}\hat{\mathrm{B}}\Gamma=2\cdot \mathrm{B}\hat{\Gamma}\mathrm{A}$. Η διχοτόμος της γωνίας $\mathrm{B}\hat{\mathrm{A}}\Gamma$ τέμνει την πλευρά ΒΓ στο σημείο Δ έτσι ώστε $\mathrm{AB}=\Delta\Gamma$. Η διχοτόμος της γωνίας $\mathrm{A}\hat{\mathrm{B}}\Gamma$ τέμνει την πλευρά ΑΓ στο σημείο Ε.

(α) Να αποδείξετε ότι τα τρίγωνα ΑΒΕ και ΔΓΕ είναι ίσα.

(β) Να βρείτε πόσες μοίρες είναι η γωνία $\mathrm{B}\hat{\mathrm{A}}\Gamma$.

Λύση



Σχήμα 3

Έστω ότι $\hat{\mathrm{A}}=\mathrm{B}\hat{\mathrm{A}}\Gamma=2\omega$, $\hat{\Gamma}=\mathrm{B}\hat{\Gamma}\mathrm{A}=\varphi$, οπότε θα είναι $\hat{\mathrm{B}}=\mathrm{A}\hat{\mathrm{B}}\Gamma=2\varphi$.

(α) Από την υπόθεση έχουμε $\mathrm{E}\hat{\mathrm{B}}\Gamma=\frac{\mathrm{A}\hat{\mathrm{B}}\Gamma}{2}=\mathrm{B}\hat{\Gamma}\mathrm{E}$, οπότε το τρίγωνο ΒΕΓ είναι ισοσκελές με $\mathrm{BE}=\mathrm{E}\Gamma$. Επιπλέον $\mathrm{A}\hat{\mathrm{B}}\mathrm{E}=\frac{\mathrm{A}\hat{\mathrm{B}}\Gamma}{2}=\mathrm{B}\hat{\Gamma}\mathrm{E}$ και από την υπόθεση $\mathrm{AB}=\Delta\Gamma$. Επομένως τα τρίγωνα ΑΒΕ και ΔΓΕ είναι ίσα, γιατί έχουν δύο πλευρές ίσες μία προς μία και τις περιεχόμενες γωνίες των πλευρών αυτών ίσες.

(β) Από το ερώτημα (α) προκύπτουν τα εξής:

- $\mathrm{E}\hat{\Delta}\Gamma=\mathrm{B}\hat{\mathrm{A}}\mathrm{E}=\hat{\mathrm{A}}=2\omega$
- $\mathrm{AE}=\mathrm{E}\Delta \Rightarrow$ το τρίγωνο ΑΕΔ είναι ισοσκελές $\Rightarrow \mathrm{A}\Delta\mathrm{E}=\Delta\mathrm{AE}=\frac{\hat{\mathrm{A}}}{2}=\omega=\mathrm{B}\hat{\mathrm{A}}\Delta.$

Επομένως οι ευθείες ΑΒ και ΔΕ είναι παράλληλες, γιατί τεμνόμενες από την ΑΔ σχηματίζουν δύο εντός εναλλάξ γωνίες ίσες. Επομένως θα έχουν και

$$\mathrm{E}\hat{\Delta}\Gamma = \mathrm{A}\hat{\mathrm{B}}\Delta \Rightarrow 2\omega = 2\varphi \Rightarrow \omega = \varphi,$$

οπότε έχουμε

$$\hat{\mathrm{A}} + \hat{\mathrm{B}} + \hat{\Gamma} = 180^0 \Rightarrow 2\omega + 2\varphi + \varphi = 180^0 \Rightarrow 5\omega = 180^0 \Rightarrow \omega = 36^0.$$

Άρα είναι $\mathrm{B}\hat{\mathrm{A}}\Gamma = 2\omega = 72^0$.

Πρόβλημα 4

Να προσδιορίσετε τις τιμές του ακέραιου αριθμού α για τις οποίες ο ρητός αριθμός $\mathrm{A} = \dfrac{(\alpha^2 - 1)^3}{(\alpha - 1)^4}$ είναι ακέραιος.

Λύση

Για $\alpha \neq 1$, έχουμε

$$\mathrm{A} = \frac{(\alpha^2 - 1)^3}{(\alpha - 1)^4} = \frac{(\alpha - 1)^3 (\alpha + 1)^3}{(\alpha - 1)^4} = \frac{(\alpha + 1)^3}{\alpha - 1}.$$

Αν τώρα θέσουμε $\alpha - 1 = x$, τότε έχουμε $\alpha + 1 = x + 2$ και

$$\mathrm{A} = \frac{(x+2)^3}{x} = \frac{x^3 + 6x^2 + 12x + 8}{x} = x^2 + 6x + 12 + \frac{8}{x}.$$

Επομένως, ο ρητός αριθμός A είναι ακέραιος, αν και μόνον αν,

$$\frac{8}{x} = \frac{8}{\alpha - 1} \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow (\alpha - 1) \text{ είναι διαιρέτης του } 8$$

$$\Leftrightarrow \alpha - 1 \in \{\pm 1, \pm 2, \pm 4, \pm 8\}$$

$$\Leftrightarrow \alpha \in \{2, 3, 5, 9.0, -1, -3, -7\}.$$

Β΄ ΛΥΚΕΙΟΥ

Πρόβλημα 1

Οι αριθμοί α, β είναι θετικοί και τέτοιοι ώστε

$$\alpha^2 + \beta^2 = 16\alpha\beta \qquad \textit{και} \qquad \alpha^3 + \beta^3 = 90\alpha\beta.$$

Να υπολογίσετε την τιμή των αθροισμάτων $\alpha + \beta$ και $\dfrac{1}{\alpha} + \dfrac{1}{\beta}$.

Λύση

Από τις ταυτότητες

$$(\alpha + \beta)^2 = \alpha^2 + \beta^2 + 2\alpha\beta \text{ και } \alpha^3 + \beta^3 = (\alpha + \beta)(\alpha^2 + \beta^2 - \alpha\beta)$$

και τις σχέσεις $\alpha^3 + \beta^3 = 90\alpha\beta$ και $\alpha^2 + \beta^2 = 15\alpha\beta$ παίρνουμε ότι:

$$(\alpha + \beta)(\alpha^2 + \beta^2 - \alpha\beta) = 90\alpha\beta \overset{\alpha^2 + \beta^2 = 16\alpha\beta}{\Rightarrow} (\alpha + \beta)(16\alpha\beta - \alpha\beta) = 90\alpha\beta$$

$$\Rightarrow (\alpha + \beta) \cdot 15\alpha\beta = 90\alpha\beta \overset{\alpha\beta \neq 0}{\Rightarrow} \alpha + \beta = 6.$$

Επιπλέον, έχουμε