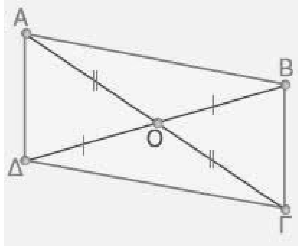
2ο Πρότυπο Λύκειο Θεσσαλονίκης (21/9/2020)
Μαθηματικά Θετικής Ομάδας Προσανατολισμού-Διανύσματα: 1.1 Έννοια Διανύσματος

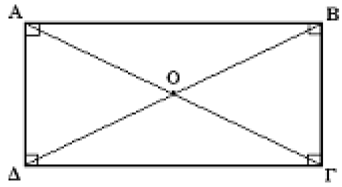
Απαραίτητες γνώσεις από την Ευκλείδεια γεωμετρία!

Α. Σε κάθε παραλληλόγραμμο ισχύει ότι:
1. Οι απέναντι πλευρές είναι ίσες. (Ιδιότητα)
2. Οι απέναντι γωνίες είναι ίσες. (Ιδιότητα)
3. Οι διαγώνιοι διχοτομούνται. (Ιδιότητα)



Για να είναι ένα τετράπλευρο παραλληλόγραμμο θα πρέπει:
1. Οι απέναντι πλευρές του είναι παράλληλες. (Ορισμός)
2. Οι απέναντι πλευρές του είναι ίσες. (Ιδιότητα)
3. Οι απέναντι γωνίες του είναι ίσες. (Ιδιότητα)
4. Οι διαγώνιοί του διχοτομούνται. (Ιδιότητα)
5. Δύο απέναντι πλευρές του είναι παράλληλες και ίσες.

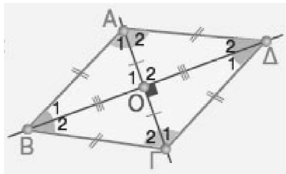
Β. Σε κάθε ορθογώνιο παραλληλόγραμμο ισχύουν, φυσικά, όλες οι ιδιότητες των παραλληλόγραμμων. Επιπλέον όμως ισχύει ότι:
1. Όλες οι γωνίες είναι ορθές.
2. Οι διαγώνιοί του είναι ίσες.



Για να είναι ένα τετράπλευρο ορθογώνιο παραλληλόγραμμο θα πρέπει:
1. Να είναι παραλληλόγραμμο και να έχει μία γωνία ορθή. (Ορισμός)
2. Να είναι παραλληλόγραμμο και οι διαγώνιοί του να είναι ίσες. (Ιδιότητα)
3. Να είναι ένα τετράπλευρο με τρεις γωνίες ορθές.
4. Να είναι ένα τετράπλευρο με όλες τις γωνίες του ίσες.

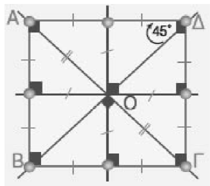
Γ. Σε κάθε ρόμβο ισχύουν, επίσης, όλες οι ιδιότητες των παραλληλόγραμμων. Επιπλέον όμως ισχύει ότι:

1. Όλες οι πλευρές του ρόμβου είναι ίσες.
2. Οι διαγώνιοί του τέμνονται κάθετα.
3. Οι διαγώνιοί του διχοτομούν τις γωνίες του.



Για να είναι ένα τετράπλευρο ρόμβος θα πρέπει:
1. Να είναι παραλληλόγραμμο και να έχει δύο διαδοχικές πλευρές του ίσες. (Ορισμός)
2. Να είναι παραλληλόγραμμο και οι διαγώνιοί του να τέμνονται κάθετα. (Ιδιότητα)
3. Να είναι παραλληλόγραμμο και μια διαγώνιός του να διχοτομεί μία γωνία του. (Ιδιότητα)
4. Να είναι ένα τετράπλευρο με όλες τις πλευρές του ίσες. (Ιδιότητα)

Δ. Σε κάθε τετράγωνο ισχύουν όλες οι ιδιότητες των ορθογωνίων και των ρόμβων.
Για να είναι ένα τετράπλευρο τετράγωνο θα πρέπει να είναι παραλληλόγραμμο και να έχει
1. Μία γωνία του ορθή και δύο διαδοχικές πλευρές του ίσες.
2. Μία γωνία του ορθή και μία διαγώνιός του να διχοτομεί μια γωνία του.
3. Μία γωνία του ορθή και τις διαγωνίους του κάθετες.
4. Τις διαγωνίους του ίσες και δύο διαδοχικές πλευρές του ίσες.
5. Τις διαγωνίους του ίσες και η μία διαγώνιος να διχοτομεί μία γωνία του.
6. Τις διαγωνίους του ίσες και κάθετες.



ΑΣΚΗΣΕΙΣ
1. Σε ένα παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ κέντρου Ο, να γράψετε όλα τα ζεύγη ίσων και αντίθετων διανυσμάτων.
2. Θεωρούμε ένα μη μηδενικό διάνυσμα ΑΒ και δύο σημεία Ο και Κ. Αν Α1, Α2 είναι τα συμμετρικά του Α ως προς τα Ο και Κ αντίστοιχα και Β1, Β2 τα συμμετρικά του Β, να αποδείξετε ότι $\overrightarrow{A_1B_1} = \overrightarrow{A_2B_2}$
3. Αν $\overrightarrow{A\Delta}=\overrightarrow{B\Gamma}$ και $\overrightarrow{BE}=\overrightarrow{A\Gamma}$, όπου τα σημεία Α, Β, Γ δεν είναι συνευθειακά, να αποδείξετε ότι το Γ είναι το μέσο του ΔΕ.
4. Ποιο συμπέρασμα μπορεί να προκύψει από την ισότητα $\overrightarrow{OA} = -\overrightarrow{OB}$;
5. Θεωρούμε ένα παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ και δύο οποιαδήποτε σημεία Ε και Ζ των πλευρών ΑΒ και ΒΓ αντίστοιχα. Αν $\overrightarrow{\Gamma K} = \overrightarrow{EA}$ και $\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{Z\Gamma}$, να αποδείξετε ότι $\overrightarrow{EZ} = \overrightarrow{MK}$.
6. Σε τρίγωνο ΑΒΓ προεκτείνουμε τις διαμέσους ΒΔ και ΓΕ κατά ευθύγραμμα τμήματα ΔΗ = ΒΔ και ΕΖ = ΓΕ αντίστοιχα. Να αποδείξετε ότι $\overrightarrow{AH} = \overrightarrow{B\Gamma} = -\overrightarrow{AZ}$.
7. Για οποιαδήποτε μη μηδενικά διανύσματα $\vec{\alpha}$ και $\vec{\beta}$, να αποδείξετε ότι
α. $(\widehat{\vec{\alpha},\vec{\beta}})+(\widehat{-\vec{\alpha},\vec{\beta}})=\pi$ και β. $(\widehat{-\vec{\alpha},-\vec{\beta}})=(\widehat{\vec{\alpha},\vec{\beta}})$
8. Θεωρούμε τρίγωνο ΑΒΓ με $\hat{A}=60^{o}$ και $\hat{B}=50^{o}$. Αν θέσουμε $\overrightarrow{B\Gamma} = \vec{\alpha}$, $\overrightarrow{\Gamma A} = \vec{\beta}$ και $\overrightarrow{AB}=\vec{\gamma}$, να βρεθούν οι γωνίες $(\widehat{\vec{\alpha},\vec{\beta}})$, $(\widehat{\vec{\beta},\vec{\gamma}})$ και $(\widehat{\vec{\gamma},\vec{\alpha}})$.