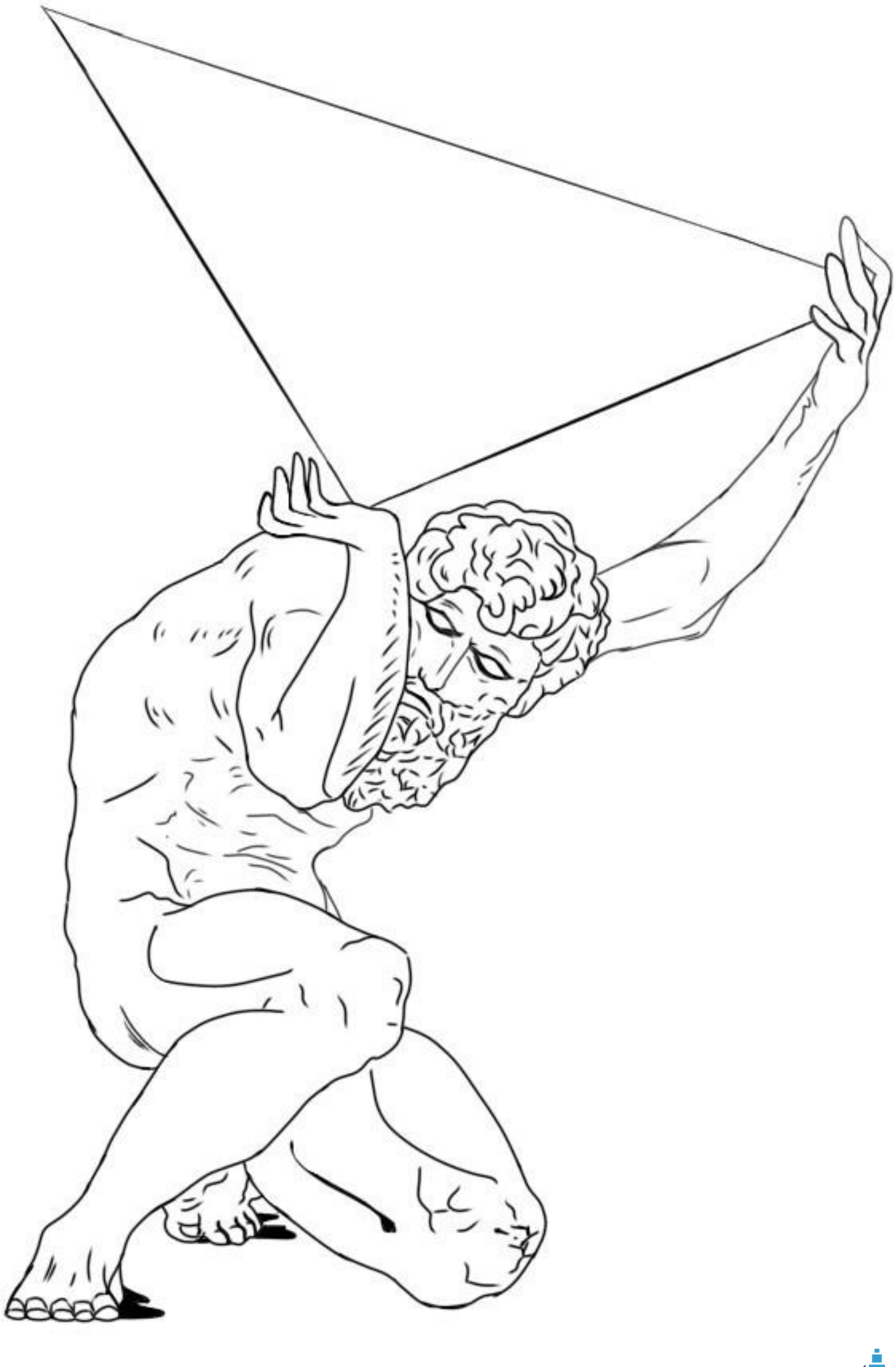
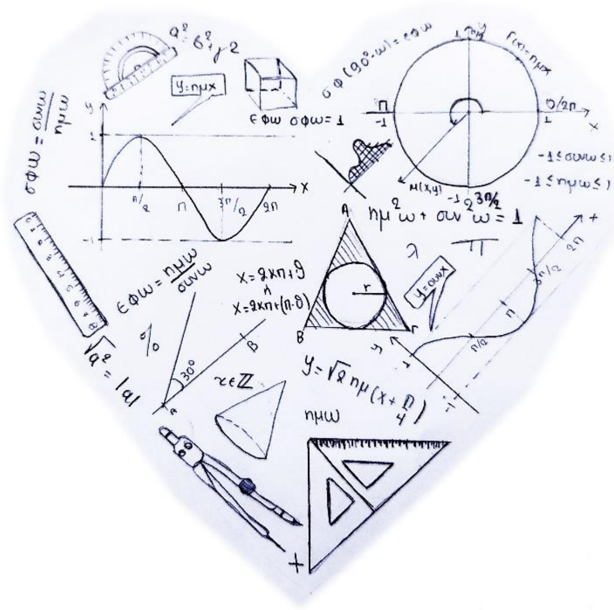
Αιχμάλωτοι της Τριγωνομετρίας



4ο ΓΕΝΙΚΟ ΛΥΚΕΙΟ ΧΑΝΙΩΝ

B2+B3

Ιστορικά



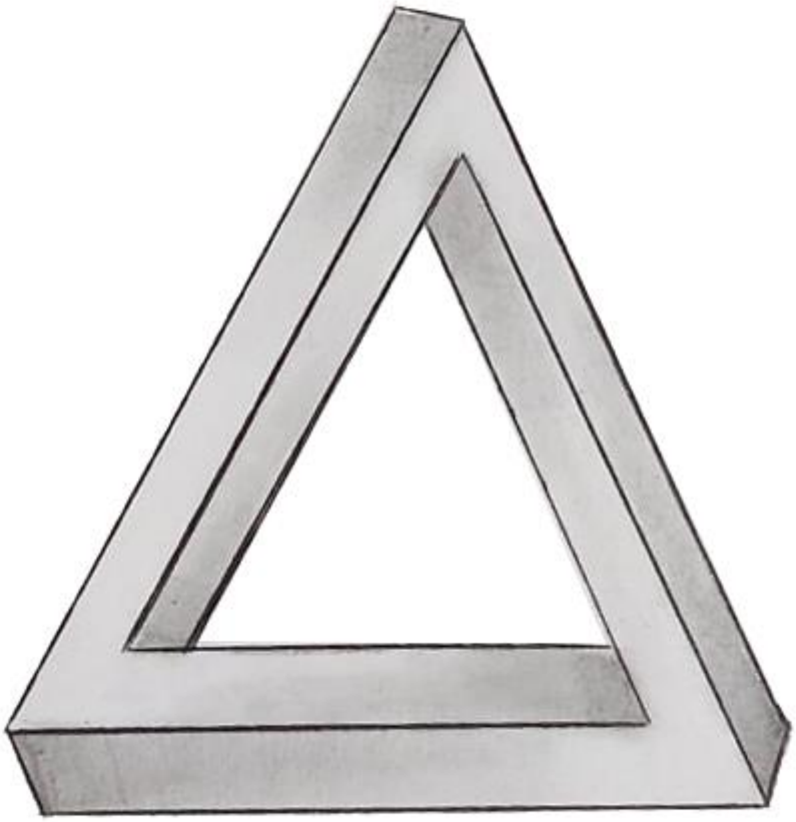
Ο όρος *τριγωνομετρία* καθιερώθηκε το 1595 από τον Γερμανό μαθηματικό Bartholomäus Pitiscus. Εντούτοις η τριγωνομετρία αναπτύχθηκε και ήταν μέρος των μαθηματικών από την αρχαιότητα. Ο Αρίσταρχος χρησιμοποίησε ορθογώνια τρίγωνα για να υπολογίσει την απόσταση της Γης από τον Ήλιο και την Σελήνη. Οι αστρονόμοι Ίππαρχος και Πτολεμαίος χρησιμοποιούσαν καταλόγους που μετέτρεπαν γωνίες κύκλου σε μήκος χορδής, η γνωστή σε μας τριγωνομετρική συνάρτηση του ημίτονου.

Οι Σουμέριοι αστρονόμοι εισήγαγαν το μέτρο της γωνίας, χρησιμοποιώντας ένα διαχωρισμό του κύκλου σε 360 μοίρες. Αυτοί και οι διάδοχοί τους, οι Βαβυλώνιοι μελέτησαν τις αναλογίες των πλευρών ομοίων τριγώνων και ανακάλυψαν κάποιες ιδιότητες αυτών των αναλογιών, αλλά δεν το μετέτρεψαν σε μια συστηματική μέθοδο για την εύρεση πλευρών και γωνιών των τριγώνων. Οι αρχαίοι Νουβίοι χρησιμοποιούσαν μια παρόμοια μέθοδο. Οι αρχαίοι Έλληνες μετέτρεψαν την τριγωνομετρία σε μια διατεταγμένη επιστήμη.

Κλασικοί Έλληνες μαθηματικοί (όπως ο Ευκλείδης και ο Αρχιμήδης) μελέτησαν τις ιδιότητες των χορδών και των χαραγμένων γωνιών σε κύκλους, και απόδειξαν θεωρήματα που ισοδυναμούν με σύγχρονους τριγωνομετρικούς τύπους παρόλο που τα απεδείκνυαν γεωμετρικά και όχι αλγεβρικά. Ο Κλαύδιος ο Πτολεμαίος διεύρυνε τις χορδές του Ίππαρχου σε ένα κύκλο στην Αλμαγέστη του. Η σύγχρονη ημιτονοειδής συνάρτηση ορίσθηκε για πρώτη φορά στη Surya Siddhanta, και οι ιδιότητές της ήταν τεκμηριωμένες περαιτέρω από τον Ινδό μαθηματικό και αστρονόμο του 5ου αιώνα Αριαμπάτα. Τα Ελληνικά και τα Ινδικά αυτά έργα έχουν μεταφραστεί και επεκταθεί από Ισλαμιστές μαθηματικούς του μεσαίωνα. Μέχρι το 10ο αιώνα, οι ισλαμιστές μαθηματικοί χρησιμοποιούσαν και τις έξι τριγωνομετρικές συναρτήσεις, είχαν ταξινομημένες τις τιμές τους, και τις χρησιμοποιούσαν για τα προβλήματα στη σφαιρική γεωμετρία. Την ίδια περίπου εποχή, Κινέζοι μαθηματικοί ανέπτυξαν την τριγωνομετρία ανεξάρτητα, αν και δεν ήταν σημαντικό πεδίο μελέτης για αυτούς. Η γνώση των τριγωνομετρικών συναρτήσεων και μεθόδων έφτασε στην Ευρώπη μέσω λατινικών μεταφράσεων των έργων των Περσών και αράβων αστρονόμων όπως ο Al Battani και Nasir al-Din al-Tusi. Ένα από τα πρώτα έργα στην τριγωνομετρία από έναν ευρωπαίο μαθηματικό είναι το De Triangulis από τον γερμανό μαθηματικό Regiomontanus του 15ου αιώνα. Η τριγωνομετρία ήταν ακόμα τόσο λίγο γνωστή στην Ευρώπη του 16ου αιώνα που ο Νικόλαος Κοπέρνικος αφιέρωσε δύο κεφάλαια του De Revolutionibus orbium coelestium για να εξηγήσει τις βασικές έννοιες.

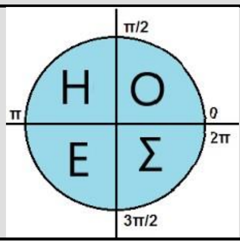
Καθοδηγούμενη από τις απαιτήσεις της ναυσιπλοΐας και την αυξανόμενη ανάγκη για ακριβείς χάρτες των μεγάλων περιοχών, η τριγωνομετρία μεγάλωσε σε ένα σημαντικό κλάδο των μαθηματικών. Ο Bartholomaeus Pitiscus ήταν ο πρώτος που χρησιμοποίησε τη λέξη, δημοσιεύοντας την trigonometría του το 1595. Η Gemma Frisius περιέγραψε για πρώτη φορά τη μέθοδο της τριγωνοποίησης η οποία χρησιμοποιείται ακόμα και σήμερα στην χωρομέτρηση. Ήταν ο Leonhard Euler ο οποίος ενσωμάτωσε πλήρως τους μιγαδικούς αριθμούς στην τριγωνομετρία. Τα έργα του James Gregory τον 17ο αιώνα και του Colin Maclaurin τον 18ο αιώνα ήταν μεγάλη επιρροή στην ανάπτυξη των τριγωνομετρικών σειρών. Επίσης, τον 18ο αιώνα, ο Brook Taylor καθόρισε τη γενική σειρά Taylor.

Οι Άραβες υιοθέτησαν τις τριγωνομετρικές μελέτες των αρχαίων Ελλήνων και των Ινδών και ανάπτυξαν την σφαιρική τριγωνομετρία. Οι μαθηματικοί της Ευρώπης μυήθηκαν στην τριγωνομετρία τον 15ο αιώνα, όταν την εποχή της Αναγέννησης ασχολήθηκαν με τον υπολογισμό βαλλιστικών τροχιών. Ο Γερμανός αστρονόμος Ρεγιομοντάνος σύνταξε μια πεντάτομη διδασκαλία της επίπεδης και σφαιρικής τριγωνομετρία με τίτλο *De triangulis omnimodis*. Σήμερα ο τρόπος γραφής των τριγωνομετρικών συναρτήσεων βασίζεται κατά μεγάλο βαθμό στα έργα του Euler.



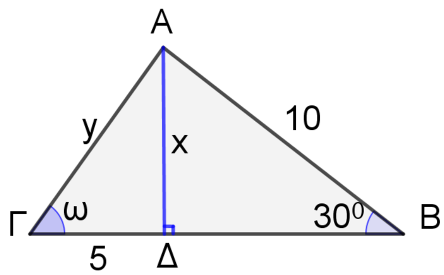
1. Τριγωνομετρικοί Αριθμοί Γωνίας

Μικρές Παρατηρήσεις
Μνημονικός κανόνας ΟΗΕΣ Ο : ***όλα*** θετικά Η : ***ημx*** θετικό Ε : ***εφx*** και ***σφx*** θετικά Σ : ***συνx*** θετικό



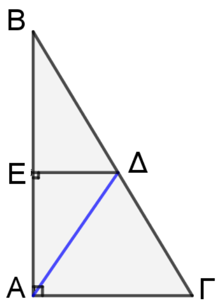
Ασκήσεις

1) Στο διπλανό σχήμα να υπολογιστούν τα μήκη x, y καθώς και η γωνία ω.

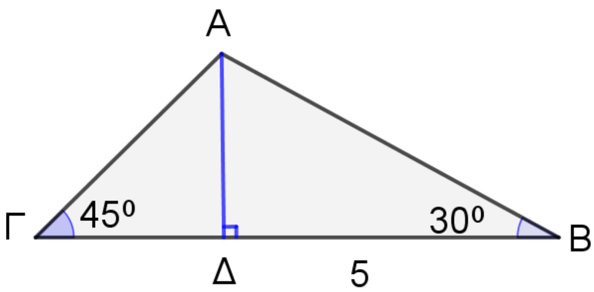


2) Στο διπλανό ορθογώνιο τρίγωνο το Δ είναι μέσο της ΒΓ, $AB=\sqrt{2}$, $\hat{B}=\dfrac{\pi}{6}$ και $\Delta E \perp AB$.

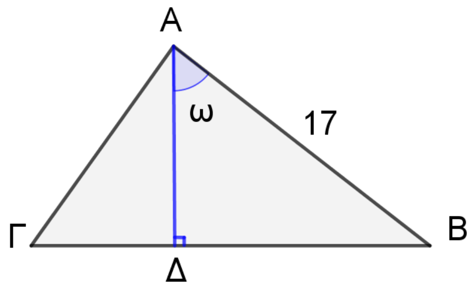
Να υπολογίσετε τα τμήματα ΑΓ, ΒΓ, ΑΔ και ΔΕ.



3) Στο διπλανό τρίγωνο είναι ΒΔ=5cm. Να υπολογιστούν τα μήκη των πλευρών του καθώς και το εμβαδόν του.



4) Στο διπλανό τρίγωνο είναι ΑΒ=17cm, $\eta\mu\omega=\dfrac{15}{17}$ και $\varepsilon\varphi\Gamma=\dfrac{4}{3}$. Να υπολογιστούν τα μήκη των ΑΓ, ΑΔ και ΒΓ.



5) Μία επίκεντρη γωνία ω βαίνει σε τόξο S=8cm. Να εκφράσετε τη γωνία αυτή σε ακτίνια, αν η ακτίνα του κύκλου είναι:
i) ρ=2cm **ii)** ρ=4cm **iii)** ρ=8cm

6) Να εκφράσετε σε rad γωνία:
i) 20° **ii)** 1620° **iii)** 900° **iv)** -1260°

7) Να υπολογίσετε του τριγωνομετρικούς αριθμούς γωνίας
i) 2205° **ii)** 2550° **iii)** 2980° **iv)** 3290°

8) Να υπολογίσετε του τριγωνομετρικούς αριθμούς γωνίας
i) $\dfrac{13\pi}{2}$ **ii)** $\dfrac{25\pi}{3}$ **iii)** $\dfrac{51\pi}{6}$

2. Βασικές Τριγωνομετρικές Ταυτότητες

Ασκήσεις

1) Αν $\sigma\upsilon\nu x = \frac{2}{3}$ και $\frac{3\pi}{2} < x < 2\pi$ να βρείτε τους άλλους τριγωνομετρικούς αριθμούς της γωνίας *x* rad.

2) Αν $\sigma\upsilon\nu x = -\frac{1}{3}$ και $\pi < x < \frac{3\pi}{2}$ να βρείτε τους άλλους τριγωνομετρικούς αριθμούς της γωνίας *x* rad.

3) Αν $\eta\mu x = -\frac{1}{2}$ και $\frac{3\pi}{2} < x < 2\pi$ να βρείτε τους άλλους τριγωνομετρικούς αριθμούς της γωνίας *x* rad.

4) Αν $25\sigma\upsilon\nu^2 x - 9 = 0$ και $\frac{\pi}{2} < x < \pi$ να βρείτε τους τριγωνομετρικούς αριθμούς της γωνίας *x* rad.

5) Για μία γωνία $\omega \in \left(\pi, \frac{3\pi}{2}\right)$ ισχύει ότι $5\sigma\upsilon\nu^2\omega - 7\sigma\upsilon\nu\omega - 6 = 0$.

i) Να αποδειχθεί ότι $\sigma\upsilon\nu\omega = -\frac{3}{5}$.

ii) Να υπολογιστούν οι υπόλοιποι τριγωνομετρικοί αριθμοί της γωνίας ω.

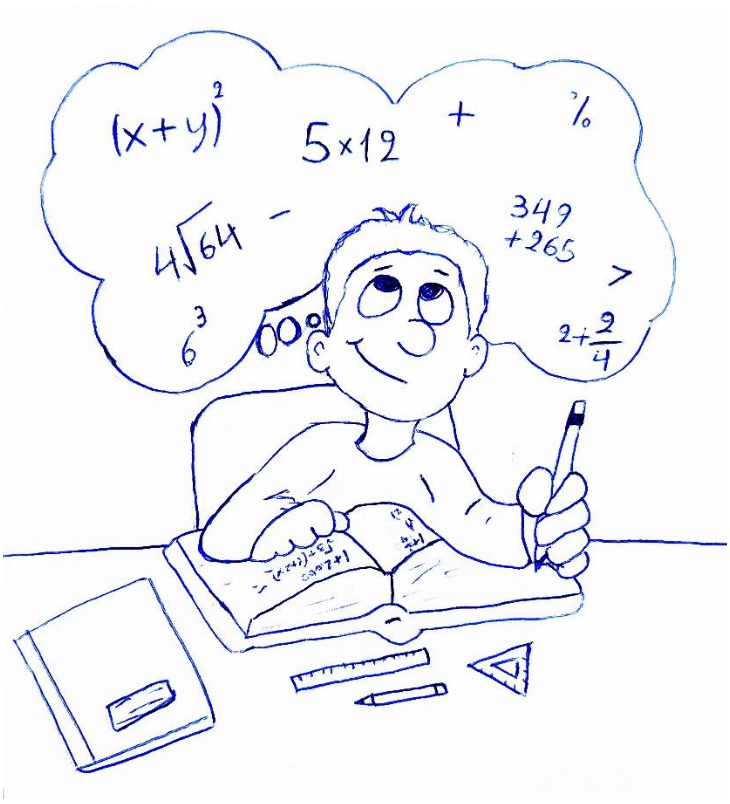
6) Αν $\sigma\varphi x = -\frac{3}{4}$ και $\frac{3\pi}{2} < x < 2\pi$, να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης: $A = \frac{5\eta\mu x\sigma\upsilon\nu x}{2 + \eta\mu x}$.

7) Να αποδείξετε ότι: $\varepsilon\varphi x + \sigma\varphi x = \dfrac{\sigma\upsilon\nu x}{\eta\mu x - \eta\mu^3 x}$

8) Να αποδείξετε ότι: $\dfrac{1+\eta\mu^2\alpha}{\sigma\upsilon\nu^2\alpha} - 2\varepsilon\varphi^2\alpha = 1$.

9) Να αποδείξετε ότι: $\varepsilon\varphi^4 x \cdot \sigma\upsilon\nu^4 x + 2\eta\mu^2 x \cdot \sigma\upsilon\nu^2 x = 1 - \sigma\upsilon\nu^4 x$.

10) Γνωρίζουμε ότι η μέγιστη τιμή για το ημ*x* και το συν*x* είναι το 1. Υπάρχει γωνία τέτοια ώστε ημ*x* + συν*x* =2; Αιτιολογείστε την απάντησή σας.



3. Αναγωγή στο 1ο Τεταρτημόριο

Ασκήσεις

1) Να δείξετε ότι: $\dfrac{\eta\mu(\pi-\omega)\cdot\eta\mu(-\omega)}{\varepsilon\varphi(-\omega)\cdot\sigma\upsilon\nu(\pi+\omega)}=-\eta\mu\omega$.

2) Να δείξετε ότι: $\dfrac{\sigma\upsilon\nu(8\pi-\omega)+\sigma\varphi(3\pi+\omega)}{\sigma\upsilon\nu(23\pi+\omega)+\sigma\varphi(27\pi-\omega)}=-1$.

3) Να δείξετε ότι: $\dfrac{\varepsilon\varphi 225^\circ+\varepsilon\varphi 150^\circ}{1-\varepsilon\varphi 225^\circ\varepsilon\varphi 150^\circ}=\dfrac{3-\sqrt{3}}{3+\sqrt{3}}$.

4) Να απλοποιήσετε την παράσταση: $\mathrm{A}=\dfrac{\sigma\varphi(-\omega)\cdot\varepsilon\varphi\left(2\pi-\omega\right)\cdot\sigma\upsilon\nu\left(\dfrac{5\pi}{2}+\omega\right)}{\sigma\varphi\left(\dfrac{\pi}{2}+\omega\right)\cdot\eta\mu\left(\dfrac{3\pi}{2}-\omega\right)\cdot\sigma\upsilon\nu\left(\dfrac{\pi}{2}+\omega\right)}$

5) Να βρείτε την τιμή της παράστασης: $\mathrm{A}=\dfrac{\eta\mu\dfrac{19\pi}{6}\cdot\sigma\upsilon\nu\dfrac{27\pi}{4}\cdot\varepsilon\varphi\dfrac{17\pi}{3}}{\sigma\varphi\dfrac{20\pi}{3}\cdot\eta\mu\dfrac{37\pi}{4}\cdot\sigma\upsilon\nu\dfrac{46\pi}{3}}$.

6) Να δείξετε ότι: $\dfrac{\sigma\upsilon\nu(\pi+\omega)\cdot\eta\mu\left(\dfrac{\pi}{2}+\omega\right)\cdot\sigma\upsilon\nu\left(\dfrac{3\pi}{2}-\omega\right)\cdot\sigma\varphi\left(\dfrac{\pi}{2}-\omega\right)}{\sigma\upsilon\nu(-\omega)\cdot\eta\mu\left(\pi-\omega\right)\cdot\sigma\upsilon\nu\left(\dfrac{\pi}{2}+\omega\right)\cdot\varepsilon\varphi\left(\dfrac{3\pi}{2}+\omega\right)}=\varepsilon\varphi\omega$.

7) Να αποδείξετε ότι: $\eta\mu^2\dfrac{5\pi}{8}+\eta\mu^2\dfrac{\pi}{8}=1$.

8) Να δείξετε ότι: $\dfrac{\sigma\varphi(28\pi-\omega)\cdot\sigma\upsilon\nu\left(\dfrac{7\pi}{2}+\omega\right)\cdot\eta\mu\left(\dfrac{19\pi}{2}+\omega\right)\cdot\varepsilon\varphi(9\pi+\omega)}{\sigma\upsilon\nu(7\pi-\omega)\cdot\sigma\upsilon\nu\left(\dfrac{3\pi}{2}+\omega\right)}=-1$.

9) Να δείξετε ότι οι παρακάτω σχέσεις ισχύουν για κάθε τρίγωνο ΑΒΓ.

i) $\eta\mu\left(\hat{B}+\hat{\Gamma}\right)=\eta\mu\hat{A}$

ii) $\varepsilon\varphi\left(\dfrac{\hat{B}+\hat{\Gamma}}{2}\right)=\sigma\varphi\dfrac{\hat{A}}{2}$

iii) $\sigma\upsilon\nu\left(2\hat{A}+\hat{B}+\hat{\Gamma}\right)+\sigma\upsilon\nu\hat{A}=0$

10) Αν $\eta\mu\omega=\dfrac{4}{5}$ με $90^\circ<\omega<180^\circ$, να βρείτε τους υπόλοιπους τριγωνομετρικούς αριθμούς καθώς και τα $\eta\mu(90^\circ-\omega)$, $\sigma\upsilon\nu(90^\circ-\omega)$ και $\varepsilon\varphi(90^\circ+\omega)$.

11) Αν για τη γωνία ω είναι $\eta\mu\omega=\dfrac{2}{3}$ και $\dfrac{\pi}{2}<\omega<\pi$, τότε:

i) Να βρείτε τους υπόλοιπους τριγωνομετρικούς αριθμούς της ω.

ii) Να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης $A=\dfrac{\sqrt{5}\cdot\eta\mu(\pi+\omega)+\sigma\upsilon\nu(\pi-\omega)}{\varepsilon\varphi\left(\dfrac{\pi}{2}+\omega\right)-\sigma\varphi\omega}$.

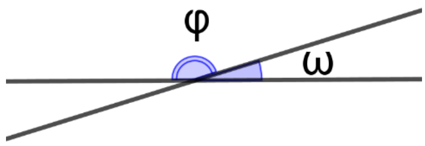
12) Για τη γωνία ω ισχύει $3\sigma\upsilon\nu^2\omega-7\eta\mu\omega-5=0$ και $\pi<\omega<\dfrac{3\pi}{2}$.

i) Βρείτε τους τριγωνομετρικούς αριθμούς της γωνίας ω.

ii) Να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης:

$$A=6\eta\mu(7\pi+\omega)-3\sigma\upsilon\nu\left(\frac{5\pi}{2}-\omega\right)+2\sqrt{2}\varepsilon\varphi(\pi-\omega)$$

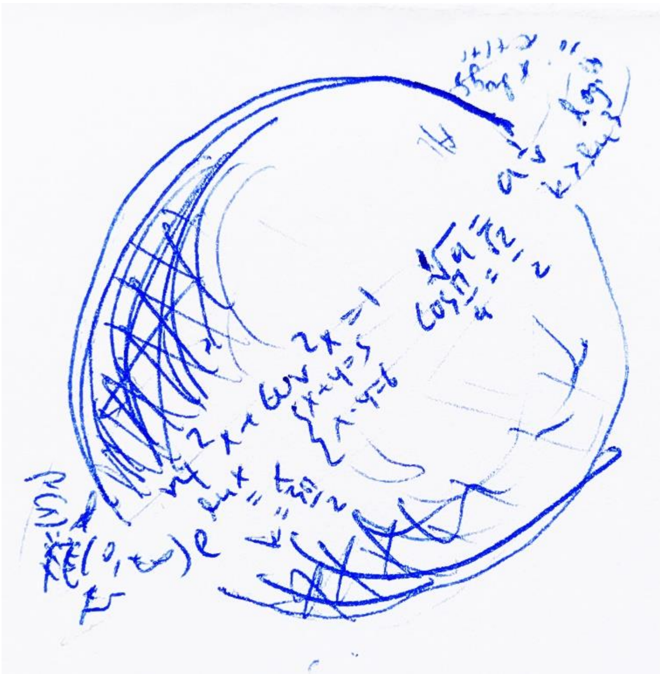
13) Για τη γωνία ω του διπλανού σχήματος ισχύει $\eta\mu\omega = \dfrac{5}{13}$.



i) Να υπολογίσετε τους τριγωνομετρικούς αριθμούς της γωνίας φ.

ii) Να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης: $\mathrm{A} = \dfrac{\eta\mu(\pi-\varphi)-\sigma\upsilon\nu(2\pi-\varphi)}{\eta\mu(3\pi+\varphi)+\sigma\upsilon\nu(5\pi-\varphi)}$.

iii) Αν επιπλέον η γωνία φ είναι ίση με τη γωνία Β ενός τριγώνου ΑΒΓ, να υπολογίσετε την εφ(Α+Γ).



4. Οι Τριγωνομετρικές Συναρτήσεις

Μικρές Παρατηρήσεις

Οι συναρτήσεις $f(x)=\rho\cdot\eta\mu(\omega x)$ και $f(x)=\rho\cdot\sigma\upsilon\nu(\omega x)$ έχουν:

max=|ρ| , min= −|ρ| και περίοδο $T=\dfrac{2\pi}{\omega}$. Για την σχεδίαση της γραφικής παράσταση βολεύει να κάνουμε τη διαίρεση T:4 ώστε να πάρουμε τα βασικά σημεία διέλευσης.

Ασκήσεις

1) Να βρείτε την περίοδο, τη μέγιστη και την ελάχιστη τιμή της συνάρτησης:
$f(x)=-2\eta\mu\dfrac{x}{4}$.
Στη συνέχεια να σχεδιάσετε τη γραφική της παράσταση για διάστημα μίας περιόδου.

2) Να βρείτε την περίοδο, τη μέγιστη και την ελάχιστη τιμή της συνάρτησης:
$f(x)=8\sigma\upsilon\nu 2x$.
Στη συνέχεια να σχεδιάσετε τη γραφική της παράσταση για διάστημα μίας περιόδου.

3) Να βρείτε την περίοδο, τη μέγιστη και την ελάχιστη τιμή της συνάρτησης:
$f(x)=3\eta\mu 2x+4$.
Στη συνέχεια να σχεδιάσετε τη γραφική της παράσταση για διάστημα μίας περιόδου.

4) Να βρείτε την περίοδο, τη μέγιστη και την ελάχιστη τιμή της συνάρτησης:
$f(x)=-5\sigma\upsilon\nu 4x+2$.
Στη συνέχεια να σχεδιάσετε τη γραφική της παράσταση για διάστημα μίας περιόδου.

5) Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=3\eta\mu x+1$.
i) Να βρείτε την περίοδο, τη μέγιστη και την ελάχιστη τιμή της συνάρτησης
ii) Να παραστήσετε γραφικά την συνάρτηση στο πλάτος μίας περιόδου.
iii) Να εξετάσετε αν η συνάρτηση μπορεί να πάρει την τιμή −3.

**

6) Μετεωρολόγοι κατέγραφαν τη θερμοκρασία κατά τη διάρκεια ενός εικοσιτετράωρου, και οι μεταβολές της προσεγγίζονται από τη συνάρτηση $C(t)=-5\sigma\upsilon\nu\left(\frac{\pi}{12}t\right)+10$, όπου $C(t)$ η θερμοκρασία σε βαθμούς Κελσίου και t ο χρόνος σε ώρες.
i) Βρείτε τις χρονικές στιγμές με την χαμηλότερη και την υψηλότερη θερμοκρασία και τις αντίστοιχες θερμοκρασίες.
ii) Να παραστήσετε γραφικά την συνάρτηση για $0\le t\le 24$.

7) Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=-3\eta\mu\left(\frac{27\pi}{2}-3x\right)+\sigma\upsilon\nu(13\pi+3x)+\alpha$, όπου $\alpha\in\mathbb{R}$.

Αν το σημείο $\mathrm{M}\left(\frac{2\pi}{9},3\right)$ ανήκει στη γραφική παράσταση της f:
i) Να απλοποιήσετε τον τύπο της f και να βρείτε το $\alpha\in\mathbb{R}$.
ii) Αν $f(x)=2\sigma\upsilon\nu 3x+4$ να βρείτε την περίοδο, τη μέγιστη και ελάχιστη τιμή της καθώς και τα διαστήματα μονοτονίας της.
iii) Να σχεδιάσετε τη γραφική της παράσταση σε διάστημα μίας περιόδου.

8) Ο Νίκος κάνει προπόνηση σκέιτμπορντ στην πίστα της γειτονιάς. Αν η συνάρτηση που περιγράφει την κίνησή του είναι $y=2\sigma\upsilon\nu\left(\frac{\pi}{3}t\right)+2$, όπου y το ύψος σε μέτρα που βρίσκεται κάθε στιγμή και t ο χρόνος σε sec, να βρείτε:
i) Το μέγιστο και το ελάχιστο ύψος καθώς και την περίοδο της συνάρτησης.
ii) Να σχεδιάσετε τη γραφική της παράσταση σε διάστημα μίας περιόδου.
iii) Ποια χρονική στιγμή βρίσκεται στο χαμηλότερο σημείο;

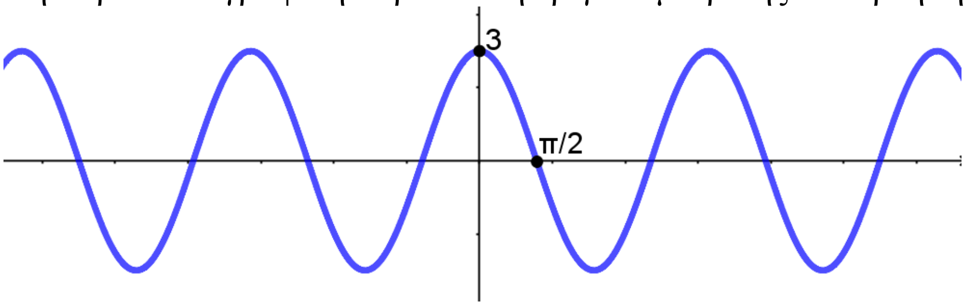
9) Η Μαρία πρόκειται να ακολουθήσει μία περιπατητική διαδρομή κατά μήκος ενός μονοπατιού σε ένα λόφο. Αν η συνάρτηση που περιγράφει τον αριθμό των καρδιακών παλμών της είναι $K(t) = -30\sigma\upsilon\nu\left(\frac{\pi}{60}t\right) + 100$, όπου t ο χρόνος σε min, να βρείτε:

i) Το μέγιστο και το ελάχιστο αριθμό καρδιακών παλμών καθώς και την περίοδο της συνάρτησης.
ii) Να σχεδιάσετε τη γραφική παράσταση σε διάστημα μίας περιόδου.
iii) Να βρείτε με πότε οι καρδιακοί της παλμοί είναι πάνω από 85 (παρατηρήστε και τη γραφική της παράσταση).

10) Ο Γιώργος και η Δήμητρα εκμεταλλεύτηκαν την πρόσφατη χιονόπτωση στην πόλη αλλά και το ότι βγήκε ξανά ο ήλιος μετά από τόσες μέρες. Η Δήμητρα έβαλε στοίχημα ότι ο Γιώργος δεν μπορεί να φτιάξει ένα χιονάνθρωπο που να μην έχει λιώσει μέσα σε 12 ώρες. Ο Γιώργος δέχτηκε την πρόκληση και κατασκεύασε ένα χιονάνθρωπο. Το ύψος του προσεγγίζεται από τη συνάρτηση $y(t) = \sigma\upsilon\nu\left(\frac{\pi t}{14}\right) + 1$, για διάρκεια μισής περιόδου, όπου t ο χρόνος σε ώρες.

i) Βρείτε το ύψος του χιονάνθρωπου και να σχεδιάσετε τη γραφική παράσταση σε διάστημα μισής περιόδου. Θα κερδίσει το στοίχημα ο Γιώργος;
ii) Η Δήμητρα άρχισε να καταβρέχει κρυφά το χιονάνθρωπο και τώρα το ύψος του προσεγγίζεται από τη συνάρτηση $y(t) = \sigma\upsilon\nu\left(\frac{\pi t}{10}\right) + 1$. Ποιος θα κερδίσει τώρα;

11) Δίνεται η παρακάτω γραφική παράσταση τριγωνομετρικής συνάρτησης.

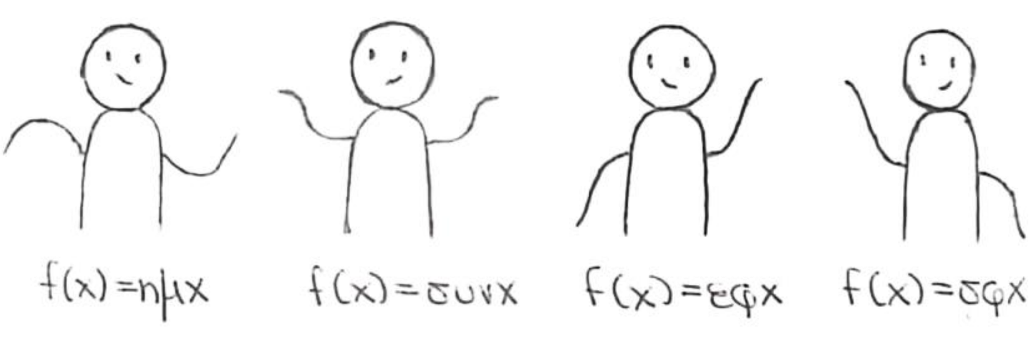


Ο Οδυσσέας υποστηρίζει ότι πρόκειται για την $f(x)=3\sigma\upsilon\nu x$, ενώ η Αθηνά υποστηρίζει ότι πρόκειται για την $g(x)=-3\sigma\upsilon\nu\left(x-\frac{\pi}{2}\right)$.

i) Ποιος από τους δύο έχει δίκιο; Αιτιολογείστε την απάντησή σας.
ii) Στο ίδιο σύστημα αξόνων με πριν σχεδιάστε τη γραφική παράσταση της $h(x)=3\eta\mu\left(x+\frac{\pi}{2}\right)$. Τι παρατηρείτε; Να το επιβεβαιώσετε αλγεβρικά.

12) Οι μηνιαίες πωλήσεις μιας φαρμακοβιομηχανίας σε χιλιάδες εμβόλια δίνονται κατά προσέγγιση από τη σχέση $f(t)=15\sigma\upsilon\nu\left(\frac{\pi t}{6}\right)+20$, όπου t ο χρόνος σε μήνες.

i) Να κάνετε τη γραφική παράσταση της συνάρτησης για διάρκεια ενός έτους.
ii) Ποιο μήνα έχουμε τον ελάχιστο αριθμό πωλήσεων και πόσες είναι αυτές;
iii) Ποιους μήνες η φαρμακοβιομηχανία πουλά 20000 εμβόλια;



5. Βασικές Τριγωνομετρικές Εξισώσεις

Ασκήσεις

1) Να λυθούν οι εξισώσεις: **i)** $2\eta\mu x = \sqrt{2}$ **ii)** $2\sigma\upsilon\nu 3x = 1$

2) Να λυθούν οι εξισώσεις: **i)** $\eta\mu 3x = \frac{\sqrt{2}}{2}$ **ii)** $\varepsilon\varphi x = 1$ **iii)** $\sigma\varphi 2x = \sqrt{3}$

3) Να λυθούν οι εξισώσεις: **i)** $\sigma\varphi x = \frac{\sqrt{3}}{3}$ **ii)** $\varepsilon\varphi x = -\sqrt{3}$

iii) $(\eta\mu x - 2)(\sigma\upsilon\nu x - 1) = 0$

4) Να λυθούν οι εξισώσεις: **i)** $\eta\mu\left(x - \frac{\pi}{8}\right) - \eta\mu\left(\frac{\pi}{4} + x\right) = 0$ **ii)** $\eta\mu x = \sigma\upsilon\nu x$

5) Να λυθεί η εξίσωση: $\eta\mu x + \sqrt{3}\sigma\upsilon\nu x = 0$.

6) Να λυθεί η εξίσωση: $2\eta\mu^2 x + 5\sigma\upsilon\nu x + 1 = 0$.

**

7) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης $f(x) = \frac{1}{2\eta\mu x - 1}$.

8) Αν $\varepsilon\varphi\frac{6\pi}{7} = 3$, να λυθεί η εξίσωση: $\eta\mu^2 x + 2\eta\mu x \cdot \sigma\upsilon\nu x = 3\sigma\upsilon\nu^2 x$.

9) Να λυθεί η εξίσωση: $-2\sigma\upsilon\nu^2 x - 5\eta\mu x + 4 = 0$ στο διάστημα $\left[3\pi, 4\pi\right]$.

10) i) Να δείξετε ότι $\dfrac{\sigma\upsilon\nu x}{1-\eta\mu x} + \dfrac{\sigma\upsilon\nu x}{1+\eta\mu x} = \dfrac{2}{\sigma\upsilon\nu x}$.

ii) Να λύσετε την εξίσωση $\dfrac{\sigma\upsilon\nu x}{1-\eta\mu x} + \dfrac{\sigma\upsilon\nu x}{1+\eta\mu x} = -4$ στο διάστημα $(\pi,\ 3\pi)$.

11) Έστω η συνάρτηση $f(x) = \dfrac{\eta\mu(\pi - x) - \eta\mu\left(x - \dfrac{\pi}{2}\right)}{\sigma\varphi x \cdot \eta\mu x}$, $x \neq \dfrac{\kappa\pi}{2}, \kappa \in \mathbb{Z}$.

i) Να δείξετε ότι $f(x) = \varepsilon\varphi x + 1$.

ii) Να βρείτε τα κοινά σημεία της γραφικής παράστασης της f με τον άξονα $x'x$.

12) Έστω η συνάρτηση $f(x) = \dfrac{1}{2}\left[\eta\mu\left(\dfrac{\pi + 4x}{2}\right) - \sigma\upsilon\nu(\pi + 2x)\right]$.

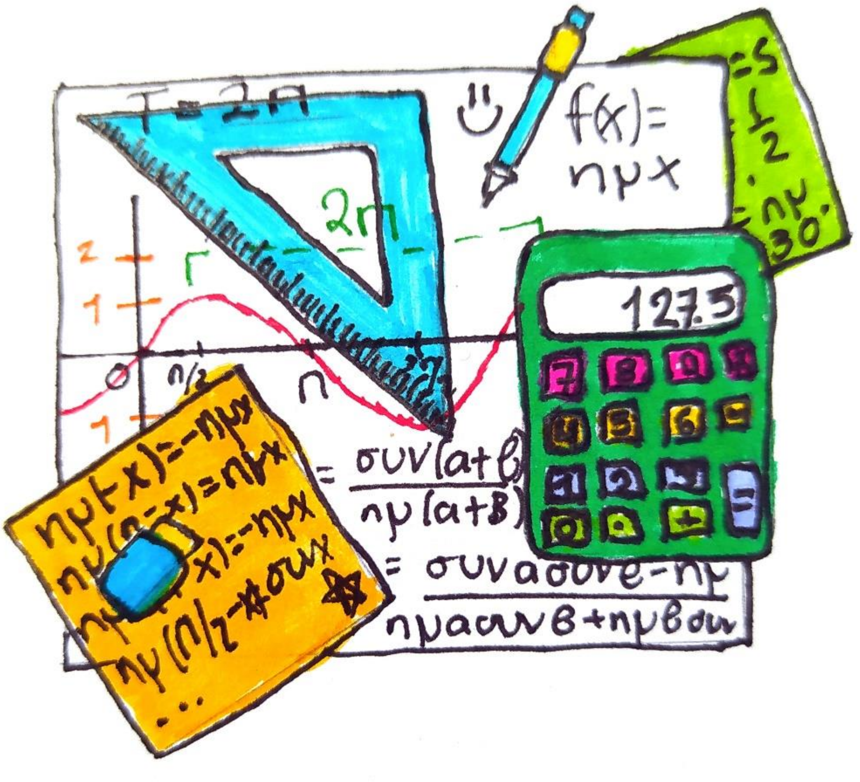
i) Να δείξετε ότι $f(x) = \sigma\upsilon\nu 2x$.

ii) Να λύσετε την εξίσωση $2f^2(x) + 3f(x) - 2 = 0$.

13) Έστω η συνάρτηση $f(x) = \dfrac{\eta\mu(\dfrac{7\pi}{2} - x) \cdot \varepsilon\varphi(3\pi + x) \cdot \eta\mu\left(\dfrac{5\pi}{2} - x\right)}{\sigma\upsilon\nu(\pi + x) \cdot \sigma\varphi\left(x - \dfrac{\pi}{2}\right)}$, με $x \neq \dfrac{\kappa\pi}{2}, \kappa \in \mathbb{Z}$.

i) Να δείξετε ότι $f(x) = -\sigma\upsilon\nu x$.

ii) Να λυθεί η εξίσωση $f(x) = 1 + \sigma\upsilon\nu x$.


T = 2π
f(x)=
ημx
2π
127.5
= συν(α+β)
ημ(α+β)
= συνασυνε-ημ
ημασυνβ+ημβσυ
ημ(-x)=-ημx

Γενικές Ασκήσεις

1) Για τις γωνίες φ,ω∈[0, 2π) ισχύει $\omega>\varphi$ και επιπλέον:

$(\eta\mu\varphi-2)^2-\sigma\upsilon\nu\omega=1-\sigma\upsilon\nu^2\varphi$ και $\dfrac{\eta\mu\varphi+2}{3}-\dfrac{\sigma\upsilon\nu\omega-6}{6}=2$.

i) Να υπολογίσετε τις γωνίες φ και ω.

ii) Ένα εκκρεμές ρολόι είχε ρυθμιστεί να μεταβαίνει από τη μία ακραία θέση στην άλλη σε ένα δευτερόλεπτο. Μετρώντας τώρα την ταχύτητά του, την προσεγγίσαμε με την συνάρτηση $v=2\sigma\upsilon\nu\left(\dfrac{2\pi}{3}t+\varphi\right)$, όπου φ η γωνία από το (i) ερώτημα και t ο χρόνος σε sec. Να παραστήσετε γραφικά την ταχύτητα του εκκρεμούς σε σχέση με το χρόνο, σε μία περίοδο.

iii) Να εξηγήσετε γιατί το ρολόι είναι χαλασμένο.

2) Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\alpha\cdot\eta\mu\left(\dfrac{x}{\beta}\right)$, όπου *α,β* θετικοί, με ελάχιστη τιμή το $-\sqrt{3}$ και περίοδο Τ=4π.

i) Να υπολογίσετε τα *α, β* και έπειτα να χαράξετε τη γραφική της παράσταση σε πλάτος μίας περιόδου.

ii) Έστω τώρα η συνάρτηση $g(x)=\varepsilon\varphi(x-\pi)\cdot\sigma\varphi(x+\pi)\cdot\sigma\upsilon\nu\left(\dfrac{6\pi+x}{2}\right)$. Αφού την απλοποιήσετε να χαράξετε τη γραφική της παράσταση σε πλάτος μίας περιόδου.

iii) Αν είναι $f(x)=\sqrt{3}\cdot\eta\mu\left(\dfrac{x}{2}\right)$ και $g(x)=-\sigma\upsilon\nu\dfrac{x}{2}$, να βρείτε τα κοινά σημεία των γραφικών τους παραστάσεων για $-\dfrac{\pi}{2}<x<\dfrac{\pi}{2}$.

3) Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\frac{1}{\eta\mu x}-\eta\mu x$.

i) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της.

ii) Να δείξετε ότι $f(x)=\sigma\upsilon\nu x\cdot\sigma\varphi x$.

iii) Να δείξετε ότι η *f* είναι περιττή.

iv) Να βρείτε τις τετμημένες των σημείων τομής της γραφικής παράστασης της *f* με την γραφική παράσταση της $g(x)=\sigma\upsilon\nu x$.

4) i) Να βρείτε το $x\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$ έτσι ώστε οι $3\sigma\upsilon\nu^2 x,\ 2\sigma\upsilon\nu x,\ 2-\eta\mu^2 x$ να αποτελούν διαδοχικούς όρους αριθμητικής προόδου.

ii) Για το x_0 που βρήκατε και αν ο $3\sigma\upsilon\nu^2 x_0$ είναι ο πρώτος όρος της αριθμητικής προόδου να βρείτε τον 35^o όρο της.

iii) Να βρείτε το άθροισμα των 100 πρώτων όρων της.

5) Δίνονται τρία σημεία Α, Β, Γ πάνω στην περιφέρεια ενός κύκλου (Ο,ρ), με ΑΒ=γ, ΑΓ=β και ΒΓ=α.

i) Αν α=4β και γ=β$\sqrt{21}$, να υπολογίσετε την κυρτή γωνία $\mathrm{A\hat{\Gamma}B}$.

ii) Αν α=$\sqrt{2}$, β=$\frac{1}{2}$, γ=$\frac{\sqrt{13}}{2}$, να αποδείξετε ότι το τόξο $\mathrm{A\Gamma B}$ είναι 90°.

iii) Γνωρίζουμε από την τριγωνική ανισότητα ότι γ≠α+β. Μπορείτε να το αποδείξετε με τριγωνομετρία;

6) Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\alpha+\beta\eta\mu 3x$, της οποίας η γραφική παράσταση διέρχεται από τα σημεία $\mathrm{A}\left(\frac{\pi}{6},1\right)$ και $\mathrm{B}\left(\frac{\pi}{2},-3\right)$.

i) Να βρείτε τα *α,β*.

ii) Για $\alpha=-1,\ \beta=2$ να βρείτε:

α) Την περίοδο της συνάρτησης και την μέγιστη και ελάχιστη τιμή της.

β) Να χαράξετε τη γραφική της παράσταση σε διάστημα μίας περιόδου.

γ) Να λυθεί η εξίσωση $f(x)=1$ στο διάστημα $\left[0,\frac{2\pi}{3}\right]$. Να επιβεβαιώσετε γεωμετρικά τη λύση που βρήκατε.

7) Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\dfrac{\eta\mu^3 x}{\sigma\upsilon\nu x}-\dfrac{\sigma\upsilon\nu^3 x}{\eta\mu x}$.
i) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της.
ii) Να δείξετε ότι $f(x)=\varepsilon\varphi x-\sigma\varphi x$.
iii) Να δείξετε ότι η f είναι περιττή.
iv) Να βρείτε τις τετμημένες των σημείων τομής της γραφικής παράστασης της f με την γραφική παράσταση της $g(x)=2-2\sigma\varphi x$.

8) Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\alpha\cdot\eta\mu\dfrac{2x}{3}+\beta$, με $\alpha>0$ και $\beta\in\mathbb{R}$. Αν έχει μέγιστο το 3 και η γραφική της παράσταση τέμνει τον άξονα y′y στο σημείο (0,1) τότε:
i) Να βρείτε τα α,β.
ii) Αν $\alpha=2$ και $\beta=1$:

α) Να δείξετε ότι $\left(1-f(x)\right)^2+\left(f\left(\dfrac{3\pi}{4}-x\right)-1\right)^2=4$.

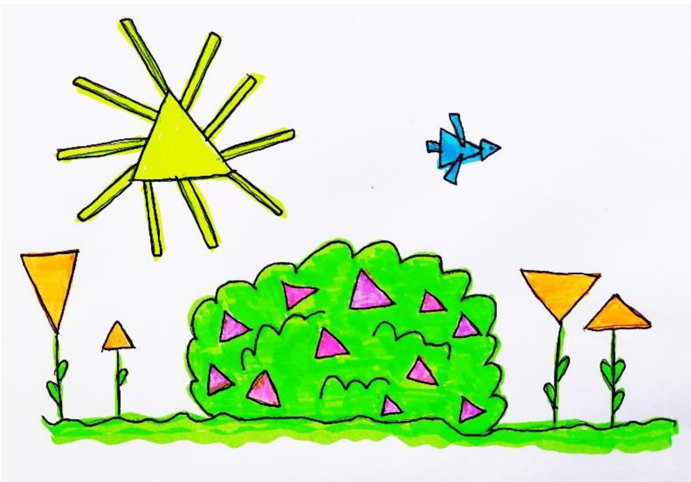
β) Να λυθεί η εξίσωση $f(6x)=f(3x)$ στο διάστημα $[0,\pi]$.

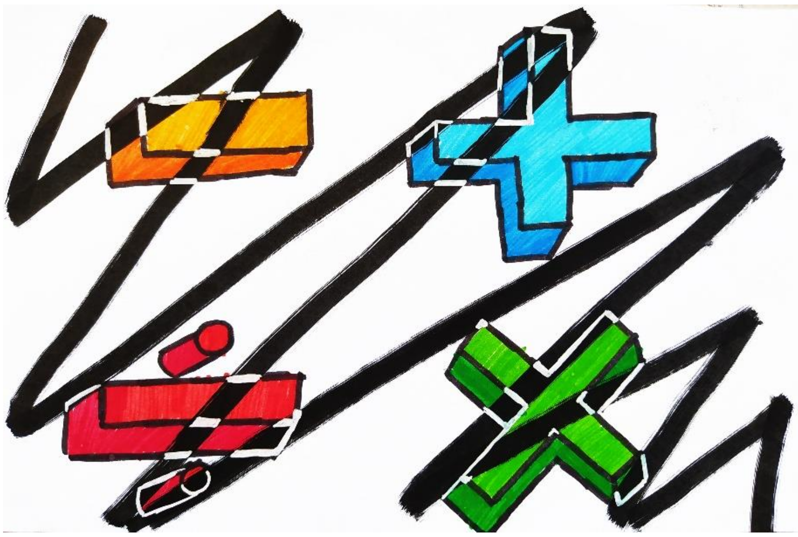
9) Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\sigma\upsilon\nu^2(\pi+x)+\eta\mu^2(\pi-x)+\sigma\upsilon\nu\left(\dfrac{4x-\pi}{2}\right)-1$, με $x\in\mathbb{R}$.
i) Να δείξετε ότι $f(x)=\eta\mu 2x$.
ii) Να χαράξετε τη γραφική της παράσταση σε πλάτος μίας περιόδου.
iii) Να λυθεί η εξίσωση $f(x)+f(2x)=0$.

Συντελεστές

Αθανασάκη Φωτεινή	Αρχαγγελάκη Ασπασία
Δρακουλάκη Ευανθία	Λιτσάι Μελίνα
Καπαδουκάκης Οδυσσέας	Μαρινάκη Στελίνα
Καράπα Αθηνά	Μάρρα Ίριδα
Καρεφυλάκη Δήμητρα	Ματσαμάκη Μαρία
Κατσούλη Χριστίνα	Μήλιος Βασίλης
Καϋμενάκης Αριστοτέλης	Μινουδάκη Αγγέλα
Κλεάνθους Κυριάκος	Μιχελαράκη Αλεξάνδρα
Κοκκινάκη Μαρία Ελένη	Μπαλωμενάκη Ιωάννα
Κουτσορινάκης Χαράλαμπος	Μπαμπούλης Πασχάλης
Κρασονικολάκη Αντιγόνη	Μπεκιαράκης Γιάννης
Λέκκας Γεώργιος	Μπλαζάκης Γιάννης
Λυράκη Ειρήνη	Μπλέτα Γεωργία
Μαλεκάκη Αργυρώ	Μπολιώτη Μαρία
Μανουσάκη Βεατρίκη	Μποτωνάκη Ευαγγελία
Μανουσάκη Γεωργία	Μπούντα Αλιν
Μαραθάκης Στέφανος	Μπούντα Μιρέλα
Μαράκης Μιχάλης	Μπουράκη Ελευθερία
Στουρνάρα Μαρία	Μυλωνάκη Κορνηλία
Στρατάκη Αντωνία	Μυλωνάκη Ελεάννα
	Νησιώτης Φίλιππος
	Χειλαδάκη Γιολάντα

Επιμέλεια: Σπύρος Ζερβουδάκης
2021-22





2021-2022