ΠΟΛΥΩΝΥΜΑ

Σπύρος Ζερβουδάκης
Μαθηματικός
(Msc)

4ο ΓΕΝΙΚΟ ΛΥΚΕΙΟ ΧΑΝΙΩΝ

Η μαγεία των μαθηματικών έγκειται
στο γεγονός ότι μπορούμε
να μη μιλήσουμε για τα πράγματα που
θέλουμε να πούμε.

Richard Feynman

https://blogs.sch.gr/zervoss/

1. Πολυώνυμα

Μικρές Παρατηρήσεις
Κάθε πραγματικός αριθμός α≠0, είναι πολυώνυμο μηδενικού βαθμού. Ο αριθμός 0 είναι το μηδενικό πολυώνυμο και δεν ορίζεται ο βαθμός του.
Ο αριθμός $P(0)$ είναι ο σταθερός όρος του πολυωνύμου. Ο αριθμός $P(1)$ είναι το άθροισμα όλων των συντελεστών του πολυωνύμου

Ασκήσεις

1) Αν το πολυώνυμο $P(x) = a^2x^3 + 2(\beta - 1)x^2 + \beta^2 x + 3$ έχει ρίζα το 1, να βρείτε τα $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$

2) Να βρείτε το $\lambda \in \mathbb{R}$ ώστε το πολυώνυμο: $P(x) = (4\lambda^3 - 9\lambda)x^3 - (9 - 4\lambda^2)x^2 + \lambda x + 2$ να είναι δευτέρου βαθμού.

3) Αν το πολυώνυμο $P(x)$ έχει ρίζα το 3, να δείξετε ότι το πολυώνυμο
$Q(x) = (x+1)P(x+2) + P(4 - x^2)$ έχει ρίζα το -1.

4) Να βρεθεί για τις διάφορες τιμές του $\lambda \in \mathbb{R}$, ο βαθμός του πολυωνύμου:
$P(x) = (\lambda^3 - \lambda)x^4 + (\lambda^2 - \lambda)x^3 + (\lambda + 1)x + \lambda - 1$.

5) Να βρείτε για ποιες τιμές του $\lambda \in \mathbb{R}$ το πολυώνυμο $P(x)$ είναι το μηδενικό, όπου:
$P(x) = (\lambda^2 - 1)x^4 + (\lambda^2 + \lambda - 2)x^2 + \lambda^2 - 4\lambda + 3$.

6) Δίνονται τα πολυώνυμα:
$P(x) = -2x^3 + \lambda^2(x^2 - 1) + \lambda(x^3 - 1) + \lambda + 9$, $Q(x) = (\lambda + 12)x^2 + (\lambda - 2)x^3 + (\lambda^2 - 9)x$,
με $\lambda \in \mathbb{R}$.
α) Ένας μαθητής ισχυρίζεται ότι και τα δύο πολυώνυμα είναι τρίτου βαθμού. Συμφωνείτε με την άποψη αυτή; Να δικαιολογήσετε την απάντησή σας.
β) Να βρείτε την τιμή του λ για την οποία τα $P(x)$ και $Q(x)$ είναι ίσα. (Τ.Θ.)

7) Έστω πολυώνυμο $P(x)$ για το οποίο ισχύει $P(0)=2$ και $P(x) - P(x+1) = 2x^2 - 1$. Να βρείτε την τιμή του αθροίσματος των συντελεστών του.

8) Να βρείτε πολυώνυμο $P(x)$ τέτοιο ώστε $(2x-1)P(x) = 2x^3 - 5x^2 + 4x - 1$.

9) Να βρείτε πολυώνυμο πρώτου βαθμού $P(x)$ τέτοιο ώστε $P(P(x)) = x - 1$.

**
10) Έστω πολυώνυμο $P(x)$ για το οποίο ισχύει $P(1)=2P(0)=2$ και $P(x)+P(x+1)=P(x+2)$. Να βρείτε το $c\in\mathbb{R}$ ώστε να ισχύει: $P(P(2))=2P(1+P(0))+c$.
11) i) Να βρείτε τα Α,Β$\in\mathbb{R}$ ώστε για κάθε $x\neq -1$ και $x\neq 0$ να ισχύει: $\frac{1}{x^2+x}=\frac{A}{x}+\frac{B}{x+1}$. **ii)** Να δείξετε ότι: $\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 4}+\ldots+\frac{1}{\nu\cdot(\nu+1)}=\frac{\nu}{\nu+1}$.
12) Βρείτε το πολυώνυμο $P(x)$ για το οποίο ισχύει: $[P(x)]^2+P(x)=x^2+5x+6$.

Practice	
Polynomial = πολυώνυμο	**Degree of a polynomial = βαθμός πολυωνύμου**
The null polynomial = Μηδενικό πολυώνυμο	
13) Which of the following is **not** a polynomial? **i)** $x^2-\frac{x}{2}$ **ii)** x^7-1 **iii)** $7/(x-1)$ **iv)** ax^2+bx	
14) What is the degree of the polynomial $2x^3-8x+7x^5+4x^2-7x^5+18$?	

2. Διαίρεση Πολυωνύμων

Μικρές Παρατηρήσεις
Το πολυώνυμο $P(x)$ έχει παράγοντα το $(x-\alpha)(x-\beta)$ αν το $P(x)$ έχει παράγοντες το $x-\alpha$ και το $x-\beta$.

Ασκήσεις

1) Να γίνουν οι διαιρέσεις: **i)** $(x^3-x^2+2x-1):(x^2-x+1)$
ii) $(2x^3-x-4):(x^2-x+1)$ **iii)** $x^5:(x-1)^2$

2) Να βρείτε το πηλίκο και το υπόλοιπο των διαιρέσεων: : **i)** $(x^3-27):(x-3)$
ii) $(3x^3+5x^2-6x-2):(x-2)$ **iii)** $(x^4-x^3+x-9):(x-5)$

3) α) Να βρείτε το υπόλοιπο και το πηλίκο της διαίρεσης $(x^3-6x^2+11x-2):(x-3)$.
β) Αν $P(x)=x^3-6x^2+11x+\lambda$ να βρείτε το $\lambda\in\mathbb{R}$, ώστε η διαίρεση $P(x)$: $(x-3)$ να έχει υπόλοιπο 0. (ΤΘ)

4) Έστω το πολυώνυμο $P(x)=2\nu x^{2\nu}+(\nu-1)x^{2\nu-1}+2\nu x^{2\nu-2}+(2\nu-3)x^{2\nu-3}+1-\nu$. Να βρείτε το υπόλοιπο της διαίρεσης $P(x):(x+1)$.

5) Να βρείτε τις τιμές του $\lambda\in\mathbb{R}$ για τις οποίες το υπόλοιπο της διαίρεσης $(\lambda^2x^3-x^2+\lambda x+\lambda):(x-1)$ είναι ίσο με 2.

6) Να βρεθεί το $\lambda\in\mathbb{R}$ ώστε το πολυώνυμο $P(x)=5x^3-2\lambda x^2+3\lambda-5$ να έχει παράγοντα το $(x-2)$ και έπειτα να λύσετε την εξίσωση $P(x)=0$.

7) Να δείξετε ότι δεν υπάρχει $\lambda\in\mathbb{R}$ τέτοιος ώστε το $(x-2)$ να είναι παράγοντας του πολυωνύμου $P(x)=x^3+\lambda^2x^2-5x+6$.

**

8) Να βρεθούν τα $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$ έτσι ώστε το $P(x)=(2\alpha-\beta)x^2+(\alpha^2+\beta^2)x+10$ να έχει παράγοντα το $x-2$.

9) Έστω $P(x)=x^3-2x^2+\alpha x+\beta$. Να βρεθούν τα $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$ έτσι ώστε το $P(x)$ να έχει παράγοντα το x^2-3x+2.

10) Έστω το πολυώνυμο $P(x) = x^5 - 3x^4 - x^3 + 9x^2 - (\lambda + 5)x + \mu$ τέτοιο ώστε το x είναι παράγοντας του $P(x)$ και το υπόλοιπο της διαίρεσης του $P(x)$ με το $(x+1)$ είναι 12. **α.** Να βρείτε τα $\lambda,\mu \in \mathbb{R}$. **β.** Αν $\lambda=1$ και $\mu=0$ και $Q(x) = x^5 - (\alpha + \beta)x^4 - x^3 + 9x^2 - 3\alpha\beta x + \gamma$ να βρείτε τα $\alpha,\beta,\gamma \in \mathbb{R}$ ώστε $Q(x) = P(x)$.
11) Δίνεται το πολυώνυμο: $P(x) = 4\sigma\upsilon\nu\theta \cdot x^3 + (2\sigma\upsilon\nu^2\theta - 1) \cdot x^2 + 3x - 2$. Να βρεθεί το $\theta \in [0, 2\pi]$ ώστε το P(x) να έχει παράγοντα το (x+1).
12) Να βρείτε τα $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ ώστε το $P(x) = \alpha x^5 + \beta x^4 + 1$ να έχει παράγοντα το $(x-1)^2$.

***
13) Έστω τα πολυώνυμα $P(x) = x^{39} + x^{38} + \ldots + x + 1$ και $Q(x) = x^{19} + x^{18} + \ldots + x + 1$. Να βρείτε το πηλίκο $P(x) \div Q(x)$.
14) Να βρεθεί το $\alpha \in \mathbb{R}$ ώστε το πολυώνυμο $x^4 - x^2 + 1$ να έχει παράγοντα το $x^2 + \alpha x + 1$.

3. Πολυωνυμικές Εξισώσεις και Ανισώσεις

Μικρές Παρατηρήσεις
Μία πολυωνυμική εξίσωση ν-οστού βαθμού έχει **το πολύ ν** πραγματικές ρίζες.
Μία πολυωνυμική εξίσωση περιττού βαθμού έχει **τουλάχιστον μία** ρίζα.
Αν οι συντελεστές μιας πολυωνυμικής εξίσωσης είναι όλοι ομόσημοι, τότε η εξίσωση **δεν έχει θετική** ρίζα. (ασκ. 1iv)
Για να λύσουμε την ανίσωση της μορφής Α(x)Β(x)Γ(x)…> ή <0 εργαζόμαστε ως εξής: ➢ Βρίσκουμε τις ρίζες των πολυωνύμων Α(x), Β(x), Γ(x),… (αν έχουν) ➢ Διατάσσουμε τις ρίζες σε ένα άξονα ➢ Κάτω από τον άξονα βάζουμε τα πρόσημα των πολυωνύμων ανάμεσα στις ρίζες ➢ Στην τελευταία γραμμή γράφουμε το «γινόμενο» των προσήμων. (ασκ. 2)

Ασκήσεις

1) Να λυθούν οι εξισώσεις: **i)** $4x^3-12x^2+5x+6=0$ **ii)** $x^3-6x-9=0$
iii) $x^4-5x^3+5x-1=0$ **iv)** $x^3+2x^2+7x+6=0$

2) Να λυθούν οι ανισώσεις: **i)** $x^3-2x^2-5x+6>0$ **ii)** $2x^3+5x^2-4x-3\leq 0$
iii) $2x^3-5x^2+4x-1\geq 0$

3) Δίνεται το πολυώνυμο $P(x)=x^3-2x^2-5x+6$.
α) Να βρείτε τα σημεία τομής της γραφικής παράστασης του $P(x)$ με τον άξονα x′x.
β) Να βρείτε τα διαστήματα στα οποία η γραφική παράσταση του P(x) βρίσκεται κάτω από τον άξονα x′x.

4) Αν η γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x)=2x^4-x^3+ax^2-5x+6$ διέρχεται από το σημείο Μ(−2,0),
α) να αποδείξετε ότι $\alpha=-14$
β) να βρείτε τα σημεία τομής της γραφικής παράστασης της f με τους άξονες x΄x και y΄y. (ΤΘ)

5) Έστω $P(x)=x^4+5x^3+9x^2+\alpha x+\beta$.
α) Αν το υπόλοιπο της διαίρεσης του $P(x)$ με το $(x+1)$ είναι 1 και το −2 είναι ρίζα, να βρεθούν τα α,β.
β) Για $\alpha=8$ και $\beta=4$ να λυθεί η εξίσωση.

6) Δίνεται το πολυώνυμο $P(x)=x^3+\beta x^2+\gamma x+\delta$ με $\beta,\gamma,\delta\in\mathbb{R}$ το οποίο έχει ρίζες τους αριθμούς 0,1 και 3 .
α) Να δείξετε ότι $\beta=-4$, $\gamma=3$ και $\delta=0$.
β) Να λύσετε την ανίσωση $P(x)<0$. (ΤΘ)

7) Έστω το πολυώνυμο $P(x) = \kappa^2 x^3 - \kappa x^2 + \kappa^3 x + 2$ με $\kappa \in \mathbb{Z}$. Αν το (x+2) διαιρεί το $P(x)$ να βρεθεί το $\kappa \in \mathbb{Z}$.
Αν $\kappa = -1$ να λυθεί η εξίσωση $P(x)=0$.

8) Δίνεται το πολυώνυμο $P(x)=\lambda^2x^3-4\lambda x+3$ με $\lambda \in \mathbb{R}$.
α) Να βρείτε τις τιμές του λ ώστε το $P(x)$ να έχει παράγοντα το $x-1$.
β) Αν λ=3 να βρείτε όλες τις ρίζες του πολυωνύμου $P(x)$. (ΤΘ)

9) Έστω το πολυώνυμο: $P(x) = (\lambda^2 - 4)x^4 - (\lambda + 2)x^3 + x^2 + \lambda x + \lambda - 1$.
α) Αν το $P(x)$ είναι τρίτου βαθμού να βρεθεί το $\lambda \in \mathbb{R}$.
β) Για λ=2 να λυθεί η ανίσωση $P(x)\leq 0$.

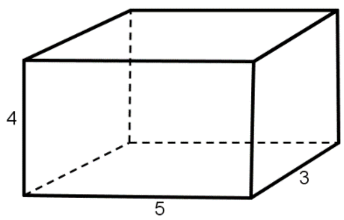
10) Να γράψετε μία πολυωνυμική εξίσωση η οποία έχει λύσεις τους αριθμούς 1, 2, −3.

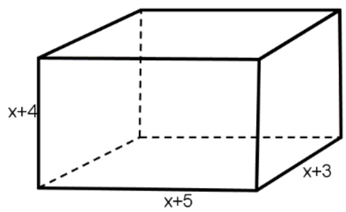
11) Να βρεθεί το λ∈ℝ ώστε το πολυώνυμο $P(x) = x^3 - 8x^2 + 7\lambda x + \lambda + 3$ να έχει παράγοντα το $(x - \lambda)$.

12) Δίνεται το πολυώνυμο $P(x)=x^3+(k-6)x^2-7x+k$.
α) Να βρείτε για ποια τιμή του $k \in \mathbb{R}$, το 2 είναι ρίζα του $P(x)$.
β) Αν k = 6, να λύσετε την εξίσωση $P(x) = 0$. (ΤΘ)

13) Να βρείτε τα διαστήματα στα οποία η γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x)=x^3+x^2-1$ βρίσκεται πάνω από την ευθεία $y=x$.

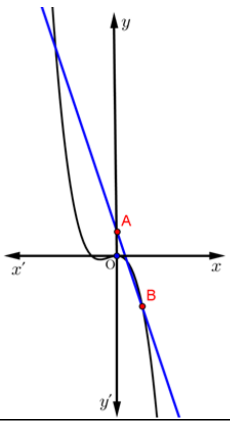
14) Μια εταιρεία κατασκευάζει κουτιά σχήματος ορθογωνίου παραλληλεπιπέδου με διαστάσεις 3cm, 4cm και 5cm.
Ένας νέος πελάτης ζήτησε από την εταιρεία να κατασκευάσει κουτιά με όγκο 120 cm^3 , δηλαδή διπλάσιο από εκείνον που κατασκευάζει.
Η εταιρεία αποφάσισε να κατασκευάσει τα κουτιά που ζήτησε ο πελάτης της, αυξάνοντας τις διαστάσεις του αρχικού κουτιού κατά σταθερό ακέραιο μήκος x.
α) Να αποδείξετε ότι το x θα είναι λύση της εξίσωσης $x^3+12x^2+47x-60=0$.
(Ο όγκος V ορθογωνίου παραλληλεπιπέδου με διαστάσεις α,β,γ δίνεται από τον τύπο: V = α·β·γ)
β) Να βρείτε τον θετικό ακέραιο x λύνοντας την εξίσωση που δίνεται στο ερώτημα (α). (ΤΘ)





**

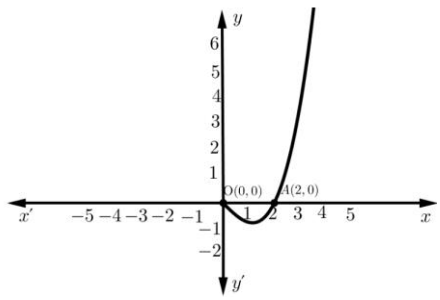
15) Έστω P(x) πολυώνυμο τρίτου βαθμού το οποίο διαιρείται με το πολυώνυμο x^2+2x και είναι τέτοιο, ώστε P (1) = 0 και P(2) = 8.
α) Να αποδείξετε ότι $\mathrm{P}(x)=x^3+x^2-2x$.

β) Να λύσετε την εξίσωση $\mathrm{P}(x) = 8$. **γ)** Να λύσετε την ανίσωση $\mathrm{P}(x) > 2$. (ΤΘ)
16) Έστω $P(x) = x^3 - 2x^2 + \alpha x + \beta$, με $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Αν $P(0)=10$ και $P(2)\cdot P(3)\cdot P(4)=0$, τότε: **i)** Να βρείτε τα $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. **ii)** Αν $\alpha=-5$, $\beta=10$ να λύσετε την εξίσωση $P(x)=0$.
17) Έστω $P(x) = x^3 - 3x^2 + \alpha x + \beta$, με $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Αν το πολυώνυμο $P(x)$ διαιρούμενο με το $(x+1)$ αφήνει υπόλοιπο $P(1)-4$ και διαιρούμενο με το $(x-1)$ αφήνει υπόλοιπο $7+2P(-1)$ τότε: **i)** Να δείξετε ότι $P(1)=1$, $P(-1)= -3$ **ii)** Να δείξετε ότι $\alpha=1$, $\beta=2$ και να λύσετε την εξίσωση $P(x)=0$.
18) Έστω $P(x) = 2x^3 + \alpha x^2 + \beta x - 1$ με $\alpha, \beta \in \mathbb{Z}$. Αν η γραφική παράσταση της $P(x)$ τέμνει τον άξονα x′x σε δύο σημεία με ακέραιες τετμημένες **α)** Να βρεθούν τα $\alpha, \beta \in \mathbb{Z}$ **β)** Να βρείτε τα διαστήματα του x , για τα οποία η γραφική παράσταση της $P(x)$ βρίσκεται πάνω από τον x′x.
19) Δίνεται το πολυώνυμο $\mathrm{P}(x) = 3x^4 - 12x^3 + 8x^2 + \alpha x + \beta$, όπου α, β σταθεροί πραγματικοί αριθμοί. Αν το πολυώνυμο $\mathrm{P}(x)$ διαιρούμενο με $x+1$ αφήνει υπόλοιπο $16 + \mathrm{P}(1)$ και διαιρούμενο με $x-1$ αφήνει υπόλοιπο $16 - \mathrm{P}(-1)$, τότε: **α)** να αποδείξετε ότι $\mathrm{P}(1) = 0$ και $\mathrm{P}(-1) = 16$ **β)** να αποδείξετε ότι $\alpha = 4$ και $\beta = -3$ **γ)** να αποδείξετε ότι $\mathrm{P}(4)\cdot\mathrm{P}(5)\cdot\mathrm{P}(6)\cdot\mathrm{P}(7) \neq 0$ (ΤΘ)
20) Να συγκρίνετε τους αριθμούς $x^3 + 1$ και $x^2 + x$ για τις διάφορες τιμές του $x \in \mathbb{R}$.
21) Να βρεθεί η γεωμετρική πρόοδος για την οποία ισχύουν $\alpha_3 = 12$ και $\alpha_6 - \alpha_4 = 72$.
22) Στο σχήμα φαίνονται η γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x) = -x^3 - x^2$ και η ευθεία που διέρχεται από τα σημεία Α (0, 1) και Β (1, −2). **α)** Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας. **β)** Αν η ευθεία έχει εξίσωση $y = -3x + 1$, να βρείτε τις συντεταγμένες των κοινών σημείων της ευθείας με τη γραφική παράσταση της f. **γ)** Να λύσετε την ανίσωση $-x^3 - x^2 < -3x + 1$ (ΤΘ) 
23) Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x^3 + \alpha x^2 + \beta x + \gamma$ τέτοια ώστε: • Η C_f διέρχεται από το Α(1,0). • Το υπόλοιπο της διαίρεσης του $f(x)$ με το x είναι 2. • Το $(x+1)$ είναι παράγοντας της $f(x)$.

α. Να δείξετε ότι α= −2 , β= −1 , γ=2.
β. Να λυθεί η $f(x)$=0.
γ. Να βρεθούν τα διαστήματα στα οποία η C_f είναι πάνω από τον x′x.

24) Μία βιομηχανία έχει υπολογίσει ότι για την ημερήσια παραγωγή x μονάδων από ένα προϊόν έχει κόστος $K(x) = -2x^2 + 120x + 100$ χιλιάδες ευρώ ενώ η πώληση αυτών των x μονάδων της αποφέρει έσοδα $E(x) = x^3 - x^2 + 20x$ χιλιάδες ευρώ. Η βιομηχανία μπορεί να παράξει μέχρι 20 μονάδες αυτού του προϊόντος καθημερινά.
α) Ποια παραγωγή δίνει έσοδα 20.000 ευρώ;
β) Πόσες μονάδες προϊόντος πρέπει να παράγει η βιομηχανία για να έχει κέρδος; (ΙΕΠ)

25) Στο παρακάτω σχήμα δίνεται τμήμα της γραφικής παράστασης της συνάρτησης $f(x) = \frac{1}{3}x^3 + \gamma x + \delta, x \in \mathbb{R}$ και *γ*, *δ* πραγματικές σταθερές.



α) Με βάση τη γραφική παράσταση, να αποδείξετε ότι γ = −1 και δ = 0.

β) Θεωρώντας τώρα δεδομένο ότι $f(x) = \frac{1}{4}x^3 - x, x \in \mathbb{R}$:

i. Να αποδείξετε ότι $f(-x) = f(x)$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

ii. Να μεταφέρετε στην κόλα σας το σχήμα και να συμπληρώσετε τη γραφική παράσταση της f για $x < 0$.

iii. Να επαληθεύσετε ότι $f(1) = -\frac{3}{4}$ και, στη συνέχεια, να λύσετε τις εξισώσεις $f(x) = -\frac{3}{4}$ και $f(x) = \frac{3}{4}$.

26) Έστω ότι το πολυώνυμο $P(x) = \alpha x^3 + \beta x^2 + \gamma x + \alpha$ με α>0 έχει παράγοντα το $x^2 + 2x + 1$
α) Να λυθεί η εξίσωση $P(x)$=0
β) Να λυθεί η ανίσωση $P(x)$<0.

***

27) Να λυθεί στο $\mathbb{R}$ η εξίσωση: $(x-2017)^3 + (x-2018)^3 + (x-2019)^3 = 9$.

Εργασία

Αν οι τρεις ρίζες της εξίσωσης $x^3 + \alpha x^2 + \beta x + \gamma = 0$, είναι διαδοχικοί όροι αριθμητικής προόδου να δείξετε ότι η μία ρίζα είναι ίση με $-\frac{\alpha}{3}$.

4. Εξισώσεις και Ανισώσεις που ανάγονται σε Πολυωνυμικές

Μικρές Παρατηρήσεις

Στις κλασματικές ανισώσεις, **δεν** κάνουμε απαλοιφή παρονομαστών (συνήθως). Τα φέρνουμε όλα στο πρώτο μέλος (αφού πάρουμε περιορισμούς) και χρησιμοποιούμε την ιδιότητα:

$$\frac{\mathrm{A}(x)}{B(x)} > 0 \Leftrightarrow \mathrm{A}(x)B(x) > 0$$

Ασκήσεις

1) Να λύσετε τις εξισώσεις: **i)** $x^2 - \frac{1}{x(2x+1)} = \frac{2}{1+2x}$ **ii)** $x + \frac{2}{x^2-1} = \frac{3}{x-1} + \frac{3x+2}{x+1}$

2) Να λύσετε τις ανισώσεις: **i)** $\frac{x^2}{2x-4} - \frac{4}{x+2} \le \frac{16}{x^2-4}$ **ii)** $\frac{2}{x-x^2} > \frac{x^2+1}{x-1} + \frac{8}{x}$

3) Να λύσετε τις εξισώσεις: **i)** $2 + \sqrt{4-x} = 0$ **ii)** $\sqrt{2-x} = 2$

4) Να λυθεί η εξίσωση $\sqrt{x-2} = x-4$

5) α) Να λύσετε την εξίσωση: $\sqrt{x+2} = x$

β) Να λύσετε την εξίσωση: $x+2 = x^2$

γ) Να λύσετε γραφικά τις παραπάνω εξισώσεις.

**

6) Να λυθεί η εξίσωση: $2\eta\mu^3 x + 3\sigma\upsilon\nu^2 x - 3\eta\mu x - 1 = 0$.

7) Έστω $P(x) = x^3 + 3x^2 + \alpha x + \beta$. Αν το $P(x)$ έχει παράγοντα το $(x+2)$ και $P(1)=9$ τότε:

α) Να βρεθούν τα $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$

β) Για α=3, β=2 να λυθεί η εξίσωση $P(x)=0$.

γ) Για α=3, β=2 να λυθεί η ανίσωση $\frac{P(x)}{x-3} \le 0$.

8) Δίνεται το πολυώνυμο $P(x) = \alpha x^3 + \beta x^2 - 7x + \alpha + 5$, για το οποίο γνωρίζουμε ότι το υπόλοιπο της διαίρεσής του με το x είναι ίσο με 6 και ότι έχει ρίζα το 1.

α) Να βρείτε τις τιμές των α και β

β) Για $\alpha = 1$ και $\beta = 0$, να λύσετε

i. την ανίσωση $P(x) \ge 0$

ii. την εξίσωση $\sqrt{P(x)} = x-1$ (ΤΘ)

9) Δίνεται το πολυώνυμο $P(x)=(\mu-2)x^4+(\mu-1)x^3-\mu x^2-x+2$.

α) Αν το $P(x)$ είναι τρίτου βαθμού να βρείτε το $\mu\in\mathbb{R}$.

β) Αν μ=2:

i. Να βρείτε τα κοινά σημεία της C_p με τον x'x.

ii. Να λύσετε την ανίσωση: $\dfrac{x^2-3x+2}{P(x)}>0$.

10) Δίνεται το πολυώνυμο $P(x)=2x^3+ax^2+\beta x+2$ με $\alpha,\ \beta\in\mathbb{R}$.

α) Αν το πολυώνυμο $P(x)$ έχει παράγοντα το $x-2$ και το υπόλοιπο της διαίρεσής του με το $x+1$ είναι ίσο με -6, να βρείτε τα $\alpha,\ \beta\in\mathbb{R}$.

β) Αν $\alpha=-5$ και $\beta=1$, να λύσετε την εξίσωση $P(x)=0$.

γ) Να λύσετε την εξίσωση $2\sigma\upsilon\nu^3\omega+5\eta\mu^2\omega+\sigma\upsilon\nu\omega-3=0$. (ΤΘ)

11) Έστω $f(x)=x^3-2x^2-x+2$. Να λύσετε την ανίσωση: $\dfrac{3}{f(x)+f(-x)}\leq\dfrac{x-2}{f(x)}$.

12) Δίνεται το πολυώνυμο $\mathrm{P}(x)=(\kappa^2-1)x^4+\frac{1}{2}(\kappa+1)x^3+(\kappa-1)x^2-3\kappa x+\lambda,\kappa,\lambda\in\mathbb{R}$.

α) Να υπολογίσετε τις τιμές των κ και λ αν το πολυώνυμο $\mathrm{P}(x)$ είναι 3ου βαθμού και το υπόλοιπο της διαίρεσης του $\mathrm{P}(x)$ με το $x-1$ είναι ίσο με -4.

β) Για $\kappa=1$ και $\lambda=-2$

i. Να γράψετε την ταυτότητα της Ευκλείδειας διαίρεσης του πολυωνύμου $\mathrm{P}(x)$ με το $x-1$.

ii. Να λύσετε την εξίσωση $\mathrm{P}(x)+4=x^2-1$.

iii. Να λύσετε την ανίσωση $\dfrac{P(x)}{(x-1)^2(x+2)}\geq 1$. (ΤΘ)

Ερωτήσεις πολλαπλής επιλογής
1) Αν το πολυώνυμο $P(x)=(\lambda^2-4)x^2+(\lambda-2)x-(\lambda+2)$, $\lambda\in\mathbb{R}$ είναι πρώτου βαθμού τότε το λ μπορεί να είναι: Α. −1 Β. 0 Γ. −2 Δ. 1 Ε. 4
2) Αν το πολυώνυμο P(x) έχει βαθμό ν και το Q(x) έχει βαθμό μ, τότε το πολυώνυμο P(x)·Q(x) έχει βαθμό: Α. μ+ν Β. μ−ν Γ. μν Δ. μ^ν Ε. ν^μ
3) Ο σταθερός όρος του πολυωνύμου $P(x)=(x-1)^{19}-(x+1)^{20}+4$ είναι: Α. 3 Β. 2 Γ. 1 Δ. 4 Ε. −1
4) Το άθροισμα των συντελεστών του πολυωνύμου P(x) είναι ίσο με 3. Τότε: Α. P(0)=3 Β. P(1)=3 Γ. P(3)=1 Δ. P(1)=6 Ε. P(3)=0
5) Αν το πολυώνυμο P(x) έχει παράγοντα το (x −ρ) τότε P(ρ)= Α. ρ Β. 0 Γ. 2ρ Δ. –ρ Ε. 1
6) Αν το άθροισμα των συντελεστών του πολυωνύμου P(x) είναι ίσο με 0, τότε το P(x) έχει παράγοντα το: Α. x+1 Β. x−1 Γ. x Δ. x+2 Ε. κανένα από τα προηγούμενα
7) Αν το πολυώνυμο P(x) έχει παράγοντα το (x −1) τότε έχει οπωσδήποτε παράγοντα και το: Α. x+1 Β. –x–1 Γ. x Δ. 1–x Ε. κανένα από τα προηγούμενα
8) Αν το πολυώνυμο P(x) έχει παράγοντα το (x –1) τότε το Q(x)=P(2x) έχει παράγοντα το: Α. x +1 Β. x –1 Γ. $x-\frac{1}{2}$ Δ. $x+\frac{1}{2}$ Ε. x –2
9) Το υπόλοιπο της διαίρεσης του P(x) με το x είναι ίσο με: Α. P(0) Β. 0 Γ. 1 Δ. P(1) Ε. κανένα από τα προηγούμενα
10) Η εξίσωση $x^6+x^4+2x^2+4$ έχει ρίζα: Α. 1 Β. −1 Γ. 2 Δ. −2 Ε. Δεν έχει ακέραιες ρίζες
11) Το πολυώνυμο $P(x)=(\lambda^3-1)x^3+(\lambda^2-1)x^2+(\lambda-1)x+(\lambda^2+\lambda-2)$ είναι το μηδενικό πολυώνυμο όταν το λ ισούται με: Α. 2 Β. −2 Γ. 1 Δ. −1 Ε. κανένα από τα προηγούμενα
12) Για ποιες τιμές του $\alpha\in\mathbb{R}$ η τιμή του πολυωνύμου $P(x)=3x^2+\alpha x+\alpha^2-1$ για x=−1 είναι ίση με 1; Α. 1 και 2 Β. 2 και 0 Γ. 1 και −1 Δ. 0 και 1 Ε. Για κανένα $\alpha\in\mathbb{R}$

Επαναληπτικές Ασκήσεις

1) Παρακάτω φαίνεται ένα ελλιπές σχήμα Horner όπου α,β∈ $\mathbb{R}$, το οποίο παριστάνει τη διαίρεση ενός πολυωνύμου $P(x)$ με το $(x-1)$.

α	−2	2	−2	β	1
		1		0	

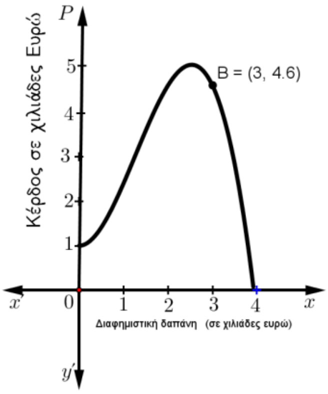
α. Να βρείτε τα α,β∈ $\mathbb{R}$.
β. Αν α=1, β=1
- **i)** να βρείτε τα κοινά σημεία της C_P με τον x’x
- **ii)** να δείξετε ότι η C_P δεν βρίσκεται κάτω από τον x’x
- **iii)** να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης $g(x)=x+\dfrac{P(x)}{x-1}$
- **iv)** να βρείτε τα κοινά σημεία της C_g με την ευθεία y=2x+3.

2) Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο με εμβαδό $E=30cm^2$ του οποίου η υποτείνουσα είναι κατά 1cm μεγαλύτερη από τη μία κάθετη πλευρά. Αν ονομάσουμε x το μήκος αυτής της κάθετης πλευράς και y το μήκος της άλλης κάθετης (σε cm), τότε:
α) Να δείξετε ότι οι αριθμοί x, y ικανοποιούν τις σχέσεις: $y=\dfrac{60}{x}$ και $(x+1)^2=x^2+y^2$
β) Να δείξετε ότι ο αριθμός x ικανοποιεί την εξίσωση: $2x^3+x^2-3600=0$.
γ) Αν γνωρίζετε ότι το μήκος της πλευράς x είναι αριθμός ακέραιος και μικρότερος του 15, να βρείτε την τιμή του x καθώς και τα μήκη των άλλων πλευρών του τριγώνου.
δ) Να εξετάσετε αν υπάρχει άλλο ορθογώνιο τρίγωνο (με διαφορετικά μήκη πλευρών από αυτά που προσδιορίσατε στο ερώτημα (γ)) το οποίο ικανοποιεί τα αρχικά δεδομένα του προβλήματος. (ΤΘ)

3) Δίνεται το πολυώνυμο $P(x)=\kappa x^3-(\kappa+\lambda)x^2+\lambda x+1$.
α) Αν $P\left(-\dfrac{1}{2}\right)=7$ και $P(-1)=23$ να αποδείξετε ότι $\kappa=-6,\quad \lambda=-5$.
β) Να γίνει η διαίρεση του $P(x)$ για $\kappa=-6,\quad \lambda=-5$, με το πολυώνυμο 2$x$+1 και να γραφτεί το $P(x)$ με την ταυτότητα της Ευκλείδειας διαίρεσης.
γ) Να λυθεί η ανίσωση $P(x)>7$ για $\kappa=-6,\quad \lambda=-5$. (Π.Ε. 2002)

4) Δίνεται το πολυώνυμο $\mathrm{P}(x)=x^3+\alpha^3x^2-\alpha^2x-\alpha$, με $\alpha\in\mathbb{R}$.
α) Να κάνετε τη διαίρεση $\mathrm{P}(x):(x-\alpha)$ και να γράψετε την ταυτότητα της διαίρεσης.
β) Να βρείτε τις τιμές του α για τις οποίες το $(x-\alpha)$ διαιρεί το $\mathrm{P}(x)$.
γ) Αν $\alpha=-1$, τότε:
- **i.** Να λύσετε την ανίσωση $\mathrm{P}(x)\geq 0$.
- **ii.** Να λύσετε την ανίσωση $(x+1)\mathrm{P}(x)\leq 0$. (ΤΘ)

5) Μια εταιρεία εκτίμησε ότι το κέρδος της P (σε χιλιάδες ευρώ) από την πώληση ενός συγκεκριμένου προϊόντος ήταν: $\mathrm{P}(x) = -\,0{,}5x^3 + 1{,}9x^2 + 1$, $0 \le x < 4$, όπου x είναι η διαφημιστική δαπάνη (σε χιλιάδες ευρώ). Για αυτό το προϊόν, ξόδεψε για διαφήμιση 3 χιλιάδες ευρώ και το κέρδος της ήταν 4,6 χιλιάδες ευρώ.



α) i. Να χρησιμοποιήσετε την παραπάνω γραφική παράσταση της συνάρτησης P(x) για να εκτιμήσετε ένα άλλο ποσό x που θα μπορούσε να δαπανήσει για διαφήμιση η εταιρεία ώστε να έχει το ίδιο κέρδος.

ii. Να επαληθεύσετε αλγεβρικά το αποτέλεσμα του ερωτήματος i.

β) Πόσα χρήματα πρέπει να δαπανήσει η εταιρεία για διαφήμιση, ώστε το κέρδος της να είναι μεγαλύτερο από 4,6 χιλιάδες ευρώ;

(ΤΘ)

6) Η μέση θερμοκρασία Τ (σε βαθμούς Κελσίου) στην επιφάνεια ενός πλανήτη, μετά από x εκατομμύρια χρόνια, έχει εκτιμηθεί ότι είναι $T(x) = x^3 - 10x^2 + 31x - 30$.

α) Αποδείξτε ότι 2 εκατομμύρια χρόνια μετά, η μέση θερμοκρασία στον πλανήτη θα είναι 0° C.

β) Να βρείτε τους αριθμούς α, β, γ με α < β < γ ώστε να ισχύει $T(x) = (x-\alpha)(x-\beta)(x-\gamma)$.

γ) Θεωρούμε ότι μια χρονική περίοδος παγετώνων στον πλανήτη είναι αυτή στην οποία η μέση θερμοκρασία Τ είναι συνεχώς κάτω από 0°C .Ποιες χρονικές περιόδους θα έχουμε παγετώνες στον πλανήτη; (ΤΘ)