ΠΡΟΟΔΟΙ

4ο ΓΕΝΙΚΟ ΛΥΚΕΙΟ ΧΑΝΙΩΝ

Σπύρος
Ζερβουδάκης
Μαθηματικός
(Msc)

Στην επιστήμη κάποιος προσπαθεί να πει με κατανοητό σε όλους τρόπο κάτι που δεν ήξερε πριν. Στην ποίηση ισχύει το ακριβώς αντίθετο.

Paul Dirac

https://blogs.sch.gr/zervoss/

5.2 Αριθμητική πρόοδος

Μικρές Παρατηρήσεις
Όταν είναι γνωστός ο τύπος του αθροίσματος μιας ακολουθίας μπορούμε να βρούμε το γενικό όρο α_ν από τον τύπο $\alpha_\nu = S_\nu - S_{\nu-1}$.
Αν δίνεται ο γενικός όρος μιας ακολουθίας (α_ν) και θέλουμε να εξετάσουμε αν είναι αριθμητική πρόοδος, βρίσκουμε το $\alpha_\nu - \alpha_{\nu-1}$ και αν αυτό είναι σταθερό, τότε είναι αριθμητική πρόοδος με διαφορά τον σταθερό αριθμό που βρήκαμε.
Αν έχουμε περιττό πλήθος διαδοχικών όρων αριθμητικής προόδου τότε συνήθως βολεύει να τους συμβολίζουμε: …, α−ω, α, α+ω, … (ω είναι η διαφορά).
Αν έχουμε άρτιο πλήθος διαδοχικών όρων αριθμητικής προόδου τότε συνήθως βολεύει να τους συμβολίζουμε: …, α−3ω, α−ω, α+ω, α+3ω, … (2ω είναι η διαφορά).

Ασκήσεις

1) Δίνεται η ακολουθία $\alpha_\nu=2\nu-3$. Να δείξετε ότι είναι Α.Π. και να βρείτε τον α_{20}.

2) Ποιες από τις παρακάτω ακολουθίες αριθμών είναι αριθμητικές πρόοδοι; Να βρείτε την διαφορά ω και τον πρώτο και τον δέκατο όρο σε κάθε μια από τις παρακάτω προόδους.
i) 6, 10, 14, … **ii)** 1, 5, 7,…
iii) -6, -9, -12, … **iv)** 7/2, 5 , 13/2 …

3) Σε μια Α.Π. είναι $\alpha_1+\alpha_5=16$ και $\alpha_2+\alpha_6=22$. Να βρείτε το α_1 και ω.

4) Δίνεται η ακολουθία 8, 5, 2,...
α) Να δείξετε ότι είναι αριθμητική πρόοδος
β) Να βρείτε τον τύπο του ν–οστού όρου και τον α_{10}.

5) Δίνεται η αριθμητική πρόοδος με $\alpha_2=0$ και $\alpha_4=4$.
α) Να δείξετε ότι ω=2 και $\alpha_1=-2$.
β) Να δείξετε ότι $\alpha_\nu=2\nu-4$ και να βρείτε ποιος όρος της είναι το 98. (ΤΘ)

6) Ένα θέατρο έχει 18 σειρές καθισμάτων. Η πρώτη σειρά έχει 15 καθίσματα και κάθε επόμενη σειρά έχει 4 καθίσματα περισσότερα από τη προηγούμενή της. Να βρείτε πόσα καθίσματα έχει:
α) η δεύτερη σειρά **β**) η ένατη σειρά **γ)** η τελευταία σειρά

7) α) Να βρείτε τον πραγματικό αριθμό x ώστε οι αριθμοί: $x+2$, $(x+1)^2$, $3x+2$ με τη σειρά που δίνονται να είναι διαδοχικοί όροι αριθμητικής προόδου.
β) Να βρείτε τη διαφορά ω της παραπάνω αριθμητικής προόδου, όταν:
i) $x=1$
ii) $x=-1$. (ΤΘ)

8) Συνδέστε κατάλληλα κάθε αριθμητική πρόοδο της στήλης Α του πίνακα με το νιοστό όρο της, που υπάρχει στη στήλη Β.

Στήλη Α	**Στήλη Β**
	Α. $\alpha_\nu = 4\nu - 14$
1. $\alpha_1 = 2 \quad , \quad \omega = 3$	**Β.** $\alpha_\nu = 5\nu - 10$
2. $\alpha_1 = 24 \quad , \quad \omega = -3$	**Γ.** $\alpha_\nu = 3\nu - 1$
3. $\alpha_1 = -10 \quad , \quad \omega = 4$	**Δ.** $\alpha_\nu = -3\nu + 27$
	Ε. $\alpha_\nu = 6\nu + 1$

**

9) Να βρείτε το μέγιστο πλήθος πρώτων όρων της Α.Π. 2, 5, 8, … που απαιτούνται, ώστε το άθροισμά τους να μην ξεπερνάει το 100.

10) Να βρείτε το ελάχιστο πλήθος πρώτων όρων της Α.Π. -17, -14, -11, … που απαιτούνται, ώστε το άθροισμά τους να είναι θετικός αριθμός.

11) Να βρεθούν τρεις αριθμοί οι οποίοι είναι διαδοχικοί όροι Α.Π., έχουν άθροισμα 21 και το άθροισμα των τετραγώνων τους είναι 179.

12) Αν για μια αριθμητική πρόοδο ισχύει $\frac{S_7}{S_{10}} = \frac{7}{12}$, να βρείτε το λόγο $\frac{\alpha_{28}}{\alpha_{19}}$.

13) Οι γωνίες ενός κυρτού πολυγώνου σχηματίζουν Α.Π. Αν η μικρότερη γωνία είναι 45° και η μεγαλύτερη 135°, να βρείτε το πλήθος των πλευρών του.

14) Δίνεται μια αριθμητική πρόοδος (α_ν), όπου $\nu \in \mathbb{N}^*$. Αν οι τρεις πρώτοι όροι της προόδου είναι: $\alpha_1 = x$, $\alpha_2 = 2x^2 - 3x - 4$, $\alpha_3 = x^2 - 2$, όπου $x \in \mathbb{Z}$, τότε,
α) να αποδειχθεί ότι $x=3$.
β) να βρεθεί ο ν-οστός όρος της προόδου και να αποδειχθεί ότι δεν υπάρχει όρος της προόδου που να ισούται με 2014.
γ) να υπολογιστεί το άθροισμα $S = \alpha_1 + \alpha_3 + \alpha_5 + ... + \alpha_{15}$. (ΤΘ)

15)* Το άθροισμα των ν πρώτων όρων μιας ακολουθίας είναι $S_\nu = 2\nu^2$ για κάθε $\nu \in \mathbb{N}^*$.
i) Να βρείτε τον γενικό όρο α_ν της ακολουθίας.
ii) Να δείξετε ότι είναι αριθμητική πρόοδος.

16) Αν οι θετικοί α,β,γ είναι διαδοχικοί όροι αριθμητικής προόδου να δείξετε ότι και οι αριθμοί $\frac{1}{\sqrt{\alpha}+\sqrt{\beta}}, \frac{1}{\sqrt{\alpha}+\sqrt{\gamma}}, \frac{1}{\sqrt{\beta}+\sqrt{\gamma}}$ είναι διαδοχικοί όροι αριθμητικής προόδου.

17) Ο Διονύσης γράφει στο τετράδιό του τους αριθμούς 3, 7, 11, 15,... και συνεχίζει προσθέτοντας κάθε φορά το 4. Σταματάει όταν έχει γράψει τους 40 πρώτους από τους αριθμούς αυτούς.
α) Είναι οι παραπάνω αριθμοί διαδοχικοί όροι μιας αριθμητικής προόδου; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.
β) Να βρείτε το άθροισμα των 40 αυτών αριθμών.
γ) Είναι ο αριθμός 120 ένας από αυτούς τους 40 αριθμούς; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.
δ) Ο Γιώργος πήρε το τετράδιο του Διονύση και συνέχισε να γράφει διαδοχικούς όρους της ίδιας αριθμητικής προόδου, από εκεί που είχε σταματήσει ο Διονύσης μέχρι να εμφανιστεί ο αριθμός 235. Να βρείτε το άθροισμα των αριθμών που έγραψε ο Γιώργος.

(ΤΘ)

18) Έστω η φθίνουσα αριθμητική πρόοδος για την οποία ισχύει $\alpha_3 + \alpha_7 = 28$ και $\alpha_3 \cdot \alpha_7 = 160$. Να βρείτε το S_{12}.

19) Να βρείτε έξι αριθμούς οι οποίοι αποτελούν διαδοχικούς όρους αριθμητικής προόδου και επιπλέον ισχύει ότι το γινόμενο των δύο άκρων είναι ίσο με 154 και το άθροισμα των δύο μεσαίων ίσο με 29.

20) Να βρεθούν τρεις ακέραιοι αριθμοί, οι οποίοι είναι διαδοχικοί όροι μιας αριθμητικής προόδου και των οποίων το άθροισμα είναι ίσο με 15 και το άθροισμα των αντιστρόφων των είναι ίσο με $\frac{33}{40}$

21) Να βρεθεί ορθογώνιο τρίγωνο το οποίο έχει περίμετρο 36 και και τα μήκη των πλευρών του είναι διαδοχικοί όροι μιας αριθμητικής προόδου.

22) Να βρείτε το άθροισμα $100^2 - 99^2 + 98^2 - 97^2 + ... + 2^2 - 1$.

23) Σε μια αριθμητική πρόοδο ο πρώτος όρος είναι $\nu^2 - \nu + 1$ και η διαφορά 2. Να δείξετε ότι $S_\nu = \nu^3$.

24) Αν σε μία αριθμητική πρόοδο ισχύει $S_\nu = S_\mu$ με $\mu \neq \nu$, να δείξετε ότι $S_{\nu+\mu} = 0$.

25) Να βρεθεί Αριθμητική Πρόοδος για την οποία είναι $\alpha_1 = 5$ και $\alpha_\mu + \alpha_\nu = \alpha_{\mu+\nu}$.

26) Να δείξετε ότι σε κάθε αριθμητική πρόοδο ισχύει $S_{3\nu} = 3\left(S_{2\nu} - S_\nu\right)$.

27) Στην Α' τάξη ενός Λυκείου της Καρδίτσας η σύμβουλος των μαθηματικών πρόκειται να πραγματοποιήσει μια δραστηριότητα. Επειδή όμως δεν γνωρίζει το πλήθος των μαθητών της τάξης, συμβουλεύεται το Γυμναστή του σχολείου, που στοιχίζει τους μαθητές για τις παρελάσεις και εκείνος της απαντά με ένα πρόβλημα: «Μπορώ να τοποθετήσω όλους τους μαθητές σε x σειρές με $x-1$ μαθητές σε κάθε σειρά. Αν όμως θελήσω να τους τοποθετήσω σε $x+3$ σειρές με $x-3$ μαθητές σε κάθε σειρά, θα μου λείπει ένας μαθητής».

α) Να βρείτε την τιμή του x

β) Να αποδείξετε η Α' τάξη έχει 90 μαθητές.

γ) Η σύμβουλος σκοπεύει να μοιράσει τους παραπάνω 90 μαθητές σε ν ομάδες εργασίας, ώστε στην πρώτη ομάδα να πάνε 2 μαθητές και σε κάθε επόμενη ομάδα να πηγαίνουν 2 παραπάνω κάθε φορά. Να βρείτε την τιμή του ν, δηλαδή πόσες ομάδες εργασίας θα δημιουργηθούν.

(ΤΘ)

28) Το άθροισμα των ν πρώτων όρων μιας ακολουθίας είναι $S_\nu = \nu^2 + 3\nu$.

i) Να βρεθεί ο ν-οστος όρος της ακολουθίας.

ii) Να δείξετε ότι η ακολουθία είναι Α.Π.

29) Να λυθεί η εξίσωση $2^2 \cdot 2^4 \cdot 2^6 \cdot ..... \cdot 2^{2x} = 2^{72}$.

***

30) Να προσδιορίσετε τους πραγματικούς αριθμούς α, β, γ, ώστε αν οι αριθμοί x_1, x_2 είναι οι ρίζες του τριωνύμου $\alpha x^2 + \beta x + \gamma$ οι αριθμοί $x_1, \alpha, \beta, \gamma, x_2$ να είναι διαδοχικοί όροι αύξουσας αριθμητικής προόδου.

31) Έστω η Α.Π. 2, 6, 10, 14, … Να δείξετε ότι κανένας όρος της προόδου δεν είναι τετράγωνο ακεραίου.

32) Να βρεθούν όλες οι αριθμητικές πρόοδοι οι οποίες έχουν πρώτο όρο το 5 και έχουν σαν όρους τους 57 και 113.

Εργασία

Αν τα μήκη των πλευρών ορθογωνίου τριγώνου είναι διαδοχικοί όροι αριθμητικής προόδου, τότε η ακτίνα του εγγεγραμμένου κύκλου ισούται με τη διαφορά της αριθμητικής προόδου.

Ερωτήσεις πολλαπλής επιλογής

1) Από τις παρακάτω ακολουθίες αριθμητική πρόοδος είναι η				
Α) $\frac{2}{5}, \frac{2}{7}, \frac{2}{9}, \frac{2}{11}, \ldots$	**Β)** -3, 0, $\sqrt{3}$, $\sqrt{6}$, ...	**Γ)** -3, 1, 5, 9, 13, ...		
Δ) 2, 4, 8, 16, 32, ...	**Ε)** 3, 6, 8, 10, 11, ...			
2) Σε μια αριθμητική πρόοδο είναι $\alpha_1 = 3$ και $\alpha_5 = 23$. Τότε η διαφορά ω είναι ίση με				
Α) 1	**Β)** 3	**Γ)** 4	**Δ)** 5	**Ε)** 20
3) Σε μια αριθμητική πρόοδο είναι $\alpha_{10} = 2$ και $\omega = 3$. Τότε α_1 είναι ίσο με				
Α) 1	**Β)** 5	**Γ)** 6	**Δ)** -1	**Ε)** -25
4) Σε μια αριθμητική πρόοδο με πρώτο όρο $\alpha_1 = 3$ και διαφορά $\omega = 4$ έχουμε $\alpha_\nu = 35$. Τότε το πλήθος ν των όρων της είναι				
Α) 7	**Β)** 32	**Γ)** 31	**Δ)** 8	**Ε)** 9
5) Σε μια αριθμητική πρόοδο είναι $\alpha_8 = 40$ και $\alpha_{20} = -20$. Τότε ο $14^{ος}$ όρος της είναι ίσος με				
Α) 5	**Β)** 12	**Γ)** 10	**Δ)** 20	**Ε)** 9
6) Σε μια αριθμητική πρόοδο είναι $\alpha_1 = 11$ και $\omega = -3$. Τότε οι **θετικοί** της όροι είναι				
Α) 2	**Β)** 3	**Γ)** 4	**Δ)** 5	**Ε)** όλοι οι όροι της
7) Ο $10^{ος}$ όρος της αριθμητικής προόδου : $10, 7, 4, \cdots$ είναι				
Α) -14	**Β)** -20	**Γ)** -17	**Δ)** -30	**Ε)** 0
8) Σε μια αριθμητική πρόοδο είναι $\alpha_1 = 7$ και $\omega = 2$. Τότε **ΔΕΝ** είναι όρος της ο				
Α) 11	**Β)** 21	**Γ)** 17	**Δ)** 33	**Ε)** 22
9) Η ακολουθία με γενικό όρο $\alpha_\nu = 3\nu + 2$ είναι αριθμητική πρόοδος με διαφορά ω ίση με				
Α) 5	**Β)** 2	**Γ)** -1	**Δ)** 3	**Ε)** 10
10) Σε μια αριθμητική πρόοδο είναι $\alpha_1 = 8$ και $\omega = 3$. Τότε ο νιοστός της όρος είναι ίσος με				
Α) $\alpha_\nu = 8\nu + 3$	**Β)** $\alpha_\nu = 3\nu + 8$	**Γ)** $\alpha_\nu = 3\nu + 5$		
Δ) $\alpha_\nu = 5\nu + 3$	**Ε)** $\alpha_\nu = \nu + 11$			
11) Αν σε μια αριθμητική πρόοδο είναι $\alpha_4 = x$ και $\alpha_6 = y$, τότε η διαφορά ω είναι ίση με				
Α) $\frac{x+y}{2}$	**Β)** $\frac{x-y}{2}$	**Γ)** $y - \frac{x}{2}$	**Δ)** $\frac{y-x}{2}$	**Ε)** $\frac{y}{2} - x$
12) Η διαφορά της αριθμητικής προόδου : $\alpha+\beta, \alpha, \alpha-\beta, \cdots$ είναι				
Α) α	**Β)** β	**Γ)** 2β	**Δ)** $-\alpha$	**Ε)** $-\beta$

13) Αν οι αριθμοί $3k$, $k+4$, $k-1$ είναι διαδοχικοί όροι αριθμητικής προόδου, τότε ο k είναι ίσος με **Α)** 4 **Β)** 2 **Γ)** 5 **Δ)** 4,5 **Ε)** 1,5
14) Αν οι αριθμοί x, y, z είναι διαδοχικοί όροι αριθμητικής προόδου, τότε ισχύει **Α)** $y = x + z$ **Β)** $z = x + y$ **Γ)** $z = x + 2y$ **Δ)** $z - y = y - x$ **Ε)** $z - x = 2y$
15) Αν οι $\gamma, \alpha+\beta, \alpha-\beta$ είναι διαδοχικοί όροι αριθμητικής προόδου, τότε **Α)** $\gamma = \beta$ **Β)** $\gamma = \beta - \alpha$ **Γ)** $\gamma = \alpha + 2\beta$ **Δ)** $\gamma = \alpha + 3\beta$ **Ε)** $\gamma = \alpha + 4\beta$
16) Αν οι αριθμοί $\frac{1}{\alpha}, \frac{1}{\beta}, \frac{1}{\gamma}$ είναι διαδοχικοί όροι αριθμητικής προόδου, τότε **Α)** $\frac{1}{\beta} = \frac{\alpha+\gamma}{2}$ **Β)** $\frac{1}{\beta} = \frac{2}{\alpha+\gamma}$ **Γ)** $\frac{2}{\beta} = \frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\gamma}$ **Δ)** $\frac{\beta}{2} = \frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\gamma}$ **Ε)** $\frac{1}{\beta} = \frac{2}{\alpha} + \frac{2}{\gamma}$
17) Σε μια αριθμητική πρόοδο τα αθροίσματα $S_6 = 93$ και $S_5 = 90$. Τότε ισχύει **Α)** $\omega = 3$ **Β)** $\alpha_1 = 3$ **Γ)** $\alpha_5 = 3$ **Δ)** $\alpha_6 = 3$ **Ε)** $S_4 = 3$

5.3 Γεωμετρική πρόοδος

Μικρές Παρατηρήσεις
Αν δίνεται ο γενικός όρος μιας ακολουθίας (α_ν) και θέλουμε να εξετάσουμε αν είναι γεωμετρική πρόοδος, βρίσκουμε το $\dfrac{\alpha_\nu}{\alpha_{\nu-1}}$ και αν αυτό είναι σταθερό, τότε είναι γεωμετρική πρόοδος με λόγο τον σταθερό αριθμό που βρήκαμε.
Αν έχουμε περιττό πλήθος διαδοχικών όρων γεωμετρικής προόδου τότε συνήθως βολεύει να τους συμβολίζουμε: $\ldots, \dfrac{\alpha}{\lambda}, \alpha, \alpha\lambda, \ldots$ (λ είναι ο λόγος).
Αν έχουμε άρτιο πλήθος διαδοχικών όρων γεωμετρικής προόδου τότε συνήθως βολεύει να τους συμβολίζουμε: $\ldots, \dfrac{\alpha}{\lambda^3}, \dfrac{\alpha}{\lambda}, \alpha\lambda, \alpha\lambda^3, \ldots$ (λ^2 είναι ο λόγος).

Ασκήσεις

1) Σε γεωμετρική πρόοδο (α_ν) με θετικό λόγο λ, ισχύει: $\alpha_3=1$ και $\alpha_5=4$.
α) Να βρείτε το λόγο λ της προόδου και τον πρώτο όρο της.
β) Να αποδείξετε ότι ο ν-οστός όρος της προόδου είναι $\alpha_\nu=2^{\nu-3}$. (ΤΘ)

2) Σε μια γεωμετρική πρόοδο δίνονται $\alpha_4-\alpha_2=24$ και $\alpha_2+\alpha_3=6$. Να βρείτε την πρόοδο.

3) **α**) Να βρείτε το x ώστε οι αριθμοί x, 2x+1, 5x+4 με τη σειρά που δίνονται να είναι διαδοχικοί όροι γεωμετρική προόδου.
β) Να βρείτε τον λόγο λ της προόδου όταν: **i**) x=1 **ii**) x=–1. (ΤΘ)

4) Να βρείτε το x ώστε οι αριθμοί $x-1$, $x+1$, $x+2$ να είναι όροι Γ.Π.

5) Δίνονται οι γ.π. (α_ν) με $\alpha_1=12$, λ=2 και (β_ν) με $\beta_1=3/64$ και λ=4.
α) Να βρείτε και να συγκρίνετε τους όρους α_{10} και β_{10}
β) Υπολογίστε το άθροισμα: $\alpha_4+\ldots+\alpha_{10}$

6) Δίνεται η εξίσωση $2x^2-5\beta x+2\beta^2=0$ (1), με β>0.
α) Να δείξετε ότι η εξίσωση (1) έχει ρίζες: $x_1=2\beta$ και $x_2=\dfrac{\beta}{2}$.
β) Αν x_1, x_2 είναι οι ρίζες της (1), να εξετάσετε αν οι αριθμοί x_1, β, x_2, με τη σειρά που δίνονται, είναι διαδοχικοί όροι γεωμετρικής προόδου και να αιτιολογήσετε το συλλογισμό σας. (ΤΘ)

7) Να βρεθεί η φθίνουσα γεωμετρική πρόοδος της οποίας το άθροισμα των τριών πρώτων όρων είναι 42 και ο πρώτος όρος της 24.

8) Αν (α_ν) είναι Γ.Π. να δείξετε ότι $\dfrac{\alpha_4-\alpha_1}{\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3}+1=\lambda$.
9) Δίνεται η γεωμετρική πρόοδος (α_ν), για την οποία ισχύει $\dfrac{\alpha_5}{\alpha_2}=27$. **α**) Να δείξετε ότι ο λόγος της προόδου είναι λ=3. **β**) Αν το άθροισμα των τεσσάρων πρώτων όρων της προόδου είναι 200, να βρείτε τον πρώτο όρο α_1. (ΤΘ)
10) Να βρείτε τον α∈ℝ τέτοιο ώστε οι αριθμοί 2α+1, 3α+4, 5α+10 να είναι διαδοχικοί όροι γεωμετρικής προόδου.

**
11) Δίνεται η ακολουθία $\alpha_\nu=5\cdot 2^\nu$. **α**) Να δείξετε ότι είναι γεωμετρική πρόοδος **β**) Να βρείτε τον α_{10}. **γ**) Ποιος όρος της είναι ο 640;
12) Να βρεθεί Γεωμετρική Πρόοδος, αν το άθροισμα των τριών πρώτων όρων της είναι 112 και το άθροισμα των τριών επόμενων είναι 14.
13) Δίνεται ορθογώνιο παραλληλόγραμμο με μήκη πλευρών α, β και εμβαδόν Ε, τέτοια ώστε οι αριθμοί α, Ε, β, με τη σειρά που δίνονται να είναι διαδοχικοί όροι γεωμετρικής προόδου. **α**) Να αποδείξετε ότι Ε=1. **β**) Αν α+β=10 τότε: **i**) Να κατασκευάσετε μια εξίσωση 2ου βαθμού με ρίζες τα μήκη α, β **ii**) Να βρείτε τα μήκη α, β. (ΤΘ)
14) *(Κλάσικ)* Ένα νούφαρο διπλασιάζεται σε μέγεθος κάθε μέρα. Την εκατοστή μέρα, έχει γεμίσει ολόκληρη τη λίμνη. Ποια μέρα το μέγεθος του κάλυπτε τη μισή λίμνη; 
15) Αν *α, β, γ* αποτελούν διαδοχικούς όρους γεωμετρικής προόδου τότε να αποδείξετε ότι οι $\dfrac{1}{\alpha-\beta}$, $\dfrac{1}{\alpha-\gamma}$, $\dfrac{1}{\alpha+\beta}$ αποτελούν διαδοχικούς όρους αριθμητικής προόδου.
16) Μία Αριθμητική Πρόοδος και μία Γεωμετρική Πρόοδος έχουν τον ίδιο πρώτο όρο και η διαφορά της Αριθμητικής Προόδου είναι ίση με τον λόγο της Γεωμετρικής Προόδου. Να βρεθούν οι δύο πρόοδοι αν ο 7^{ος} όρος της Αριθμητικής Προόδου είναι 20 και ο 2^{ος} όρος της Γεωμετρικής Προόδου είναι 6.
17) Να γράψετε τους όρους που λείπουν ώστε οι παρακάτω γραμμές να είναι γεωμετρικές πρόοδοι (όπου α και β θετικοί):

i)	…	$\frac{\alpha}{\beta}$	$\alpha\cdot\beta$	...	...
ii)	...	$\alpha\cdot\beta$	...	$\frac{\alpha}{\beta}$	...
iii)	...	$\frac{\alpha}{\beta}$	...	...	$\alpha\cdot\beta^2$

18) Σε έναν οργανισμό, αρχικά υπάρχουν 204800 βακτήρια. Μετά από 1 ώρα υπάρχουν 102400 βακτήρια, μετά από 2 ώρες 51200 βακτήρια, και γενικά ο αριθμός των βακτηρίων υποδιπλασιάζεται κάθε μια ώρα.

α) Πόσα βακτήρια θα υπάρχουν μετά από 6 ώρες;

β) Τη χρονική στιγμή όμως που τα βακτήρια ήταν 3200, ο οργανισμός παρουσίασε ξαφνική επιδείνωση. Ο αριθμός των βακτηρίων άρχισε πάλι να αυξάνεται ώστε κάθε μια ώρα να τριπλασιάζεται. Το φαινόμενο αυτό διήρκεσε για 5 ώρες. Συμβολίζουμε με β_ν το πλήθος των βακτηρίων ν ώρες μετά από την στιγμή της επιδείνωσης ($\nu \leq 5$).

i) Να δείξετε ότι η ακολουθία (β_ν) είναι γεωμετρική πρόοδος, και να βρείτε τον πρώτο όρο και το λόγο της.

ii) Να εκφράσετε το πλήθος β_ν των βακτηρίων συναρτήσει του ν.

iii) Πόσα βακτήρια θα υπάρχουν στον οργανισμό 3 ώρες μετά από την στιγμή της επιδείνωσης;

(ΤΘ)

19) Αν οι αριθμοί α, β, 12 είναι διαδοχικοί όροι γεωμετρικής προόδου και οι α, β, 9 είναι διαδοχικοί όροι αριθμητικής προόδου να βρείτε τους α, β.

20) Το άθροισμα τριών διαδοχικών όρων Γεωμετρικής Προόδου είναι 14 και το γινόμενό τους 64. Να βρεθούν οι όροι αυτοί.

21) Έστω γεωμετρική πρόοδος για την οποία ισχύει $\frac{\alpha_2}{\alpha_5} = \frac{1}{8}$ και $\alpha_2 - \alpha_4 + \alpha_5 = 30$. Να υπολογίσετε το άθροισμα $S = \alpha_{11} + \alpha_{12} + ... + \alpha_{20}$.

22) Το πάχος μιας κόλλας χαρτιού είναι περίπου 0,001cm (ένα χιλιοστό του εκατοστού). Διπλώνουμε το χαρτί στη μέση και έπειτα ξανά στη μέση. Επαναλαμβάνουμε το δίπλωμα αρκετές φορές. Τώρα βγαίνουμε για λίγο από το instagram και χρησιμοποιούμε το κινητό μας για να κάνουμε υπολογισμούς.

i) Ποιο θα είναι, περίπου, το πάχος του χαρτιού μετά από 10 διπλώματα;

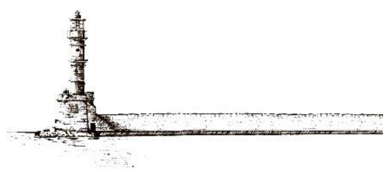
α) 1mm **β)** 2mm **γ)** 1cm

ii) Ποιο θα είναι, περίπου, το πάχος του χαρτιού μετά από 21 διπλώματα;

α) 2cm **β)** 1m **γ)** όσο το ύψος του φάρου στο Ενετικό λιμάνι μας (≈ 21m)

iii) Ποιο θα είναι, περίπου, το πάχος του χαρτιού μετά από 45 διπλώματα;

α) 500m **β)** 1km **γ)** όσο η απόσταση Γης – Σελήνης (≈ 384.000km)



23) Τρεις θετικοί αριθμοί είναι διαδοχικοί όροι γεωμετρικής προόδου. Αν αυξήσουμε τον δεύτερο κατά 2 θα προκύψει αριθμητική πρόοδος. Αν στη συνέχεια αυξήσουμε και τον τρίτο όρο κατά 16 θα προκύψει πάλι γεωμετρική πρόοδος. Να βρεθούν αυτοί οι αριθμοί.
24) Αν οι αριθμοί α,β,γ είναι διαδοχικοί όροι αριθμητικής προόδου και οι α, β−1, γ−2 είναι διαδοχικοί όροι γεωμετρικής προόδου με λόγο 2, να βρείτε τους αριθμούς α,β,γ.
25) Δίνεται η γεωμετρική πρόοδος (α_ν) με λόγο λ για την οποία ισχύουν τα ακόλουθα: $\alpha_3=4$, $\alpha_5=16$ και λ>0. **α**) Να βρείτε τον πρώτο όρο α_1 και το λόγο λ της προόδου. **β**) Να αποδείξετε ότι η ακολουθία (β_ν), με (β_ν)=$\frac{1}{\alpha_\nu}$ αποτελεί επίσης γεωμετρική πρόοδο με λόγο τον αντίστροφο του λόγου της (α_ν). **γ**) Αν S_{10} και S'_{10} είναι τα αθροίσματα των 10 πρώτων όρων των προόδων (α_ν) και (β_ν) αντίστοιχα, να αποδείξετε ότι ισχύει η σχέση $S'_{10}=\frac{1}{2^9}S_{10}$. (ΤΘ)
26) Αν x_1, x_2 είναι ρίζες της εξίσωσης $x^2-3x+\alpha=0$, και x_3, x_4 είναι ρίζες της εξίσωσης $x^2-12x+\beta=0$, να βρεθούν τα *α,β* αν γνωρίζουμε ότι οι αριθμοί x_1, x_2, x_3, x_4 (με αυτή τη σειρά) αποτελούν διαδοχικούς θετικούς όρους αύξουσας γεωμετρικής προόδου.
27) Να βρεθούν τρεις θετικοί αριθμοί οι οποίοι είναι διαδοχικοί όροι γεωμετρικής προόδου εάν το άθροισμά τους είναι 21 και το άθροισμα των αντιστρόφων τους είναι $\frac{7}{12}$.

Ερωτήσεις πολλαπλής επιλογής

1) Από τις παρακάτω ακολουθίες είναι γεωμετρική πρόοδος η **Α)** 5, 15, 25, … **Β)** 10, 20, 30, … **Γ)** 4, 20, 100, … **Δ)** 3, 6, 9, … **Ε)** −5, 10, 25, …
2) Αν σε μία γεωμετρική πρόοδο $\alpha_1 = 4$ και λ = 3, αυτή είναι **Α)** 4, 4·3, 4·6, … **Β)** 4, 7, 10, 13, … **Γ)** 4, 12, 36, … **Δ)** 4, 4^3, 4^9, … **Ε)** 3, 12, 48, …
3) Αν 7, - 21, 63, … μια γεωμετρική πρόοδος, τότε ο λ είναι **Α)** 3 **Β)** 4 **Γ)** 14 **Δ)** −14 **Ε)** −3
4) Αν σε μία γεωμετρική πρόοδο είναι $\alpha_1 = 5$, λ = 2, τότε ο α_5 είναι **Α)** $\sqrt{5}$ **Β)** 80 **Γ)** 10 **Δ)** −25 **Ε)** 320
5) Αν σε μία γεωμετρική πρόοδο είναι $\alpha_1 = 3$ και $\alpha_4 = 375$, τότε ο λ είναι **Α)** 3 **Β)** 5 **Γ)** 10 **Δ)** 372 **Ε)** 378

6) Ο 4ος όρος της γεωμετρικής προόδου $-\frac{3}{4}$, 1, ...είναι **Α)** $-\frac{9}{16}$ **Β)** $\frac{16}{9}$ **Γ)** $\frac{9}{16}$ **Δ)** $\frac{3}{4}$ **Ε)** $-\frac{16}{9}$
7) Αν σε μία γεωμετρική πρόοδο είναι $\lambda = 2$ και $\alpha_6 = 448$, τότε ο α_1 είναι **Α)** 1200 **Β)** −100 **Γ)** 600 **Δ)** 14 **Ε)** −50
8) Αν σε μια γεωμετρική πρόοδο $\alpha_5 = 48$ και $\alpha_7 = 192$, τότε το α_3 είναι **Α)** 24 **Β)** −12 **Γ)** 36 **Δ)** 144 **Ε)** 12
9) Αν οι α, β, γ, δ, είναι διαδοχικοί όροι Γ.Π. τότε: **Α)** $\beta^2=\alpha\delta$ **Β)** $2\beta=\alpha\gamma$ **Γ)** $\frac{\alpha}{\beta}=\frac{\delta}{\gamma}$ **Δ)** $\alpha\gamma=\beta\delta$ **Ε)** $\frac{\gamma}{\alpha}=\frac{\delta}{\beta}$
10) Αν οι $x-1$, $x+1$, $x+5$ είναι διαδοχικοί όροι γεωμετρικής προόδου, τότε **Α)** $x = 4$ **Β)** $x = 3$ **Γ)** $x = 2$ **Δ)** $x = -1$ **Ε)** $x = 1$
11) Αν σε μία γεωμετρική πρόοδο είναι $\alpha_1 = 3$, $\lambda = 2$, τότε ο νιοστός όρος της είναι **Α)** $\alpha_\nu = 3\ 2^\nu$ **Β)** $\alpha_\nu = 3^\nu + 2$ **Γ)** $\alpha_\nu = -2^\nu - 3$ **Δ)** $\alpha_\nu = 2\cdot 3^{\nu-1}$ **Ε)** $\alpha_\nu = 3\cdot 2^{\nu-1}$
12) Αν μία γεωμετρική πρόοδος έχει $\alpha_\nu = 2\cdot 5^{\nu-1}$, τότε αυτή έχει **Α)** $\alpha_1 = \frac{1}{2}$, $\lambda = 5$ **Β)** $\alpha_1 = 3$, $\lambda = 2$ **Γ)** $\alpha_1 = 2$, $\lambda = 5$ **Δ)** $\alpha_1 = 5$, $\lambda = 2$ **Ε)** $\alpha_1 = 10$, $\lambda = \frac{1}{2}$
13) Στη γεωμετρική πρόοδο −1, 2, −4, ... το άθροισμα των 6 πρώτων όρων της είναι **Α)** −48 **Β)** 21 **Γ)** 8 **Δ)** −16 **Ε)** −21
14) Αν $\alpha_1 = 8$ και $\lambda = 3$, τότε το S_4 είναι **Α)** 240 **Β)** 180 **Γ)** 320 **Δ)** −360 **Ε)** 720
15) Αν $\alpha_1 = 7$ και $S_4 = 280$, τότε το λ είναι **Α)** 3 **Β)** 7 **Γ)** $\frac{1}{7}$ **Δ)** −2 **Ε)** 5

	Αριθμητική Πρόοδος	Γεωμετρική Πρόοδος
Ορισμός προόδου:	$\alpha_{\nu+1} = \alpha_{\nu} + \omega$	$\alpha_{\nu+1} = \alpha_{\nu} \cdot \lambda$
Διαφορά Α.Π. (ω) **Λόγος Γ.Π. (λ)**	$\omega = \alpha_{\nu+1} - \alpha_{\nu}$	$\lambda = \dfrac{\alpha_{\nu+1}}{\alpha_{\nu}}$
Ο ν-ος όρος της προόδου: (α_ν)	$\alpha_{\nu} = \alpha_1 + (\nu - 1) \cdot \omega$	$\alpha_{\nu} = \alpha_1 \cdot \lambda^{\nu-1}$
Αν α,β,γ είναι διαδοχικοί όροι της προόδου τότε:	Αριθμητικός μέσος $\beta = \dfrac{\alpha + \gamma}{2}$	Γεωμετρικός μέσος $\beta^2 = \alpha \cdot \gamma$
Το άθροισμα των ν πρώτων όρων είναι:	$S_{\nu} = \dfrac{\nu}{2}(\alpha_1 + \alpha_{\nu})$ $S_{\nu} = \dfrac{\nu}{2}[2\alpha_1 + (\nu - 1)\omega]$	$S_{\nu} = \dfrac{\alpha_1(\lambda^{\nu} - 1)}{\lambda - 1}, \lambda \neq 1$