

ΤΡΙΓΩΝΟΜΕΤΡΙΑ

Σπύρος Ζερβουδάκης
Μαθηματικός
(Msc)

<https://blogs.sch.gr/zervoss/>

1. Τριγωνομετρικοί Αριθμοί Γωνίας

Μικρές Παρατηρήσεις

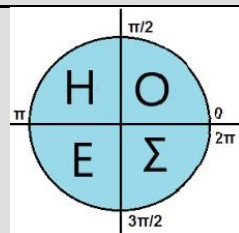
Μνημονικός κανόνας ΟΗΕΣ

Ο : όλα θετικά

Η : ημx θετικό

Ε : εφx και σφx θετικά

Σ : συνx θετικό



Ασκήσεις

1) Να υπολογίσετε τους τριγωνομετρικούς αριθμούς της γωνίας: **i)** 1470° **ii)** 1110°

2) Να υπολογίσετε τους τριγωνομετρικούς αριθμούς της γωνίας (rad): **i)** $\frac{25\pi}{6}$ **ii)** $\frac{15\pi}{2}$

3) **α)** Δίνεται γωνία, με $0^\circ \leq \omega < 360^\circ$ που ικανοποιεί τις σχέσεις: $\eta\mu\omega = -1/2$ και $\sigma\upsilon\nu\omega > 0$. Να σχεδιάσετε τη γωνία ω πάνω στον τριγωνομετρικό κύκλο, να εξηγήσετε γιατί είναι μοναδική και να βρείτε το μέτρο της.

β) Να βρείτε όλες τις γωνίες φ με $0^\circ \leq \varphi < 360^\circ$, που ικανοποιούν τη σχέση $\eta\mu\varphi = -1/2$ και να τις σχεδιάσετε πάνω στον τριγωνομετρικό κύκλο. (ΙΕΠ)

4) Δίνεται κύκλος με κέντρο Κ και ακτίνα 10cm. Επίσης δίνεται το τόξο ΑΒ με μήκος 25 cm και αντίστοιχη επίκεντρη γωνία ω .

α) Να βρείτε το μέτρο της ω σε rad.

β) Να δικαιολογήσετε ότι το συνημίτονο της γωνίας ω είναι αρνητικό.

5) Να αποδείξετε ότι: $|2\sigma\upsilon\nu^2 x - 3\eta\mu x + 2| \leq 7$.

6) Στο ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ είναι $\hat{A} = 90^\circ$, ΒΓ=10cm και $\eta\mu\Gamma = \frac{3}{5}$. Να βρείτε:

i) Τις πλευρές ΑΓ και ΑΒ.

ii) Τους τριγωνομετρικούς αριθμούς της γωνίας \hat{B} .

7) Σε έναν τριγωνομετρικό κύκλο να τοποθετήσετε τους αριθμούς: $\eta\mu 150^\circ$, $\sigma\upsilon\nu 150^\circ$, $\epsilon\varphi 150^\circ$, $\sigma\varphi 150^\circ$.

8) Αν ισχύει $2\sigma\upsilon\nu\alpha - 3\eta\mu\beta = 5$ να βρείτε τα $\sigma\upsilon\nu\alpha$, $\eta\mu\beta$.

9) Να δείξετε ότι η εξίσωση $x^2 - 2x - \eta\mu\theta = 0$ έχει πραγματικές ρίζες για κάθε τιμή του $\theta \in \mathbb{R}$.

10) Δίνονται οι γωνίες α και β για τις οποίες ισχύει $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$ και $0 < \beta < \frac{\pi}{2}$. Να βρείτε το πρόσημο των αριθμών: **i)** $\eta\mu 2\alpha$ **ii)** $\sigma\upsilon\nu(\alpha-\beta)$

**

11) Έστω ορθογώνιο παραλλ/μο $AB\Gamma\Delta$ και φ η γωνία που σχηματίζει η διαγώνιος $A\Gamma$ με την $\Gamma\Delta$. Αν $A\Gamma = \sqrt{3}$ και η περίμετρος του $AB\Gamma\Delta$ είναι $\Pi(\varphi) = 3 + 2\sqrt{3} \eta\mu\varphi$, να βρείτε τη γωνία φ .

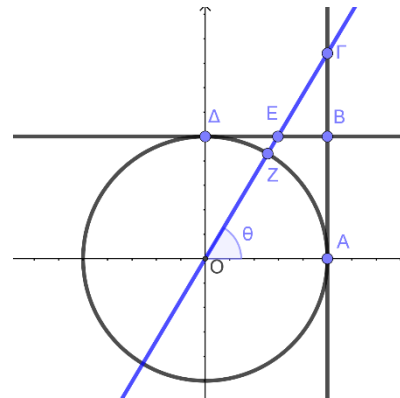
12) Να δείξετε ότι: $\sigma\upsilon\nu(\eta\mu x) > 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

13) Να δείξετε ότι: $\eta\mu 1 \cdot \sigma\upsilon\nu 2 \cdot \eta\mu 3 \cdot \sigma\upsilon\nu 4 > 0$

Άσκηση αντιστοίχισης

14) Αν γνωρίζετε ότι ο διπλανός κύκλος είναι τριγωνομετρικός και $\theta = 60^\circ$, να αντιστοιχήσετε τα σημεία με τις συντεταγμένες τους.

A	$(1, \sqrt{3})$
B	$\left(\frac{\sqrt{3}}{3}, 1\right)$
Γ	$(0, 1)$
Δ	$(1, 0)$
E	$\left(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$
Z	$(1, 1)$



Εργασία

15) Οι πλευρές ορθογωνίου τριγώνου αποτελούν διαδοχικούς όρους Γεωμετρικής Προόδου. Να βρείτε τις εφαπτομένες των οξείων γωνιών του.

Practice

$\sin \omega = \eta\mu\omega$
sine = ημίτονο

$\cos \omega = \sigma\upsilon\upsilon\omega$
cosine = συνημίτονο

$\tan \omega = \epsilon\phi\omega$
tangent = εφαπτομένη

$\cot \omega = \sigma\phi\omega$
cotangent = συνεφαπτομένη

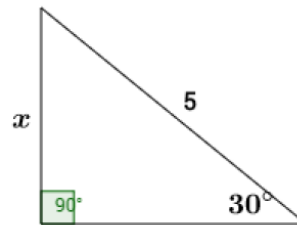
hypotenuse = υποτείνουσα

opposite = απέναντι

adjacent = προσκείμενη

16) i) Convert $\frac{5\pi}{6}$ rad to degrees ii) Convert 80° to radians

17) Find the length of side x .



2. Βασικές Τριγωνομετρικές Ταυτότητες

Ασκήσεις

1) Αν $\eta\mu x = \frac{\sqrt{2}}{3}$ και $\frac{\pi}{2} < x < \pi$, να υπολογίσετε τους υπόλοιπους τριγωνομετρικούς της γωνίας x .

2) Αν $\epsilon\phi x = -\frac{1}{2}$ και $\frac{3\pi}{2} < x < 2\pi$, να υπολογίσετε τους υπόλοιπους τριγωνομετρικούς της γωνίας x .

3) Έστω ότι $\eta\mu x = \frac{4}{5}$ και $\frac{\pi}{2} < x < \pi$, να υπολογίσετε την παράσταση $A = 3 + \sigma\upsilon\nu x$.

4) α) Υπάρχει γωνία θ με $\eta\mu\theta = 1/4$ και $\sigma\upsilon\nu\theta = 3/4$;

β) Υπάρχει γωνία θ με $\eta\mu\theta = 3/5$ και $\sigma\upsilon\nu\theta = -4/5$;

Αν όχι, αιτιολογήστε. Αν ναι, να σχεδιάσετε μια τέτοια γωνία πάνω στον τριγωνομετρικό κύκλο. Πόσες τέτοιες γωνίες μεταξύ 0° και 360° υπάρχουν; (ΙΕΠ)

5) Να δείξετε ότι η παράσταση $A(x) = \eta\mu^4 x - 2\eta\mu^2 x - \sigma\upsilon\nu^4 x$ είναι σταθερή.

6) Αν για τη γωνία x , ισχύει: $5\sigma\upsilon\nu^2 x + 8\eta\mu x = 1$ να βρείτε το $\eta\mu x$.

7) Να δείξετε ότι: $\eta\mu x \cdot \sigma\upsilon\nu x \leq \frac{1}{2}$.

8) Αν $\eta\mu\theta + \sigma\upsilon\nu\theta = \frac{8}{7}$ να υπολογίσετε τα: α) $\eta\mu\theta \cdot \sigma\upsilon\nu\theta$ β) $\frac{1}{\eta\mu\theta} + \frac{1}{\sigma\upsilon\nu\theta}$ γ) $\epsilon\phi\theta + \sigma\phi\theta$

9) Να δείξετε ότι για κάθε $x \in [0, \frac{\pi}{2}]$ ισχύει $\eta\mu x + \sigma\upsilon\nu x \leq \sqrt{2}$. Πότε ισχύει η ισότητα;

10) Να δείξετε ότι: $\eta\mu^2 x \cdot \epsilon\phi x + \sigma\upsilon\nu^2 x \cdot \sigma\phi x + 2\eta\mu x \sigma\upsilon\nu x = \epsilon\phi x + \sigma\phi x$.

11) Για ποια $\kappa \in \mathbb{R}$ υπάρχει γωνία x , ώστε να ισχύει: $\eta\mu x = \frac{2\kappa}{\kappa + 3}$ και $\sigma\upsilon\nu x = \frac{\kappa - 3}{\kappa + 3}$

**

12) Δίνεται η γωνία x , με $\frac{\pi}{2} < x < \pi$ για την οποία ισχύει $\sigma\upsilon\nu^2 x - \sigma\upsilon\nu x + 1 = 0$. Να βρείτε τους τριγωνομετρικούς αριθμούς της γωνίας x .

13) α) Να λύσετε το σύστημα:
$$\begin{cases} x + y = -1 \\ x^2 + y^2 = 1 \end{cases}$$

β) Με τη βοήθεια του ερωτήματος (α) και του τριγωνομετρικού κύκλου, να βρείτε όλες τις γωνίες ω , με $0 \leq \omega \leq 2\pi$, που ικανοποιούν τη σχέση $\sigma\upsilon\nu\omega + \eta\mu\omega = -1$ και να τις απεικονίσετε πάνω στον τριγωνομετρικό κύκλο. (ΤΘ)

14) Για $x \neq \frac{\kappa\pi}{2}, \kappa \in \mathbb{Z}$ να δείξετε ότι $(\eta\mu^4 x + \sigma\upsilon\nu^4 x)(\epsilon\phi x + \sigma\phi x)^2 = \epsilon\phi^2 x + \sigma\phi^2 x$.

15) Δίνεται το σύστημα:
$$\begin{cases} -x + 2y = 1 \\ x + \lambda y = \lambda \end{cases}$$
, με παράμετρο $\lambda \in \mathbb{R}$.

α) Να λύσετε το σύστημα για τις διάφορες τιμές του $\lambda \in \mathbb{R}$.

β) Αν $\lambda = -1$ και (x_0, y_0) είναι η αντίστοιχη λύση του συστήματος, να βρείτε γωνία $\theta \in [0, 2\pi)$ τέτοια ώστε $x_0 = \sigma\upsilon\nu\theta$ και $y_0 = \eta\mu\theta$.

γ) Αν $\lambda = 1$ και (x_1, y_1) είναι η αντίστοιχη λύση του συστήματος, να δείξετε ότι δεν υπάρχει γωνία ω , τέτοια ώστε $x_1 = \sigma\upsilon\nu\omega$ και $y_1 = \eta\mu\omega$. (ΤΘ)

16) Αν ισχύει $\eta\mu^{2021} x + \sigma\upsilon\nu^{2021} x = 1$, να δείξετε ότι είναι $\eta\mu x + \sigma\upsilon\nu x = 1$.

17) Αν ισχύει $\frac{\eta\mu^4 x}{\eta\mu^2 \alpha} + \frac{\sigma\upsilon\nu^4 x}{\sigma\upsilon\nu^2 \alpha} = 1$ με $\alpha \neq \kappa\pi$ και $\alpha \neq \kappa\pi + \frac{\pi}{2}$

τότε να δείξετε ότι: $\frac{\eta\mu^{10} x}{\eta\mu^8 \alpha} + \frac{\sigma\upsilon\nu^{10} x}{\sigma\upsilon\nu^8 \alpha} = 1$. (Γκόνου)

Practice

18) Given $\cos\theta = 4/5$ and $0 \leq \theta \leq \pi/2$, find $\tan\theta$.

19) Verify the identity $\frac{1}{\tan x + \cot x} = \sin x \cdot \cos x$

20) Prove the inequality $|a \cdot \sin x + b \cdot \cos x| \leq \sqrt{a^2 + b^2}$.

3. Αναγωγή στο 1ο Τεταρτημόριο

Ασκήσεις

1) Να αποδείξετε ότι η παράσταση $A(x) = \frac{\eta\mu^2\left(\frac{7\pi}{2} + x\right) + \sigma\upsilon\nu(2\pi - x) \cdot \sigma\upsilon\nu(3\pi + x)}{\epsilon\varphi\left(\frac{3\pi}{2} - x\right) \cdot \sigma\varphi\left(\frac{\pi}{2} - x\right)}$

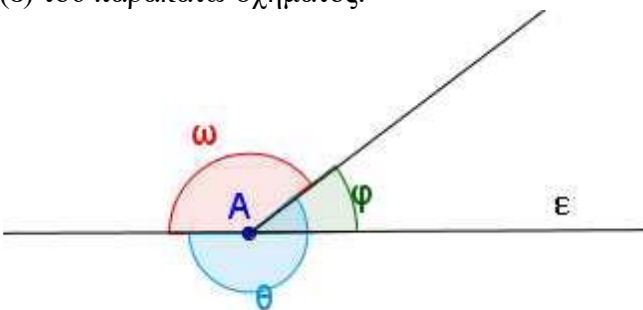
με $x \neq \frac{\kappa\pi}{2}, \kappa \in \mathbb{Z}$, είναι σταθερή.

2) Να υπολογιστεί η παράσταση: $A = \eta\mu^2(\pi - x) + \sigma\upsilon\nu(2\pi - x)\sigma\upsilon\nu(\pi - x) + 2\eta\mu^2\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$.

3) Να υπολογιστεί η παράσταση: $A = \frac{\eta\mu\left(x - \frac{\pi}{2}\right) \cdot \eta\mu(17\pi + x) \cdot \epsilon\varphi\left(\frac{27\pi}{2} - x\right)}{\sigma\varphi(x + \pi) \cdot \sigma\upsilon\nu(x - \pi) \cdot \sigma\upsilon\nu\left(\frac{3\pi}{2} - x\right)}$

4) Να δείξετε ότι $\eta\mu^2\left(\frac{\pi}{2} - x\right) + \sigma\upsilon\nu^4 x + 2 \geq \eta\mu^2 x$.

5) Δίνεται $\eta\mu\varphi = \frac{3}{5}$, όπου φ η οξεία γωνία που σχηματίζεται με κορυφή το σημείο A της ευθείας (ε) του παρακάτω σχήματος.



α) Να βρείτε το συνημίτονο της γωνίας φ .

β) Να βρείτε το ημίτονο και το συνημίτονο των γωνιών θ και ω του σχήματος.

(ΤΘ)

6) Να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης: $A = \frac{\sigma\upsilon\nu\left(\frac{5\pi}{2} + x\right) \cdot \sigma\upsilon\nu(x - 2\pi) \cdot \epsilon\varphi(11\pi + x)}{\eta\mu(7\pi - x) \cdot \eta\mu\left(x - \frac{\pi}{2}\right) \cdot \sigma\varphi\left(\frac{3\pi}{2} - x\right)}$

7) Σε τρίγωνο $AB\Gamma$ να δείξετε ότι $\eta\mu \frac{A+B-\Gamma}{2} - \sigma\upsilon\upsilon\Gamma = 0$.

**

8) Να υπολογιστεί η παράσταση: $A = \eta\mu^2 \left(\frac{\pi}{10} - \omega \right) + \varepsilon\varphi \left(\frac{\pi}{5} - \omega \right) \cdot \varepsilon\varphi \left(\frac{3\pi}{10} + \omega \right) + \eta\mu^2 \left(\omega + \frac{2\pi}{5} \right)$

9) Να υπολογιστεί το άθροισμα: $\eta\mu^2 1^\circ + \eta\mu^2 2^\circ + \eta\mu^2 3^\circ + \dots + \eta\mu^2 89^\circ + \eta\mu^2 90^\circ$.

4. Οι Τριγωνομετρικές Συναρτήσεις

Μικρές Παρατηρήσεις

Οι συναρτήσεις $f(x) = \rho \cdot \eta\mu(\omega x)$ και $f(x) = \rho \cdot \sigma\upsilon\nu(\omega x)$ έχουν:

$\max=|\rho|$, $\min=-|\rho|$ και περίοδο $T = \frac{2\pi}{\omega}$. Για την σχεδίαση της γραφικής παράστασης βολεύει να κάνουμε τη διαίρεση $T:4$ ώστε να πάρουμε τα βασικά σημεία διέλευσης.

Ασκήσεις

1) Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \eta\mu(\pi - 3x) + \sigma\upsilon\nu\left(\frac{\pi}{2} - 3x\right)$, $x \in \mathbb{R}$

α) Να δείξετε ότι $f(x) = 2\eta\mu(3x)$

β) Να σχεδιάσετε τη γραφική παράσταση της συνάρτησης f . (ΤΘ)

2) Να σχεδιάσετε τη γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x) = |\eta\mu x|$.

3) Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{1}{2}\sigma\upsilon\nu 2x$, $x \in \mathbb{R}$

α) Ποια είναι η μέγιστη και ποια η ελάχιστη τιμή της συνάρτησης; Ποια είναι η περίοδος της f ;

β) Να σχεδιάσετε τη γραφική παράσταση της f σε διάστημα πλάτους μιας περιόδου.

γ) Να εξετάσετε αν η συνάρτηση μπορεί να πάρει την τιμή 1. Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας. (ΤΘ)

4) Να εξετάσετε ποιες από τις συναρτήσεις είναι άρτιες ή περιττές:

i) $f(x) = x^2 - \sigma\upsilon\nu x$ ii) $f(x) = x - \eta\mu x$ iii) $f(x) = \frac{\eta\mu x}{2 + \sigma\upsilon\nu x}$

5) Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = -3\sigma\upsilon\nu 2x$, $x \in \mathbb{R}$

α) Να βρείτε την περίοδο, τη μέγιστη και την ελάχιστη τιμή της f .

β) Να συμπληρώσετε τον παρακάτω πίνακα και να παραστήσετε γραφικά την f σε διάστημα μιας περιόδου.

x	0	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{3\pi}{4}$	π
$2x$					
$\sigma\upsilon\nu 2x$					
$f(x) = -3\sigma\upsilon\nu 2x$					

(ΤΘ)

6) Να συγκρίνετε τους τριγωνομετρικούς αριθμούς: **i)** $\eta\mu\frac{\pi}{7}$, $\eta\mu\frac{\pi}{8}$ **ii)** $\sigma\upsilon\nu\frac{\pi}{7}$, $\sigma\upsilon\nu\frac{\pi}{8}$

iii) $\eta\mu\frac{5\pi}{8}$, $\eta\mu\frac{6\pi}{8}$ **iv)** $\sigma\upsilon\nu\frac{5\pi}{8}$, $\sigma\upsilon\nu\frac{6\pi}{8}$

7) Να διατάξετε από το μικρότερο στο μεγαλύτερο τους παρακάτω αριθμούς:

$$\sigma\upsilon\nu\frac{\pi}{6}, \sigma\upsilon\nu\frac{\pi}{4}, \sigma\upsilon\nu\frac{17\pi}{10}$$

β) Αν $\pi < x_1 < x_2 < \frac{3\pi}{2}$ να συγκρίνετε τους αριθμούς $\eta\mu\left(\frac{\pi}{2} - x_1\right)$ και $\eta\mu\left(\frac{\pi}{2} - x_2\right)$ (ΤΘ)

8) Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \eta\mu(\pi + 3x) - 4\eta\mu(\pi - 3x)$. Να βρείτε την μέγιστη και ελάχιστη τιμή της, καθώς και την περιόδό της.

**

9) Αν είναι $\frac{3\pi}{2} < \alpha < \beta < 2\pi$ να συγκρίνετε τους τριγωνομετρικούς αριθμούς:

$$\eta\mu\left(\frac{\pi - 2\alpha}{2}\right), \eta\mu\left(\frac{\pi - 2\beta}{2}\right)$$

10) Η Μαρία πήγε τα Χριστούγεννα διακοπές σε ένα χιονοδρομικό κέντρο. Η θερμοκρασία κατά τη διάρκεια του 24ωρου δίνεται από τον τύπο $\Theta(t) = -8\left(\eta\mu\frac{\pi t}{12} + 1\right)$, με $0 \leq t \leq 24$.

α) Να γίνει η γραφική παράσταση.

β) Ποιες χρονικές στιγμές η θερμοκρασία είναι μέγιστη, ποιες ελάχιστη;

11) Έστω η συνάρτηση $f(x) = \begin{cases} x^2, & x \leq 0 \\ \eta\mu 2x, & x > 0 \end{cases}$

i) Να χαράξετε τη γραφική της παράσταση.

ii) Να εξετάσετε την f ως προς τα ακρότατα.

12) Στο διπλανό σχήμα δίνεται η γραφική παράσταση

της συνάρτησης $f(x) = 2\eta\mu\left(\frac{\pi}{4} \cdot x\right)$.

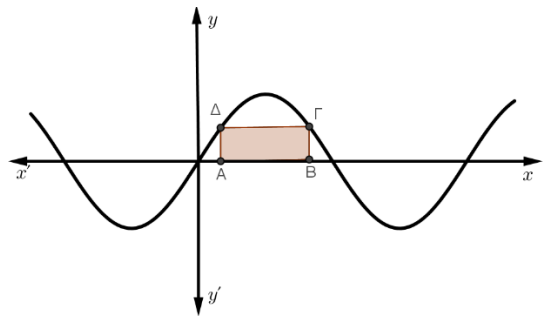
α) Να βρείτε την περίοδο της συνάρτησης f .

β) Το τετράπλευρο ΑΒΓΔ είναι ορθογώνιο με $A\left(\frac{2}{3}, 0\right)$.

Να βρείτε:

i. τις συντεταγμένες του σημείου Δ.

ii. τις συντεταγμένες των σημείων Β και Γ. (ΤΘ)



5. Βασικές Τριγωνομετρικές Εξισώσεις

Ασκήσεις

1) Να λυθούν οι εξισώσεις: **i)** $\eta\mu 2x = \eta\mu\left(x - \frac{\pi}{4}\right)$ **ii)** $\epsilon\varphi\left(3x - \frac{\pi}{3}\right) = \epsilon\varphi\left(x + \frac{\pi}{9}\right)$

2) Να λυθούν οι εξισώσεις: **i)** $\eta\mu 3x = \frac{1}{2}$ **ii)** $\sigma\upsilon\nu 2x = -\frac{\sqrt{3}}{2}$

3) Να λυθούν οι εξισώσεις: **i)** $\eta\mu\left(3x - \frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{2}$ **ii)** $\sigma\upsilon\nu\left(\frac{\pi}{4} - x\right) = -\frac{\sqrt{3}}{2}$

4) Να λυθούν οι εξισώσεις: **i)** $\epsilon\varphi\left(3x - \frac{\pi}{3}\right) = 1$ **ii)** $\epsilon\varphi 2x = -1$

5) Να λυθούν οι εξισώσεις: **i)** $\eta\mu\left(3x - \frac{\pi}{4}\right) = \sigma\upsilon\nu\left(\frac{\pi}{4} - x\right)$

ii) $\epsilon\varphi\left(2x - \frac{\pi}{6}\right) + \sigma\varphi\left(x - \frac{\pi}{3}\right) = 0$

6) Να λυθεί η εξίσωση: $\epsilon\varphi x \cdot \eta\mu x + 1 = \sigma\upsilon\nu x$

7) Να λυθεί η εξίσωση: $2\eta\mu x - 2\sigma\upsilon\nu x + \epsilon\varphi x = 1$.

8) Να λυθεί η εξίσωση: $\epsilon\varphi 3x = \epsilon\varphi x$ στο $(-\pi, \pi)$.

9) Να λυθεί η εξίσωση: $\sigma\upsilon\nu\left(x + \frac{\pi}{3}\right) = \eta\mu 2x$.

10) **α)** Να αποδείξετε ότι: $\eta\mu\left(\frac{\pi}{2} + x\right) + \sigma\upsilon\nu(\pi + x) = 0$

β) Να βρείτε τις τιμές του $x \in [0, 2\pi)$ για τις οποίες ισχύει $\sigma\upsilon\nu x = -\eta\mu\left(\frac{\pi}{2} + x\right)$ (ΤΘ)

11) Δίνεται η παράσταση: $A = \frac{\eta\mu^2 x}{1 - \sigma\upsilon\nu x}$, $x \neq 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$

α) Να αποδείξετε ότι $A = 1 + \sigma\upsilon\nu x$

β) Να λύσετε την εξίσωση $\frac{\eta\mu^2 x}{1-\sigma\upsilon\nu x} = \frac{1}{2}$ στο διάστημα $(0, 2\pi)$	(ΤΘ)
12) α) Να αποδείξετε ότι : $\frac{\eta\mu x}{1-\sigma\upsilon\nu x} + \frac{\eta\mu x}{1+\sigma\upsilon\nu x} = \frac{2}{\eta\mu x}$ όπου $x \neq \kappa\pi, \kappa \in \mathbb{Z}$.	
β) Να λύσετε την εξίσωση: $\frac{\eta\mu x}{1-\sigma\upsilon\nu x} + \frac{\eta\mu x}{1+\sigma\upsilon\nu x} = \frac{4}{\sqrt{3}}$	(ΤΘ)
13) Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = 2\eta\mu x + 1, x \in \mathbb{R}$ α) Να βρείτε τη μέγιστη και την ελάχιστη τιμή της συνάρτησης f . β) Για ποια τιμή του $x \in [0, 2\pi]$ η συνάρτηση παρουσιάζει μέγιστη τιμή;	(ΤΘ)

**

14) Έστω $f(x) = \frac{1}{\varepsilon\phi x - \alpha} + \frac{1}{\varepsilon\phi x + \alpha}$ με $f\left(\frac{\pi}{4}\right) = 2$. Να βρείτε το $\alpha \in \mathbb{R}$ και το Πεδίο Ορισμού της f .	
15) Να λυθεί η εξίσωση: $\eta\mu^{2002}\left(x - \frac{\pi}{2}\right) = \sigma\upsilon\nu^{2000} x$.	
16) Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \left(\frac{1}{\eta\mu x} - \sigma\phi x\right)\left(1 + \frac{1}{\sigma\upsilon\nu x}\right)$ με $x \neq \kappa\pi$ και $x \neq \kappa\pi + \frac{\pi}{2}, \kappa \in \mathbb{Z}$ α) Να δείξετε ότι: $f(x) = \varepsilon\phi x$ β) Να λυθεί η εξίσωση: $f(x) = \varepsilon\phi\left(\frac{\pi}{6} - x\right)$.	
17) Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \alpha + 1 \cdot \eta\mu(\beta\pi x)$ με $\alpha \in \mathbb{R}$ και $\beta > 0$, η οποία έχει μέγιστη τιμή 3 και περίοδο 4. α) Να δείξετε ότι $\alpha = 2$ ή $\alpha = -4$ και $\beta = \frac{1}{2}$. β) Για $\alpha = 2$ και $\beta = \frac{1}{2}$ i. να λυθεί η εξίσωση $f(x) = 3$. ii. να σχεδιάσετε τη γραφική παράσταση της συνάρτησης f στο διάστημα $[0, 8]$.	(ΤΘ)
18) Να λυθεί η εξίσωση: $\sigma\upsilon\nu(\eta\mu x) = 1$.	

19) Να λυθεί η εξίσωση:
$$\frac{\sigma\upsilon\nu(x - \frac{\pi}{2})}{\eta\mu(x - \frac{\pi}{4})} = -1 \quad \text{στο } [2\pi, 3\pi].$$

20) Να λυθεί η εξίσωση: $\sigma\phi x \cdot \epsilon\phi 7x = 1 \quad \text{στο } \left(\pi, \frac{3\pi}{2}\right).$

21) Δίνεται η παράσταση:
$$A = \frac{\eta\mu(-\omega) \cdot \sigma\upsilon\nu(\pi + \omega) \cdot \epsilon\phi\left(\frac{3\pi}{2} - \omega\right)}{\sigma\upsilon\nu\left(\frac{5\pi}{2} + \omega\right) \cdot \sigma\phi(5\pi + \omega) \cdot \eta\mu\left(\frac{9\pi}{2} - \omega\right)}.$$

i) Να δείξετε ότι $A = -1$.

ii) Να λύσετε την εξίσωση $2\sigma\upsilon\nu^2 x - \eta\mu x + A = 0$.

22) Να λυθεί η εξίσωση:
$$\frac{\sigma\upsilon\nu x}{1 - \eta\mu x} + \frac{\sigma\upsilon\nu x}{1 + \eta\mu x} = -4.$$

23) Να λυθεί η εξίσωση: $2^{\sigma\upsilon\nu^2 x} + 2^{\eta\mu^2 x} = 3.$

Εργασία

Σε κάθε τρίγωνο ABΓ να δείξετε ότι: $\frac{\sigma\phi B + \sigma\phi \Gamma}{\alpha} + \frac{\sigma\phi \Gamma + \sigma\phi A}{\beta} + \frac{\sigma\phi A + \sigma\phi B}{\gamma} = \frac{1}{\rho}$, όπου ρ η ακτίνα του εγγεγραμμένου κύκλου.

(υποδ: να δείξετε ότι $\sigma\phi A = \frac{\beta^2 + \gamma^2 - \alpha^2}{4E}$ κτλ) (Δ)

Ερωτήσεις πολλαπλής επιλογής

1) Ισχύει $(\eta\mu\omega + \sigma\upsilon\nu\omega)^2 + (\eta\mu\omega - \sigma\upsilon\nu\omega)^2 = \dots$

- A) 0 B) 1 Γ) 2 Δ) 3 Ε) 4

2) Είναι $\epsilon\varphi 210^\circ = \dots$

- A) -1 B) $-\frac{\sqrt{3}}{3}$ Γ) $\frac{\sqrt{3}}{3}$ Δ) $\sqrt{3}$ Ε) $-\sqrt{3}$

3) Αν ισχύει $\sigma\upsilon\nu\omega = \frac{\sqrt{5}}{3}$ με $\frac{3\pi}{2} < \omega < 2\pi$ τότε $\eta\mu\omega = \dots$

- A) $-\frac{1}{2}$ B) $-\frac{\sqrt{2}}{3}$ Γ) $\frac{\sqrt{2}}{3}$ Δ) $\frac{2}{3}$ Ε) $-\frac{2}{3}$

4) Η συνάρτηση $f(x) = \sigma\upsilon\nu x$ έχει πεδίο ορισμού

- A. το διάστημα $(-1, 1)$ B. το διάστημα $[-1, 1]$
 Γ. το σύνολο $\{x \in \mathbb{R} \mid x \neq 0\}$ Δ. το σύνολο $\{x \in \mathbb{R} \mid x \neq \pm 1\}$
 Ε. το σύνολο \mathbb{R}

5) Το πεδίο ορισμού της συνάρτησης $f(x) = \epsilon\varphi x$ είναι

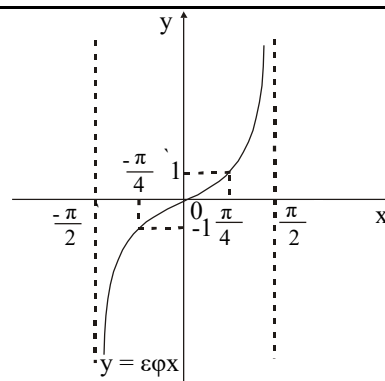
- A. το σύνολο \mathbb{R} B. το διάστημα $[-1, 1]$ Γ. το σύνολο $\{x \in \mathbb{R} \mid \eta\mu x \neq 0\}$
 Δ. το σύνολο $\{x \in \mathbb{R} \mid \sigma\upsilon\nu x \neq 0\}$ Ε. το σύνολο $\{x \in \mathbb{R} \mid x \neq 0\}$

6) Για τις τριγωνομετρικές συναρτήσεις $f(x) = \eta\mu x$, $g(x) = \sigma\upsilon\nu x$ και $h(x) = \epsilon\varphi x$, ισχύει

- A. η f είναι άρτια B. η g είναι περιττή Γ. η h είναι άρτια
 Δ. οι f και g είναι άρτιες Ε. οι f και h είναι περιττές και η g άρτια

7) Η συνάρτηση του σχήματος είναι

- A. γνησίως φθίνουσα στο $[0, \frac{\pi}{2})$
 B. γνησίως αύξουσα στο $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$
 Γ. γνησίως φθίνουσα στο $(-\frac{\pi}{2}, 0]$
 Δ. γνησίως φθίνουσα στο $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$
 Ε. σταθερή στο $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$



8) Στο διπλανό σχήμα, για $x \in [0, 2\pi]$ φαίνεται η γραφική παράσταση της συνάρτησης

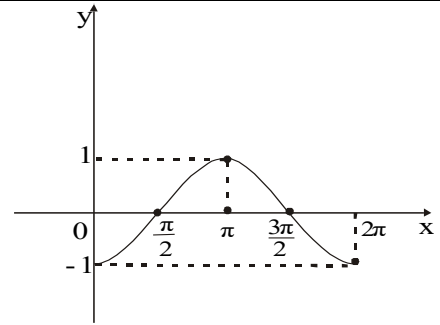
A. $f(x) = \sin 2x$

B. $f(x) = \sin(x + 2\pi)$

Γ. $f(x) = \sin(-x)$

Δ. $f(x) = -\sin x$

E. $f(x) = \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$



9) Η συνάρτηση $f(x) = \eta\mu x$ είναι γνησίως αύξουσα στο:

A) $\left[\frac{\pi}{2}, \pi\right]$

B) $\left[\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right]$

Γ) $\left[\pi, \frac{3\pi}{2}\right]$

Δ) $\left[\frac{3\pi}{2}, 2\pi\right]$

E) σε κανένα από τα προηγούμενα

10) Η μέγιστη τιμή της συνάρτησης $f(x) = 3 + 2\eta\mu 4x$ είναι:

A) 1

B) 2

Γ) 3

Δ) 4

E) 5

11) Η συνάρτηση $f(x) = 2\eta\mu \frac{3\pi}{2} x$ έχει περίοδο:

A) 1

B) $\frac{4\pi}{3}$

Γ) $\frac{\pi}{3}$

Δ) $\frac{4}{3}$

E) $\frac{3}{4}$

12) Η λύση της εξίσωσης $\sin 2x = 2$ έχει λύσεις:

A) $x = 2k\pi \pm \pi, k \in \mathbb{Z}$

B) $x = 2k\pi \pm \frac{\pi}{3}, k \in \mathbb{Z}$

Γ) είναι αδύνατη

Δ) $x = 2k\pi \pm \frac{\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}$

E) $x = 0$

13) Η λύση της εξίσωσης $\sin x = \eta\mu \frac{\pi}{5}$ έχει λύσεις:

A) $x = 2k\pi \pm \pi, k \in \mathbb{Z}$

B) $x = 2k\pi \pm \frac{3\pi}{10}, k \in \mathbb{Z}$

Γ) είναι αδύνατη

Δ) $x = 2k\pi \pm \frac{\pi}{5}, k \in \mathbb{Z}$

E) $x = 2k\pi \pm \frac{3\pi}{5}, k \in \mathbb{Z}$

14) Ποια από τις παρακάτω εξισώσεις είναι αδύνατη;

A) $\eta\mu x = \sqrt{3}$

B) $\epsilon\phi x = -2020$

Γ) $\sin x = 1$

Δ) $\sigma\phi x = 0$

E) $\epsilon\phi x = \sqrt{7}$

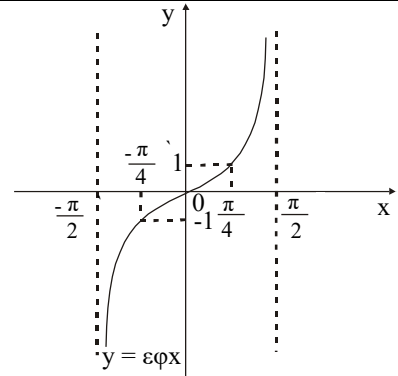
15) Η λύση της εξίσωσης $\epsilon\phi x = -1$ στο διάστημα $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ είναι

η

A. $x = -1$ B. $x = \frac{\pi}{4}$

Γ. $x = -\frac{\pi}{4}$ Δ. $x = 0$

E. $x = 1$



16) Η λύση της εξίσωσης $\sigma\upsilon\nu(x - \pi) = -1$ στο διάστημα $(0, 2\pi]$ είναι η

A. $x = \frac{3\pi}{2}$

B. $x = \pi$

Γ. $x = 2\pi$

Δ. $x = \frac{\pi}{2}$

E. $x = -\pi$

17) Στο διπλανό σχήμα φαίνονται οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων $f(x) = \eta\mu x$ και $g(x) = \sigma\upsilon\nu x$ στο διάστημα $[0, 2\pi]$. Οι λύσεις της εξίσωσης $f(x) = g(x)$, $x \in [0, 2\pi]$ είναι:

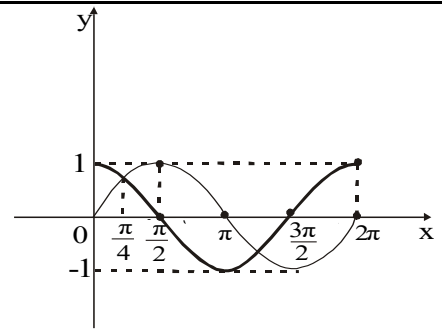
A. $x = \frac{\pi}{2}$ ή $x = \frac{3\pi}{2}$

B. $x = \pi$ ή $x = 2\pi$

Γ. $x = \frac{\pi}{4}$ ή $x = -\frac{\pi}{4}$

Δ. $x = \frac{\pi}{4}$ ή $x = \frac{3\pi}{2}$

E. $x = \frac{\pi}{4}$ ή $x = \frac{5\pi}{4}$



18) Οι λύσεις της εξίσωσης $\eta\mu x = -\frac{1}{2}$ είναι

A. $x = 2\kappa\pi + \frac{\pi}{6}$

B. $x = 2\kappa\pi - \frac{\pi}{6}$

Γ. $x = 2\kappa\pi + \frac{\pi}{6}$ ή $x = 2\kappa\pi + \frac{5\pi}{6}$ $\kappa \in \mathbb{Z}$

Δ. $x = 2\kappa\pi - \frac{\pi}{6}$ ή $x = 2\kappa\pi + \frac{7\pi}{6}$

E. καμία από τις προηγούμενες

19) Οι λύσεις της εξίσωσης $\sigma\upsilon\nu x = -\frac{\sqrt{2}}{2}$ είναι

A. $x = 2\kappa\pi \pm \frac{\pi}{4}$

B. $x = \kappa\pi \pm \frac{\pi}{4}$

Γ. $x = 2\kappa\pi \pm \frac{3\pi}{4}$

Δ. $x = 2\kappa\pi - \frac{\pi}{4}$

E. $x = (\kappa + 1)\pi \pm \frac{3\pi}{4}$ $\kappa \in \mathbb{Z}$

Επανάληψη

1) Να βρείτε τα $x, y \in \mathbb{R}$ για τα οποία ισχύει:

$$\left\{ \begin{array}{l} \varepsilon\varphi(x+y) = \sqrt{3} \\ \varepsilon\varphi(x-y) = 1 \\ -\frac{\pi}{4} < x, y < \frac{\pi}{4} \end{array} \right.$$

2) Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \alpha \cdot \eta\mu \frac{\pi \cdot x}{\beta} + \gamma$, με $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$ και $\alpha > 0, \beta > 0$. Αν η f έχει μέγιστο το

4, περίοδο 4π και η C_f διέρχεται από το σημείο $A(0,1)$:

i) Να δείξετε ότι $\alpha=3, \beta=2\pi, \gamma=1$

ii) Να γίνει γραφική παράσταση σε μήκος μιας περιόδου

iii) Να συγκρίνετε τους αριθμούς $f(6)$ και $f(7)$.

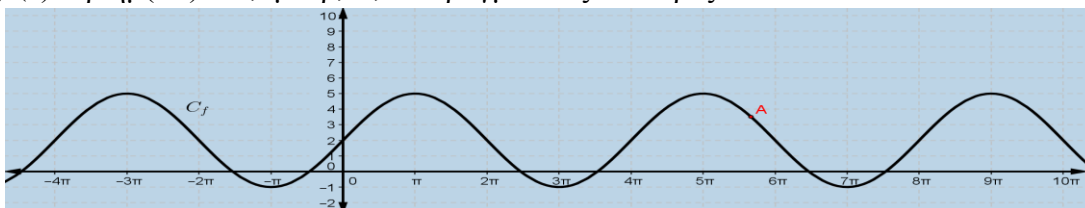
3) Έστω η συνάρτηση $f(x) = 4\eta\mu 2x$

i) Να βρεθεί η μέγιστη και η ελάχιστη τιμή της συνάρτησης καθώς και η περίοδος της.

ii) Να λυθεί η εξίσωση $f(x) = 2$ για $x \in [-\pi, \pi]$.

iii) Να λυθεί η εξίσωση $(\sqrt{2} \cdot f(2x) - 4) \cdot f\left(\frac{x}{2}\right) = 0$.

4) Στο παρακάτω σχήμα δίνεται η γραφική παράσταση μιας συνάρτησης f η οποία είναι της μορφής $f(x) = \rho \cdot \eta\mu(\omega x) + k$, με ρ, ω, k πραγματικές σταθερές.



α) Με βάση τη γραφική παράσταση, να βρείτε:

i. τη μέγιστη και την ελάχιστη τιμή της συνάρτησης f

ii. την περίοδο T της συνάρτησης f

β) Να προσδιορίσετε τις τιμές των σταθερών ρ, ω και k . Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

γ) Θεωρώντας γνωστό ότι $\rho = 3, \omega = \frac{1}{2}$ και $k = 2$, να προσδιορίσετε **αλγεβρικά** την τετμημένη x_0

του σημείου $A\left(x_0, \frac{7}{2}\right)$ της γραφικής παράστασης, που δίνεται στο σχήμα. (ΤΘ)

5) Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = 5\sigma\upsilon\nu(\alpha\pi x)$, με $\alpha > 0$ και περίοδο $T=4$.

i) Να βρείτε την ελάχιστη τιμή της f .

ii) Να δείξετε ότι $\alpha = \frac{1}{2}$. \rightarrow

iii) Να λύσετε την εξίσωση: $\eta\mu^2\left(\frac{\pi x}{2}\right) + f(x) = 5$.

iv) Ποιες από τις λύσεις της παραπάνω εξίσωσης ανήκουν στο διάστημα $(\pi, 2\pi)$;

6) Η Αλίκη και η Αθηνά διασκεδάζουν στη ρόδα του λούνα παρκ. Η απόσταση, σε μέτρα, του καθίσματός τους από το έδαφος τη χρονική στιγμή t sec δίνεται από τη συνάρτηση $h(t) = 8 + 6 \cdot \eta\mu\left(\frac{\pi \cdot t}{30}\right)$ και $0 \leq t \leq 180$

α) Να βρείτε το ελάχιστο και το μέγιστο ύψος στο οποίο φτάνει το κάθισμα, καθώς και τις στιγμές κατά τις οποίες το κάθισμα βρίσκεται στο ελάχιστο και στο μέγιστο ύψος.

β) Να υπολογίσετε την ακτίνα της ρόδας.

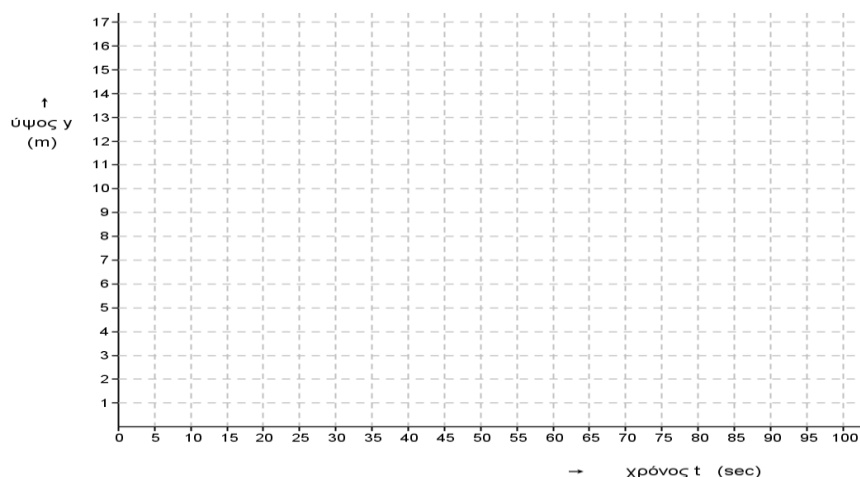
γ) Να βρείτε την περίοδο της κίνησης, δηλαδή το χρόνο στον οποίο η ρόδα ολοκληρώνει μια περιστροφή. Πόσους γύρους έκαναν οι δύο φίλες στο διάστημα από 0 έως 180 sec;

δ) Να μεταφέρετε στην κόλα σας τον πίνακα τιμών και το σύστημα συντεταγμένων που δίνονται παρακάτω και:

i. να συμπληρώσετε τον πίνακα τιμών της συνάρτησης του ύψους $h(t)$.

t	0	15	30	45	60	75	90
h(t)							

ii. να σχεδιάσετε στο σύστημα συντεταγμένων το τμήμα της γραφικής παράστασης της συνάρτησης $h(t)$ με $0 \leq t \leq 90$.



(ΤΘ)