

ΜΕΛΕΤΗ ΒΑΣΙΚΩΝ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΩΝ



Σπύρος
Ζερβουδάκης
Μαθηματικός
(Msc)

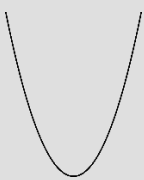
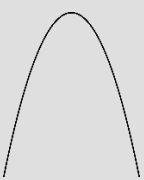
Τα Μαθηματικά είναι ένα παιχνίδι με
απλούς κανόνες, που παίζεται
γράφοντας στο χαρτί σημάδια δίχως
νόημα

David Hilbert 1862-1943

<https://blogs.sch.gr/zervoss/>

1. Μελέτη της συνάρτησης $f(x) = ax^2$

Μικρές Παρατηρήσεις

<p>Αν είναι $a > 0$ τότε</p> 	<p>Αν είναι $a < 0$ τότε</p> 
Έχει ελάχιστο το 0 (για $x=0$)	Έχει μέγιστο το 0 (για $x=0$)

Ασκήσεις


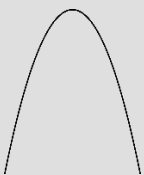
- 1) Η παραβολή $f(x) = ax^2$ διέρχεται από το σημείο $K(-2, -12)$. Να βρείτε το a .
- 2) Να βρείτε τα κοινά σημεία (αν υπάρχουν) της γραφικής παράστασης της συνάρτησης $f(x) = 2x^2$ και της ευθείας $y = x + 1$.
- 3) Να βρείτε τα διαστήματα στα οποία η $f(x) = 2x^2$ βρίσκεται κάτω από την ευθεία $y = 8$.
- 4) α) Για ποιες τιμές του λ η συνάρτηση $f(x) = (5 - \lambda)x^2$ παρουσιάζει μέγιστο;
 β) Για ποιες τιμές του λ η συνάρτηση $g(x) = (\lambda^2 - 4)x^2$ παρουσιάζει ελάχιστο;
- 5) Να βρείτε το λ ώστε το σημείο $M(\lambda - 1, 1 - \lambda^2)$ να ανήκει στην $f(x) = -4x^2$.

**

- 6) Να μελετήσετε ως προς τη μονοτονία τη συνάρτηση $f(x) = (|\lambda| - 1)x^2$.
- 7) Για ποιες τιμές του $\lambda \in \mathbb{R}$ η γραφική παράσταση της παραβολής $f(x) = \frac{1}{2}x^2$ και η ευθεία $y = \lambda x - 1$ έχουν δύο κοινά σημεία;
- 8) Για ποιες τιμές του $\lambda \in \mathbb{R}$ η γραφική παράσταση της παραβολής $f(x) = -\frac{3}{2}x^2$ και η ευθεία $y = 2x + \lambda$ δεν έχουν κοινά σημεία;
- 9) Να λύσετε αλγεβρικά και γραφικά (κατά προσέγγιση) το σύστημα:
$$\begin{cases} x^2 + 2y = 0 \\ 2x - y = -2 \end{cases}$$

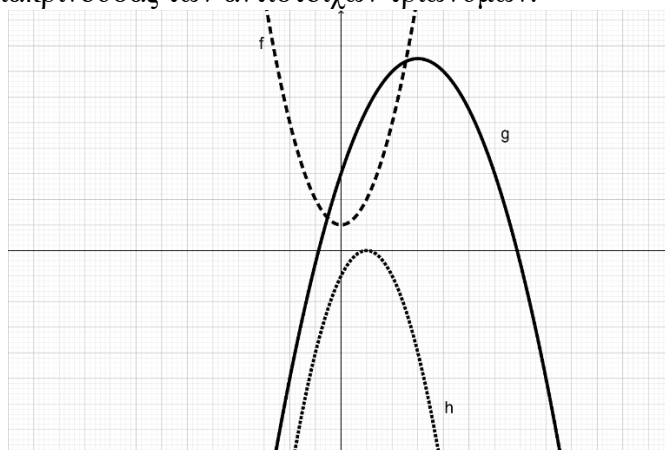
2. Μελέτη της συνάρτησης $f(x) = ax^2 + bx + \gamma$

Μικρές Παρατηρήσεις

Αν είναι $a > 0$ τότε 	Αν είναι $a < 0$ τότε 
Έχει ελάχιστο το $-\frac{\Delta}{4a}$ για $x = -\frac{\beta}{2a}$	Έχει μέγιστο το $-\frac{\Delta}{4a}$ για $x = -\frac{\beta}{2a}$

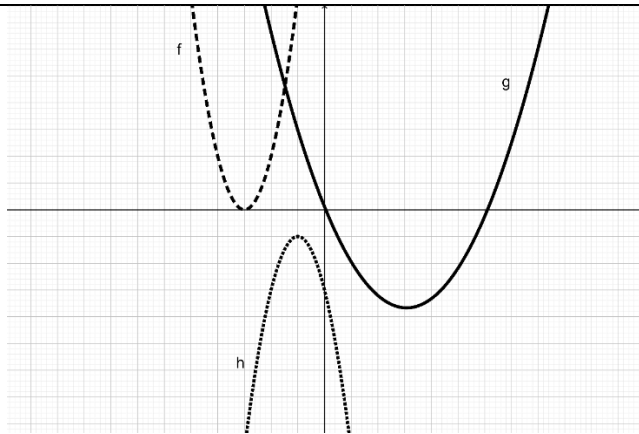
Ασκήσεις

1) Στο παρακάτω σχήμα δίνονται οι γραφικές παραστάσεις συναρτήσεων της μορφής: $y = ax^2 + bx + \gamma$. Να συμπληρώσετε τις στήλες του πίνακα που ακολουθεί με το πρόσημο των συντελεστών και της διακρίνουσας των αντίστοιχων τριωνύμων.



Τριώνυμο	f	g	h
α			
β			
γ			
Δ			

2) Στο παρακάτω σχήμα δίνονται οι γραφικές παραστάσεις συναρτήσεων της μορφής: $y = ax^2 + bx + \gamma$. Να συμπληρώσετε τις στήλες του πίνακα που ακολουθεί με το πρόσημο των συντελεστών και της διακρίνουσας των αντίστοιχων τριωνύμων.



Τριώνυμο	f	g	h
α			
β			
γ			
Δ			

3) Να βρείτε τη μέγιστη ή ελάχιστη τιμή των συναρτήσεων:

i) $f(x) = x^2 - 5x + 5$

ii) $f(x) = -2x^2 + x + 1$

iii) $f(x) = 2 - x^2$

4) Να γίνει η γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x) = |x^2 - 4|$.

5) Να βρεθεί η παραβολή που διέρχεται από τα σημεία A(1,-3), B(3,5) και Γ(0,-1).

**

6) Να βρείτε το λ ώστε η γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x) = (\lambda - 1)x^2 - \lambda^2x + 2$ να παρουσιάζει ελάχιστο στο $x_0=2$.

7) Να βρείτε το λ ώστε το ελάχιστο της συνάρτησης $f(x) = x^2 + 2x$ να είναι ίσο με το μέγιστο της συνάρτησης $g(x) = -x^2 + \lambda x - 1$.

8) Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x)=x^2 + 3x + 2$ και $g(x)=x + 1, x \in \mathbb{R}$.

α) Να δείξετε ότι οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων f, g έχουν ένα μόνο κοινό σημείο, το οποίο στη συνέχεια να προσδιορίσετε.

β) Δίνεται η συνάρτηση $h(x)=x + \alpha$. Να δείξετε ότι:

i) αν $\alpha > 1$, τότε οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων f, h έχουν δύο κοινά σημεία.

ii) αν $\alpha < 1$, τότε οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων f, h δεν έχουν κοινά σημεία.

(ΤΘ)

9) Έστω $f(x) = x^2 + \alpha x + \beta$, και $g(x) = \beta x + \alpha$ με $\alpha \neq \beta, \alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Αν οι C_f, C_g έχουν ένα μόνο κοινό σημείο να βρείτε τη συνθήκη μεταξύ των α, β καθώς και την τετμημένη του σημείου αυτού.

10) Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x)=4x+2$ και $g(x)=x^2-9$ με πεδίο ορισμού το \mathbb{R} .
α) Να βρείτε τα σημεία τομής της γραφικής παράστασης της συνάρτησης g με τον άξονα $x'x$.
β) Να εξετάσετε αν η γραφική παράσταση της f τέμνει τους άξονες σε κάποιο από τα σημεία $(3,0)$ και $(-3,0)$.
γ) Να αποδείξετε ότι οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων f, g δεν έχουν κοινό σημείο πάνω σε κάποιον από τους άξονες.
δ) Να βρείτε συνάρτηση h της οποίας η γραφική παράσταση είναι ευθεία, διέρχεται από το $A(0,3)$ και τέμνει τη γραφική παράσταση της g σε σημείο του ημιάξονα Ox . (ΤΘ)

11) Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = ax^2 + bx + \gamma$ με $a \neq 0$. Αν η γραφική της παράσταση τέμνει τον άξονα $x'x$ στο σημείο $A(1,0)$ και παρουσιάζει ελάχιστο στο $x_0 = -\frac{1}{2}$ τότε:
i) Να δείξετε ότι $\Delta=(a-\gamma)^2$.
ii) Αν x_1, x_2 οι ρίζες της f , να δείξετε ότι $x_1 + x_2 = -1$.
iii) Να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης $A = x_1x_2^{2022} + x_1^{2022}x_2 + 2x_1^{2021} + 2x_2^{2021} + x_1^2 + x_2^2$.

12) Να βρεθεί ο $\lambda \in \mathbb{R}$, ώστε η συνάρτηση $f(x) = \lambda x^2 - 3\lambda x - 13$ να έχει μέγιστο το λ .

13) Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x^2 + (\lambda - 2)x + 1 - \lambda$. Να προσδιορίσετε το λ , ώστε η γραφική παράσταση της f να εφάπτεται στον άξονα $x'x$.

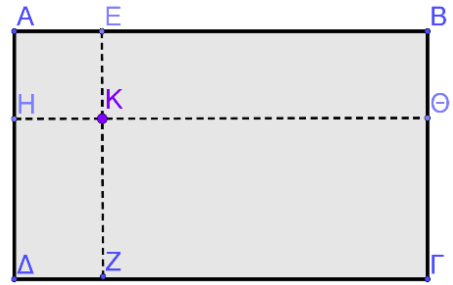
14) Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x^2 + (\lambda + 7)x + 1 - 3\lambda$. Να προσδιορίσετε το λ , ώστε η γραφική παράσταση της f να έχει άξονα συμμετρίας τον $y'y$.

15) Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x^2 - 2\lambda x + 4$.
i) Να βρείτε για ποιες τιμές του $\lambda \in \mathbb{R}$ η γραφική παράσταση της f τέμνει τον άξονα $x'x$ σε δύο διαφορετικά σημεία.
ii) Να βρείτε το $\lambda \in \mathbb{R}$ ώστε τα δύο αυτά σημεία να απέχουν ίση απόσταση από το $A(3,0)$.

16) Ένα ορθογώνιο παραλληλόγραμμο έχει περίμετρο $\Pi=40\text{cm}$. Αν x cm είναι το μήκος του παραλληλογράμμου, τότε:
α) να αποδείξετε ότι $0 < x < 20$.
β) να αποδείξετε ότι το εμβαδόν $E(x)$ του ορθογωνίου δίνεται από τη σχέση $E(x)=20-x^2$.
γ) να αποδείξετε ότι ισχύει $E(x) \leq 100$, για κάθε $x \in (0,20)$.
δ) να αποδείξετε ότι από όλα τα ορθογώνια με σταθερή περίμετρο 40cm , εκείνο που έχει το μεγαλύτερο εμβαδόν είναι το τετράγωνο πλευράς 10cm . (ΤΘ)

17) Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x^2 - \lambda x + 4$.
i) Να βρείτε για ποιες τιμές του $\lambda \in \mathbb{R}$ η γραφική παράσταση της f τέμνει τον άξονα $x'x$ σε δύο διαφορετικά σημεία.
ii) Να βρείτε για ποια $\lambda \in \mathbb{R}$ τα δύο αυτά σημεία έχουν απόσταση μικρότερη του 4 .

18) Έστω το ορθογώνιο παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ τέτοιο ώστε $AB=2$ και $AD=1$. Φέρνουμε τις κάθετες στις πλευρές του, ΗΘ και ΕΖ που τέμνονται στο Κ, τέτοιες ώστε $AE=AH=x$. Να βρείτε το x ώστε το άθροισμα των εμβαδών $(AEKH)+(KΘΓZ)$ να γίνει ελάχιστο.



Practice

Vertex = κορυφή

Parabola = Παραβολή

Tangent = Εφαπτομένη

Quadratic function = Πολυωνυμική συνάρτηση δευτέρου βαθμού

19) The graph of the function $f(x)=ax^2+bx+c$ has vertex $(1,4)$ and passes through the point $(-1,-8)$. Find a,b , and c .

20) Determine a quadratic function $f(x) = ax^2 + bx + c$ whose graph passes through the point $(2,19)$ and that has a horizontal tangent at $(-1,-8)$.

Ερωτήσεις πολλαπλής επιλογής

1) Ο τύπος της συνάρτησης που η γραφική της παράσταση φαίνεται στο διπλανό σχήμα είναι:

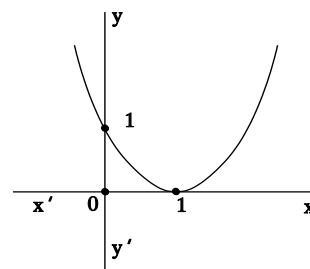
A. $f(x) = x^2 - 2x - 1$

B. $\varphi(x) = x^2 - 6x + 9$

Γ. $h(x) = x^2 - 2x + 1$

Δ. $g(x) = x^2 - 6x - 9$

E. $k(x) = x^2 + 4x + 4$



2) Η γραφική παράσταση της συνάρτησης στο σχήμα αντιστοιχεί στον τύπο (για κάθε $\kappa \in \mathbb{R}$):

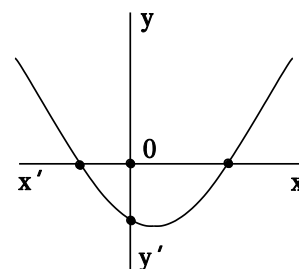
A. $f(x) = x^2 - \kappa x + 5$

B. $g(x) = x^2 - \kappa x - 5$

Γ. $h(x) = x^2 - x + \kappa^2$

Δ. $\varphi(x) = x^2 - 5x + \kappa^2$

E. $t(x) = x^2 - x + 5\kappa^2$



3) Η γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x) = \kappa x^2 - 3x - \kappa$, έχει με τον άξονα $x'x$ (για κάθε τιμή του $\kappa \neq 0$):

A. ένα κοινό σημείο

B. δύο κοινά σημεία στο θετικό ημιάξονα Ox

Γ. δύο κοινά σημεία στον αρνητικό ημιάξονα Ox'

Δ. κανένα κοινό σημείο

E. δύο κοινά σημεία εκατέρωθεν του O

4) Η παραβολή του διπλανού σχήματος αντιπροσωπεύει τη συνάρτηση $f(x) = x^2 + \kappa x + \lambda$. Ποια από τις παρακάτω προτάσεις είναι αληθής:

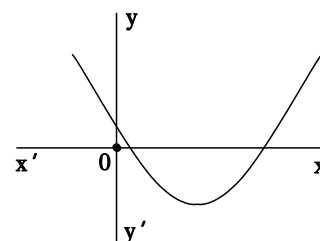
A. $\Delta < 0$

B. $\kappa = 0$

Γ. το σύνολο των τιμών της f είναι το $[0, +\infty)$

Δ. το γινόμενο των ριζών της εξίσωσης $x^2 + \kappa x + \lambda = 0$ είναι μηδέν

E. το άθροισμα των ριζών της εξίσωσης $x^2 + \kappa x + \lambda = 0$ είναι αρνητικός αριθμός



5) Η παραβολή του διπλανού σχήματος αντιπροσωπεύει τη συνάρτηση $f(x) = x^2 + \kappa x + \lambda$. Ποια από τις παρακάτω προτάσεις είναι αληθής;

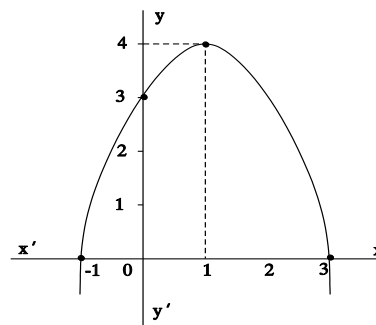
A. $\Delta = 0$

B. $\kappa < 0$

Γ. $\lambda > 0$

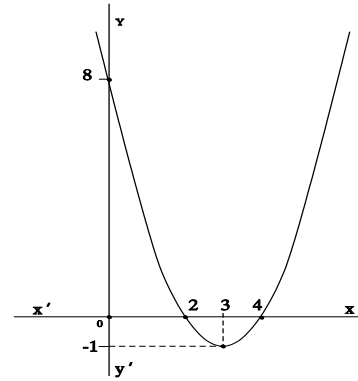
Δ. το σύνολο των τιμών της f είναι το $[1, +\infty)$

E. η γραφική παράσταση της f έχει άξονα συμμετρίας τον $y'y$



6) Η παραβολή του διπλανού σχήματος αντιπροσωπεύει τη συνάρτηση $f(x) = ax^2 + bx + \gamma$. Ποια από τις παρακάτω προτάσεις είναι αληθής;

- A. $a < 0$ B. $a\beta > 0$ Γ. $a\gamma < 0$
- Δ. η συνάρτηση έχει σύνολο τιμών το $[-1, +\infty)$
- Ε. η συνάρτηση έχει σύνολο τιμών το $(-1, +\infty)$



7) Για το τριώνυμο $f(x) = ax^2 + bx + \gamma$, $a \neq 0$ ισχύει: $a \cdot \gamma < 0$.

Ποια από τις παρακάτω γραφικές παραστάσεις αντιπροσωπεύει τη συνάρτηση f ;

<p>A.</p>	<p>B.</p>	<p>Γ.</p>
<p>Δ.</p>	<p>Ε.</p>	

8) Η γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x) = ax^2 + bx + \gamma$, $a \neq 0$ έχει άξονα συμμετρίας τον $y'y$. Αν για την εξίσωση $ax^2 + bx + \gamma = 0$ ισχύει $\Delta > 0$, ποια από τις επόμενες προτάσεις για τις ρίζες ρ_1, ρ_2 αυτής είναι αληθής;

- A. $\rho_1 + \rho_2 > 0$ B. $\rho_1 + \rho_2 = 0$ Γ. $\rho_1 + \rho_2 < 0$
- Δ. $\rho_1 \cdot \rho_2 > 0$ Ε. $\rho_1 \cdot \rho_2 = 0$

9) Η γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x) = ax^2 + bx + \gamma$, $a \neq 0$ έχει άξονα συμμετρίας την ευθεία $x=1$ και τέμνει τον άξονα $x'x$ στο σημείο $A(4,0)$. Τότε η άλλη ρίζα της f είναι ο αριθμός:

- A. 3 B. 2 Γ. 0 Δ. -1 Ε. -2