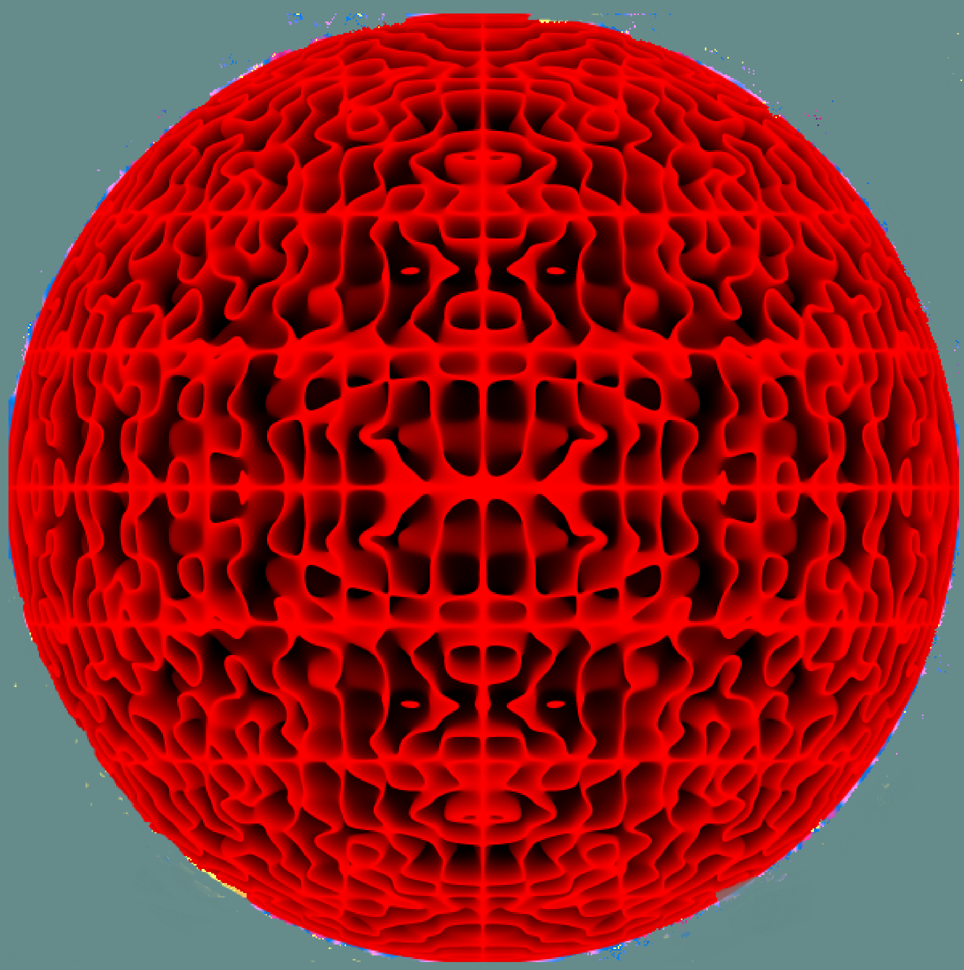
Ασκήσεις Άλγεβρας Β Λυκείου



Λυγάτσικας Ζήνων
Σύμβουλος Εκπαίδευσης
πρώην καθηγητής του Πρότυπου ΓΕΛ της Βαρβακείου Σχολής

1 Μαρτίου 2026

1 Μαρτίου 2026 Λυγάτσικας Ζ.

Ζήνων Λυγάτσικας
Σύμβουλος Εκπαίδευσης
Πρώην Καθηγητής του Προτύπου Γ.Ε.Λ. της Βαρβακείου Σχολής

Ασκήσεις Άλγεβρας Β Λυκείου

Στοιχειοθεσία LaTeX

© Λυγάτσικας Ζήνων

Το έργο αυτό διατίθεται με άδεια Creative Commons Αναφορά Δημιουργού-Μη Εμπορική Χρήση-Όχι Παράγωγα Έργα 4.0 Διεθνές.
Για να δείτε ένα αντίγραφο αυτής της άδειας, επισκεφθείτε το

http://creativecommons.org/licenses/by-nc-nd/4.0/

ή στείλετε επιστολή στο Creative Commons, PO Box 1866, Mountain View, CA 94042, USA.

Πρόλογος

Το εγχειρίδιο αυτό έχει γραφεί για τους μαθητές της Β Λυκείου του Προτύπου Γενικού Λυκείου της Βαρβακείου Σχολής. Είναι μια συλλογή ασκήσεων που θα χρησιμοποιηθούν στο καθημερινό μάθημα και στις επαναλήψεις. Επίσης, ασκήσεις από την παρούσα συλλογή θα μας απασχολήσουν και στην Γ Λυκείου.

Λυγάτσικας Ζήνων
email: zligatsikas@gmail.com
Μαθηματικός
Σύμβουλος Εκπαίδευσης
πρώην Καθηγητής του Προτύπου Λυκείου της Βαρβακείου Σχολής
Αθήνα, 1 Μαρτίου 2026

Περιεχόμενα

Κεφάλαιο 1

ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ

1.1 ΘΕΩΡΙΑ

1.1.1 Η εξίσωση $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ της μορφής $\alpha x + \beta y = \gamma,\ \alpha \neq 0 \vee \beta \neq 0$

Ορισμός 1.1.1 *Η εξίσωση με $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ της μορφής*

$$\alpha x + \beta y = \gamma,\ \alpha \neq 0 \vee \beta \neq 0$$

*ονομάζεται **γραμμική εξίσωση** και παριστά μια ευθεία στο καρτεσιανό σύστημα συντεταγμένων.*

$\underline{\beta \neq 0}$ Η εξίσωση γίνεται $y = -\dfrac{\alpha}{\beta}x + \dfrac{\gamma}{\beta}$. Να γίνει η γραφική παράσταση της ευθείας όταν:

1. αν $\boxed{\alpha \neq 0}$ και
2. αν $\boxed{\alpha = 0}$.

$\underline{\alpha \neq 0}$ Να γίνει η γραφική παράσταση της ευθείας όταν:

1. αν $\boxed{\beta \neq 0}$ και
2. αν $\boxed{\beta = 0}$.

1.2 ΓΡΑΜΜΙΚΑ ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ

1. Τι είναι το γραμμικό σύστημα 2×2.

2. Πότε 2 συστήματα είναι ισοδύναμα.

3. Γραφική επίλυση συστήματος.
   πχ

   (α′) $\begin{cases} x - 2y &= 6 \\ 3x + 4y &= 8 \end{cases}$.

1 Μαρτίου 2026 Λυγάτσικας Ζ.

(β′) $\begin{cases} x+2y &= 3 \\ 2x+4y &= -5 \end{cases}$.

(γ′) $\begin{cases} y+1 &= 2x \\ 4x-2y &= 2 \end{cases}$.

4. Διερεύνηση γραμμικού συστήματος, **με ορίζουσες**.
Έστω $\begin{cases} ax+by &= c \\ a'x+b'y &= c' \end{cases}$. $a, b, c, a', b', c' \in \mathbb{R}$. Θέτω:

$$D = \begin{vmatrix} a & b \\ a' & b' \end{vmatrix},\ D_x = \begin{vmatrix} c & b \\ c' & b' \end{vmatrix},\ D_y = \begin{vmatrix} a & c \\ a' & c' \end{vmatrix}$$

Η D ονομάζεται ορίζουσα του συστήματος και οι D_x, D_y ορίζουσες των x και y αντίστοιχα. Τότε:

(α′) Αν $D \neq 0$, $x = \dfrac{D_x}{D}$ και $y = \dfrac{D_y}{D}$.

(β′) Αν $D = 0$ και αν

i. $D_x = 0 \vee D_y = 0$, το σύστημα έχει άπειρο πλήθος λύσεων (αόριστο). Εξαιρουμένης της περίπτωσης όπου $a = b = a' = b' = 0$ και ένα τουλάχιστον εκ των c ή c' να είναι $\neq 0$, οπότε το σύστημα δεν έχει λύση.

ii. $D_x \neq 0 \vee D_y \neq 0$, το σύστημα δεν έχει λύση (αδύνατο).

Για παράδειγμα:

(α′) Το σύστημα $\begin{cases} x-2y &= 6 \\ 3x+4y &= 8 \end{cases}$ έχει λύση;

(β′) Για ποιές τιμές της παραμέτρου $\lambda \in \mathbb{R}$ το σύστημα $\begin{cases} \lambda x-y &= \lambda-1 \\ \lambda^2 x-2y &= \lambda \end{cases}$ έχει ή δεν έχει λύση;

5. Γραμμικό σύστημα 3×3. Το σύστημα λύνεται ad hock. Η μεθοδολογία με ορίζουσες δεν είναι στην ύλη του Λυκείου. Για παράδειγμα, βρείτε τη λύση του συστήματος αν υπάρχει:

$$\begin{cases} 2x-y+3z &= -9 \\ x+3y-z &= 10 \\ 3x+y-z &= 8 \end{cases}$$

1.3 ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1. Έστω το σύστημα $\begin{cases} 2x-y &= \lambda-1 \\ 7x-4y &= \lambda \end{cases}$.

(α′) Να δείξετε ότι έχει μοναδική λύση, (x_0, y_0), για κάθε $\lambda \in \mathbb{R}$.

(β′) Να βρείτε τις τιμές του λ ώστε $2x_0 - y_0 < 1$.

2. Αν D είναι η ορίζουσα του συστήματος $\begin{cases} (D-1)x+y &= 1 \\ D \cdot x+3y &= 2 \end{cases}$, να λύσετε το σύστημα.

3. Αν για το σύστημα $\left\{\begin{array}{lcl} \alpha x+\beta y & = & \gamma \\ \alpha' x+\beta' y & = & \gamma' \end{array}\right.$ ισχύουν $D \neq 0$, $D_x + 2D_y = 3D$ και $x - 2y = -1$, να βρείτε τα x και y.

4. Αν ένα γραμμικό σύστημα με αγνώστους x και y έχει μοναδική λύση και ισχύει:
$$D_x^2 + D_y^2 + 5D^2 - 2D \cdot D_x + 4D \cdot D_y = 0$$
να βρείτε τα x και y.

5. Να βρείτε τα λ, μ έτσι ώστε τα συστήματα
$$\left\{\begin{array}{lcr} x-\lambda\cdot y & = & -2 \\ x+3y & = & 1 \end{array}\right. , \qquad \left\{\begin{array}{ccc} \lambda\cdot x+y & = & 0 \\ (\lambda-1)\cdot x-\mu\cdot y & = & 2 \end{array}\right.$$
να είναι συγχρόνως αδύνατα.

6. Επαληθεύσατε ότι το $(3,2)$ είναι λύση των συστημάτων
$$\left\{\begin{array}{lcl} 4x-5y & = & 2 \\ -x+3y & = & 3 \end{array}\right. , \qquad \left\{\begin{array}{ccr} 2x-3y & = & 0 \\ x & = & 1,5y \end{array}\right.$$

7. Βρείτε τις τιμές των παραμέτρων $a, b, c, a', b'c'$ του συστήματος
$$\left\{\begin{array}{ccrcl} (\varepsilon) & : & ax+by & = & c \\ (\varepsilon') & : & a'x+b'y & = & c' \end{array}\right.$$
όταν η ευθεία (ε) διέρχεται απο τα σημεία $A(-2,1)$ και $B(2,-1)$ και η ευθεία (ε') απο τα σημεία $C(1,-3)$ και $D(-1,-2)$.

8. Έστω το παρακάτω σύστημα με $0^o < \omega < 90^o$:
$$\left\{\begin{array}{lcl} (\text{ημ}\,(\omega)-\text{συν}\,(\omega))\,x+(\text{ημ}\,(\omega)+\text{συν}\,(\omega))\,y & = & 1 \\ (\text{ημ}\,(\omega)+\text{συν}\,(\omega))\,x-(\text{ημ}\,(\omega)-\text{συν}\,(\omega))\,y & = & 1 \end{array}\right.$$
Δείξτε ότι το σύστημα έχει μία λύση. Στη συνέχεια δείξτε ότι αν (a,b) η λύση του συστήματος, τα a και b μπορεί να είναι τα μέτρα των καθέτων πλευρών ενός ορθογωνίου τριγώνου με υποτείνουσα ίση με 1 μονάδα και μία οξεία γωνία ίση με ω.

9. Έστω το σύστημα $\left\{\begin{array}{ccr} (\lambda+3)x+y & = & 5\lambda \\ \lambda x+y & = & -1 \end{array}\right.$ με $3 < \lambda < 5$. Δείξτε ότι αν x_0 και y_0 οι λύσεις του συστήματος, τότε $\dfrac{16}{3} < x_0 < 9$ και $y_0 < 0$.

10. Για το σύστημα $\left\{\begin{array}{lcl} 2x-3y & = & 8 \\ 6y-4x & = & 9 \end{array}\right.$ ισχύει:

Α. $x = 4, y = 0$ **Β.** $x = 0, y = \dfrac{3}{2}$ **Γ.** $x = y = 0$ **Δ.** Δεν υπάρχει λύση **Ε.** Έχει άπειρες λύσεις

11. Από μια ομάδα αγοριών και κοριτσιών φεύγουν 15 κορίτσια. Τότε μένουν 2 αγόρια για κάθε κορίτσι. Στη συνέχειαφεύγουν από την ομάδα 45 αγόρια και μένουν 5 κορίτσια για κάθε αγόρι. Ο αρχικός αριθμός των κοριτσιών είναι:
Α. 40 **Β.** 45 **Γ.** 29 **Δ.** 50 **Ε.** τίποτα από τα προηγούμενα

12. Για το σύστημα $\left\{ \begin{array}{rcl} 2x - 3y & = & 8 \\ 6y - 4x & = & 9 \end{array} \right.$ ισχύει:
Α. $x = 4, y = 0$ **Β.** $x = 0, y = \dfrac{3}{2}$ **Γ.** $x = y = 0$ **Δ.** Δεν υπάρχει λύση **Ε.** Έχει άπειρες λύσεις

13. Από μια ομάδα αγοριών και κοριτσιών φεύγουν 15 κορίτσια. Τότε μένουν 2 αγόρια για κάθε κορίτσι. Στη συνέχειαφεύγουν από την ομάδα 45 αγόρια και μένουν 5 κορίτσια για κάθε αγόρι. Ο αρχικός αριθμός των κοριτσιών είναι:
Α. 40 **Β.** 45 **Γ.** 29 **Δ.** 50 **Ε.** τίποτα από τα προηγούμενα

1.4 ΜΗ ΓΡΑΜΜΙΚΑ

14. Οι τιμές του y που ικανοποιούν τις εξισώσεις

$$\begin{cases} 2x^2 + 6x + 5y + 1 & = & 0 \\ 2x + y + 3 & = & 0 \end{cases}$$

μπορεί να βρεθούν από τις ρίζες της εξίσωσης:
Α. $y^2 + 14y - 7 = 0$ **Β.** $y^2 + 8y + 1 = 0$ **Γ.** $y^2 + 10y - 7 = 0$ **Δ.** $y^2 + y - 12 = 0$ **Ε.** τίποτα από τα παραπάνω

15. Να λυθεί το σύστημα: $\begin{cases} 2\sqrt{x} - 3\sqrt{y} & = & 5 \\ 3\sqrt{x} - 5\sqrt{y} & = & 7 \end{cases}$
(Θέσε $X = \sqrt{x}$ και $Y = \sqrt{y}$.)

16. Λύσε τα συστήματα:

$$(\Sigma): \begin{cases} x - y & = & 8 \\ x^2 - y^2 & = & 384 \end{cases}, \qquad (\Sigma'): \begin{cases} 2x + 5y & = & 34 \\ 4x^2 - 25y^2 & = & -952 \end{cases}$$

17. Αν x θετικός ακέραιος, δείξτε ότι δεν υπάρχει ακέραιος y έτσι ώστε:

$$\begin{cases} (4x+3y)^2 - (3x-4y)^2 & = & 6 \\ (x-y)^3 + (x+y)^3 + 3(x-y)^2(x+y) + 3(x-y)(x+y)^2 & = & 64 \end{cases}$$

18. Δείξτε ότι το παρακάτω σύστημα δεν έχει λύση:

$$\begin{cases} \dfrac{4}{x-y} - \dfrac{y}{(x-y)^2} & = & 0 \\ 1 - \dfrac{x^2+y^2}{x^2-y^2} & = & 0 \end{cases}$$

19. Δίνονται οι δύο εξισώσεις:

$$x^2 - (2\lambda - 1)x - 3 = 0 \quad (1) \qquad \text{και} \qquad x^2 - (\lambda - 2)x + 3\lambda = 0 \quad (2)$$

με $\lambda \neq -1$. Αν οι δύο εξισώσεις έχουν κοινή ρίζα, να βρείτε:

(α′) την κοινή ρίζα,

(β′) την τιμή του λ ώστε να έχουν κοινή ρίζα.

20. Να λυθεί το σύστημα: $\begin{cases} 5x - y & = & -1 \\ x^2 + 4xy - 2y^2 + 8x + 39 & = & 0 \end{cases}$.
<u>Υπόδειξη:</u> Με αντικατάσταση του y από την πρώτη στην δεύτερη. ■

21. Να λυθεί το σύστημα: $\begin{cases} x + y + xy & = & 41 \\ xy(x+y) & = & 330 \end{cases}$

1.5 ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΠΟΛΛΑΠΛΗΣ ΕΠΙΛΟΓΗΣ

1. Η λύση του συστήματος $\begin{cases} 2x - 3y &= 7 \\ 4x - 6y &= 20 \end{cases}$ είναι:
   Α. $(x, y) = (18, 12)$ **Β.** $(x, y) = (0, 0)$ **Γ.** Δεν υπάρχει λύση **Δ.** Υπάρχουν άπειρες λύσεις **Ε.** $(x, y) = (8, 5)$

2. Δύο αριθμοί των οποίων το άθροισμα είναι 6 και η απόλυτη διαφορά είναι 8 είναι ρίζες της εξίσωσης:
   Α. $x^2 - 6x + 7 = 0$ **Β.** $x^2 - 6x - 7 = 0$ **Γ.** $x^2 + 6x - 8 = 0$ **Δ.** $x^2 - 6x + 8 = 0$ **Ε.** $x^2 + 6x - 7 = 0$

3. Οι τιμές του y που θα ικανοποιούν τις εξισώσεις:
   $$\begin{cases} 2x^2 + 6x + 5y + 1 &= 0 \\ 2x + y + 3 &= 0 \end{cases}$$
   μπορεί να βρεθούν λύνοντας την:
   Α. $y^2 + 14y - 7 = 0$ **Β.** $y^2 + 8y + 1 = 0$ **Γ.** $y^2 + 10y - 7 = 0$ **Δ.** $y^2 + y - 12 = 0$ **Ε.** Κανένα από τα προηγούμενα

4. Η λύση του συστήματος: $\begin{cases} 2x - 3y &= 8 \\ 6y - 4x &= 9 \end{cases}$ είναι:
   Α. $x = 4,\ y = 0$ **Β.** $x = 0,\ y = \dfrac{1}{2}$ **Γ.** $x = y = 0$ **Δ.** Δεν υπάρχει λύση **Ε.** Υπάρχουν άπειρες τιμές των x και y που είναι λύσεις του συστήματος

5. Αν $\begin{vmatrix} a & c \\ d & b \end{vmatrix} = ab - cd$, τότε η εξίσωση $\begin{vmatrix} 2x & 1 \\ x & x \end{vmatrix} = 3$

   1. Ικανοποιείται μόνο για μία τιμή της μεταβλητής x.
   2. Ικανοποιείται για δύο τιμές της μεταβλητής x.
   3. Δεν υπάρχει τιμή της μεταβλητής x που ικανοποιεί την εξίσωση.
   4. Υπάρχουν άπειρες τιμές της μεταβλητής x που ικανοποιούν την εξίσωση.
   5. Τίποτα από τα προηγούμενα.

6. Αν $\dfrac{xy}{x+y} = a$, $\dfrac{xz}{x+z} = b$ και $\dfrac{yz}{y+z} = c$, όπου $a, b, c \in \mathbb{R}^*$, τότε το x είναι ίσο με:
   Α. $\dfrac{abc}{ab + ac + bc}$ **Β.** $\dfrac{2abc}{ab + ac + bc}$ **Γ.** $\dfrac{2abc}{ab + ac - bc}$ **Δ.** $\dfrac{2abc}{ab + bc - ab}$ **Ε.** $\dfrac{2abc}{ac + bc - ab}$

7. Η τιμή του x που είναι λύση του συστήματος των εξισώσεων $y = \dfrac{8}{x^2 + 4}$ και $x + y = 2$, είναι:
   Α. $-2 + \sqrt{5}$ **Β.** $-2 - \sqrt{5}$ **Γ.** 0 **Δ.** 2 **Ε.** Τίποτα από τα προηγούμενα

8. Υποθέτω ότι $a \in \mathbb{R}$. Έστω το σύστημα ως προς x και y, $\begin{cases} ax + (a-1)y &= 1 \\ (a+1)x - ay &= 1 \end{cases}$. Για ποια από τις παρακάτω τιμές του a δεν υπάρχει λύση του συστήματος ως προς x και y:
   Α. 1 **Β.** 0 **Γ.** -1 **Δ.** $\dfrac{\pm\sqrt{2}}{2}$ **Ε.** $\pm\sqrt{2}$

9. Ο αριθμός των τομών των γραφημάτων $x^2 + y^2 = 9$ και $y^2 = 9$ είναι:
Α. άπειρα σημεία **Β.** 4 **Γ.** 2 **Δ.** 1 **Ε.** 0

10. Ο αριθμός των διακριτών σημείων των δύο καμπυλών $x^2 + 4y^2 = 1$ και $4x^2 + y^2 = 4$ είναι:
Α. 0 **Β.** 1 **Γ.** 2 **Δ.** 3 **Ε.** 4

11. Αν x και y δεν είναι μηδενικοί αριθμοί και τέτοιοι ώστε $x = 1 + \dfrac{1}{y}$ και $y = 1 + \dfrac{1}{x}$, τότε το y είναι ίσο με:
Α. $x - 1$ **Β.** $1 - x$ **Γ.** $1 + x$ **Δ.** $-x$ **Ε.** x

12. Ποια από τα παρακάτω περιγράφει το γράφημα της εξίσωσης $(x + y)^2 = x^2 + y^2$;
Α. Το μηδενικό σύνολο **Β.** Ένα σημείο **Γ.** Δύο γραμμές **Δ.** Ένα κύκλο **Ε.** Όλο το επίπεδο

13. Το κοινό σημείο των καμπυλών $y = \dfrac{8}{x^2 + 4}$ και $x + y = 2$ έχει τετμημένη:
Α. $-2 + \sqrt{5}$ **Β.** $-2 - \sqrt{5}$ **Γ.** 0 **Δ.** 2 **Ε.** τίποτα από τα προηγούμενα

14. Δύο αριθμοί που έχουν άθροισμα 6 και απόλυτη διαφορά 7, είναι ρίζες της εξίσωσης:
Α. $x^2 - 6x + 7 = 0$ **Β.** $x^2 - 6x - 7 = 0$ **Γ.** $x^2 + 6x - 8 = 0$ **Δ.** $x^2 - 6x + 8 = 0$ **Ε.** $x^2 + 6x - 7 = 0$

15. Δίνονται 4 ακέραιοι αριθμοί a, b, c, d. Αν πάρουμε το μέσο όρο των τριών και προσθέσουμε τον 4ο θα πάρουμε αντίστοιχα: 29, 23, 21 και 17. Τότε ένας από τους αρχικούς ακέραιος είναι ο:
Α. 1 **Β.** 2 **Γ.** 3 **Δ.** 4 **Ε.** 5

16. Τα γραφήματα των

$$2x + 3y - 6 = 0,\ 4x - 3y - 6 = 0,\ x = 2,\ y = \frac{2}{3}$$

τέμνονται σε:
Α. 6 σημεία **Β.** 1 σημείο **Γ.** 2 σημεία **Δ.** κανένα σημείο **Ε.** άπειρο αριθμό σημείων

17. Τράπεζα θεμάτων αριθμ. 15118, Θέμα 4.

α) Να λύσετε το σύστημα $\left(\Sigma_1\right):\begin{cases} xy=6 \\ x^2+y^2=13 \end{cases}$.

(Μονάδες 8)

β) Είναι όλες οι λύσεις του συστήματος $\left(\Sigma_1\right)$ λύσεις και του $\left(\Sigma_2\right):\begin{cases} |xy|=6 \\ x^2+y^2=13 \end{cases}$; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

(Μονάδες 5)

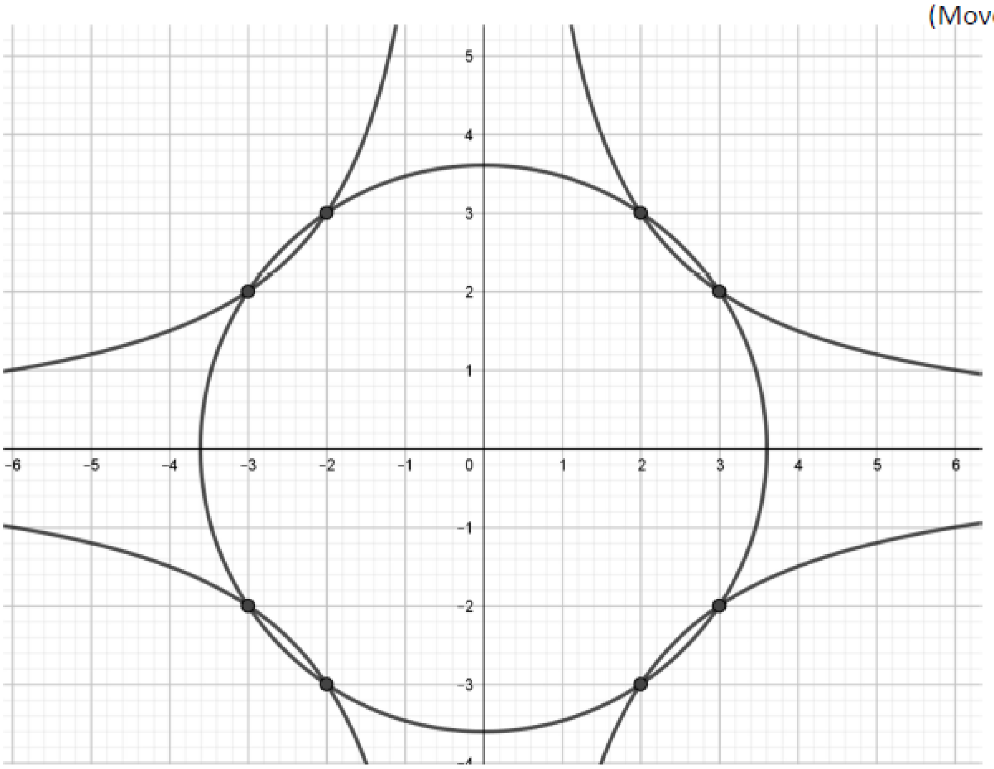
γ) Η γεωμετρική αναπαράσταση του συστήματος $\left(\Sigma_2\right)$ φαίνεται στο παρακάτω σχήμα. Με βάση το σχήμα,

i. να βρείτε τις λύσεις του $\left(\Sigma_2\right)$.

(Μονάδες 4)

ii. να παραστήσετε γεωμετρικά το σύστημα $\left(\Sigma_1\right)$ σημειώνοντας τις λύσεις του.

(Μονάδες 8)



ΛΥΣΗ

α) Έχουμε: $\begin{cases} xy = 6 \\ x^2 + y^2 = 13 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = \dfrac{6}{x} \\ x^2 + \left(\dfrac{6}{x}\right)^2 = 13 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = \dfrac{6}{x} \\ x^4 - 13x^2 + 36 = 0 \end{cases}$ (1).

Θέτουμε $x^2 = \omega > 0$, οπότε η εξίσωση (1) γίνεται: $\omega^2 - 13\omega + 36 = 0$ που έχει ρίζες $\omega = 4$ και $\omega = 9$. Άρα $x^2 = 4 \Leftrightarrow x = \pm 2$ και $x^2 = 9 \Leftrightarrow x = \pm 3$.

Οπότε το σύστημα έχει τέσσερις λύσεις, τις $(2,3), (-2,-3), (3,2)$ και $(-3,-2)$.

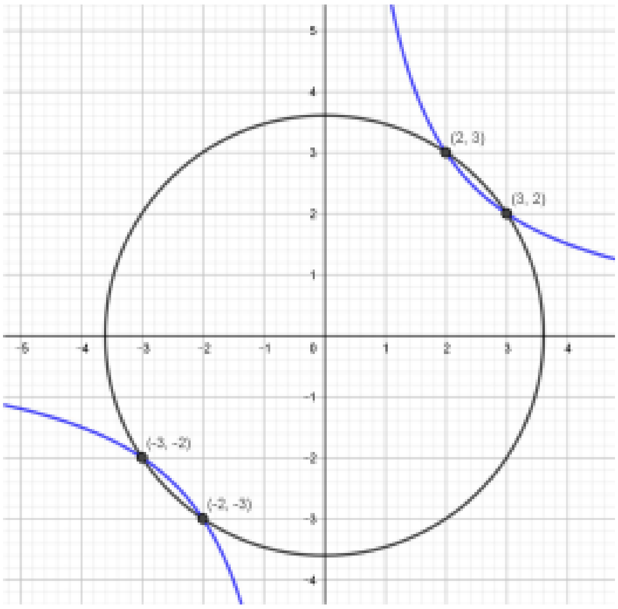
β) Παρατηρούμε ότι:

$|2 \cdot 3| = 6$ και $2^2 + 3^2 = 4 + 9 = 13$. Ομοίως $|-2 \cdot (-3)| = 6$ και $(-2)^2 + (-3)^2 = 4 + 9 = 13$, $|3 \cdot 2| = 6$ και $3^2 + 2^2 = 9 + 4 = 13$, $|(-3) \cdot (-2)| = 6$ και $(-3)^2 + (-2)^2 = 9 + 4 = 13$, άρα οι λύσεις του συστήματος (Σ_1) είναι και λύσεις του (Σ_2).

γ)

i. Το (Σ_2) έχει οκτώ λύσεις, τις $(2,3), (-2,-3), (3,2), (-3,-2)$ (που είναι λύσεις και του (Σ_1)) και τις $(-2,3), (-3,2), (3,-2), (2,-3)$.

ii. Όπως φαίνεται στο διπλανό σχήμα, η γεωμετρική αναπαράσταση του (Σ_1) είναι το τμήμα της γραφικής αναπαράστασης του (Σ_2) που αποτελείται από τον κύκλο και τους κλάδους της υπερβολής που βρίσκονται στο 1^{ο} και 3^{ο} τεταρτημόριο, όπου είναι σημειωμένα και τα σημεία τομής των δυο γραμμών, οι συντεταγμένες των οποίων είναι οι λύσεις του συστήματος αυτού.



Κεφάλαιο 2

ΙΔΙΟΤΗΤΕΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΩΝ

2.1 ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΣΤΗ ΜΟΝΟΤΟΝΙΑ ΚΑΙ ΑΚΡΟΤΑΤΑ

Οι εισαγωγικές έννοιες είναι από το βιβλίο της **Εισαγωγής στην Άλγεβρα για το Λύκειο**.

1. Να εξετάσετε ως προς τη μονοτονία τη συνάρτηση: $f(x) = \dfrac{3}{x} - 4\sqrt{x-4}$.

2. Δίδεται η συνάρτηση $f(x) = |\lambda|x - 3(x+1)$.

   (α′) Να κατασκευάσετε στο Geogebra ένα μοντέλο της συνάρτησης παραμετρικό ως προς λ. Για ποιές τιμές του λ αλλάζει μονοτονία;

   (β′) Να εξετάσετε αλγεβρικά τη μονοτονία της συνάρτησης $f(x)$ επαληθεύοντας τους προηγούμενους ισχυρισμούς.

3. Αν η συνάρτηση h είναι γνησίως μονότονη στο σύνολο $\mathbb{R}$, να λύσετε τις εξισώσεις: $h(x) = h(2x-3)$ και $h(x^3) - h(27) = 0$.

4. Έστω δυο συναρτήσεις $f, g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ με το ίδιο είδος μονοτονίας. Να δείξετε ότι η συνάρτηση: $h(x) = f\Big(g(x)\Big)$ είναι γνησίως αύξουσα.

5. Αν η συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$ να δείξετε ότι:

$$f\left(\frac{2}{\pi}\right) < f\left(\frac{\pi}{3}\right), \qquad f(2\alpha) \leq f(\alpha^2+1)$$

6. Αν η συνάρτηση f είναι γνησίως φθίνουσα στο $\mathbb{R}$ να δείξετε ότι:

$$i. \quad f(\sqrt{6}-3) > f\Big(\sqrt{3}-\sqrt{2}\Big) \quad ii. \quad f\Big(\sqrt[4]{34}\Big) > f(\sqrt{6})$$

$$iii. \quad f(2x^2+2013) < f(2012) \quad iv. \quad f(-\alpha^2+\alpha) > f(-\alpha+2)$$

7. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x^2 + \sqrt{x-1}$.

(α΄) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της f.

(β΄) Να εξετάσετε την μονοτονία της f.

(γ΄) Να εξετάσετε αν η συνάρτηση παρουσιάζει ελάχιστο.

(δ΄) Να βρείτε το $f(10)$ και να λύσετε:

i. την εξίσωση $f(x) = 103$

ii. την ανίσωση $f(x) < 103$

(ε΄) Να δείξετε ότι $f\left(\dfrac{2012}{2011}\right) - 1 > 0$.

8. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \dfrac{\sqrt{4-x^2}+2}{x}$.

(α΄) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της f.

(β΄) Σχεδιάστε την συνάρτηση στο Geogebra.

(γ΄) Μπορείτε να δικαιολογήσετε τη μορφολογία της συνάρτησης;

(δ΄) Γιατί το γράφημα $\mathcal{C}_f$ έχει κέντρο συμμετρίας το $O(0,0)$;

9. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \begin{cases} -x^{2013}, & \text{αν } x < 0 \\ x^{2013}, & \text{αν } x \geq 0 \end{cases}$. Να δείξετε ότι η $\mathcal{C}_f$ έχει άξονα συμμετρίας τον άξονα $y'y$.

10. Αν μια συνάρτηση f με πεδίο ορισμού όλο το σύνολο των πραγματικών αριθμών, $\mathbb{R}$ είναι περιττή, τότε η συνάρτηση $g(x) = |f(x)|$ είναι άρτια.

11. Δίνονται οι συναρτήσεις $f,\ g : A \longrightarrow \mathbb{R}$ όπου η f είναι περιττή και η g άρτια. Να δείξετε ότι η συνάρτηση $h(x) = f(x) \cdot g(x)$ είναι περιττή.

12. Έστω η συνάρτηση $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει: $f(x+y) = f(x) + f(y)$, για κάθε $x, y \in \mathbb{R}$.

(α΄) Να βρείτε το $f(0)$.

(β΄) Να δείξετε ότι η f είναι περιττή.

13. Έστω η συνάρτηση $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ η οποία είναι περιττή. Να δείξετε ότι η συνάρτηση $g(x) = f(|x|) \cdot |f(x)|$, είναι άρτια.

14. Έστω η συνάρτηση $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$. Να δείξετε ότι:

(α΄) η συνάρτηση $g(x) = f(a+x) - f(a-x)$ είναι περιττή,

(β΄) η συνάρτηση $h(x) = f(b-x) + f(b+x)$ είναι άρτια.

15. Έστω η συνάρτηση $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει:

$$f(x) \cdot f(-x) = [f(x)]^2$$

για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Να δείξετε ότι η f είνα άρτια.

16. Σκοπός είναι να βρούμε μια συνάρτηση $f : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ που επαληθεύει τις δύο παρακάτω συνθήκες:

- $f(1) = 1$
- για κάθε φυσικό m και n,

$$f(m+n) = f(m) \times f(n) + f(n) + f(m)$$

(α΄) Υποθέτουμε ότι μια τέτοια συνάρτηση f υπάρχει.

i. Υπολογίστε το $f(0)$.

ii. Υπολογίστε τα $f(2)$, $f(3)$, $f(6)$.

(β΄) Δείξτε ότι για κάθε φυσικό n $f(n+1) = 2f(n) + 1$.

(γ΄) Θέτω για κάθε φυσικό n: $g(n) = f(n) + 1$.
Δείξτε ότι για κάθε φυσικό m και n: $g(n+m) = g(n) \times g(m)$.

(δ΄) Να βρείτε την συνάρτηση f που ανταποκρίνεται στο πρόβλημα.

17. Έστω η συνάρτηση f που πάει ζεύγη φυσικών αριθμών σε φυσικούς αριθμούς σύμφωνα με τους κανονες:

$$f(0,y) = y+1, \quad f(x,0) = f(x-1,1), \quad f(x+1,y+1) = f(x, f(x+1,y))$$

Να βρείτε τις τιμές $f(2,1)$ και $f(2,2)$.

18. Έστω μια πραγματική συνάρτηση f ορισμένη στο $(0,+\infty)$, όπως ο παρακάτω πίνακας:

Πίνακας Τιμών

x	$f(x)$
2	$3,0103$
3	$4,7712$
4	
5	$6,9897$
6	$7,7815$
7	$8,4510$
8	
9	
10	
100	
1000	
1000000	
10^9	

Η συνάρτηση αυτή έχει την εξής ιδιότητα:
Για κάθε πραγματικούς αριθμούς $x > 0$ και $y > 0$ ισχύει:

$$f(x \times y) = f(x) + f(y)$$

(α΄) Βρείτε το $f(4)$ και συμπληρώστε τον διπλανό πίνακα.

(β΄) Υπολογίστε το $f(245)$.

(γ΄) Υπολογίστε το $f(1)$.

(δ΄) Δείξτε ότι για κάθε $x > 0$:

$$f\left(\frac{1}{x}\right) = -f(x)$$

19. Δίνεται η συνάρτηση f για την οποία ισχύει $f(x+y) = f(x) + f(y)$, για κάθε πραγματικό αριθμό x, y. Να αποδείξετε ότι:

(α΄) $f(0) = 0$

(β′) Η f είναι περιττή.

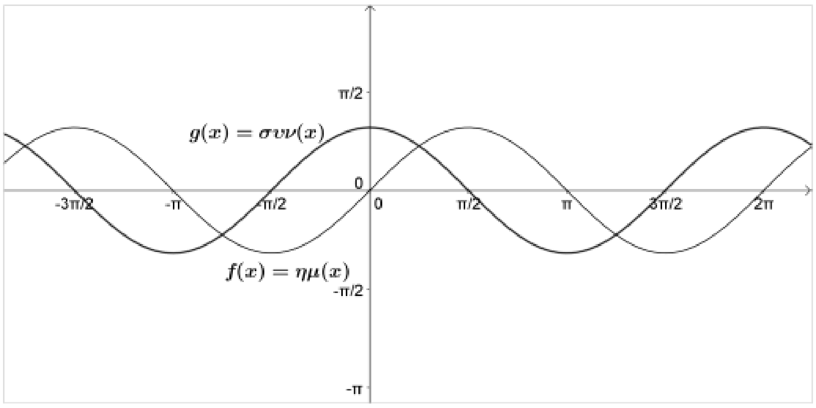
(γ′) $f(\nu x) = \nu f(x)$, $\forall \nu \in \mathbb{N}^*$

20. Αν η συνάρτηση $f(x)$ έχει ελάχιστη τιμή το -1 και μεγίστη το 4, να βρεθούν οι σταθερές α και β, όταν $f(x) = \dfrac{2\alpha x + \beta}{x^2+1}$.

2.2 ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΣΤΗ ΜΕΤΑΤΟΠΙΣΗ

21. Μετατοπίζοντας κατάλληλα το γράφημα της συνάρτησης $f(x) = x^2$ να σχεδιάσετε και να λύσετε γραφικά την εξίσωση $x^2 - x - 2 = 0$.

22. Στο Σχήμα 2.1 βλέπετε το διάγραμμα δύο συναρτήσεων $f(x) = $ ημ (x) και $g(x) = $ συν (x). Να δώσετε τους τύπους οριζόντιας μετατόπισης της συνάρτησης f έτσι ώστε να προκύψει η συνάρτηση g και αντιστρόφως.



Σχήμα 2.1: Το γράφημα του συν μπορεί να μετατοπισθεί και να συμπέσει με το γράφημα του ημ .

2.3 ΓΕΝΙΚΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1. Ποια από τα παρακάτω σημειοσύνολα είναι γραφήματα συναρτήσεων;

(α′) $S_1 = \left\{ \left(\dfrac{x}{y}, \dfrac{x+1}{y} \right),\ x \in \mathbb{R},\ y \in \mathbb{R}^* \right\}$

(β′) $S_2 = \left\{ \left(\dfrac{x}{y}, \dfrac{2x}{3y} \right),\ x \in \mathbb{R},\ y \in \mathbb{R}^* \right\}$

(γ′) $S_3 = \left\{ \left(\dfrac{x}{y}, \dfrac{x^2}{y^2} \right),\ x \in \mathbb{R},\ y \in \mathbb{R}^* \right\}$

(δ′) $S_4 = \left\{ \left(\dfrac{x}{y}, \dfrac{x^3}{y^3} \right),\ x \in \mathbb{R},\ y \in \mathbb{R}^* \right\}$

2. Απαντήστε στις παρακάτω ερωτήσεις ΣΩΣΤΟ/ΛΑΘΟΣ:

(α′) Η συνάρτηση $f(x) = x^2$ είναι φθίνουσα στο $\mathbb{R}$.

(β′) Η συνάρτηση $f(x) = ax^2$, $a \in \mathbb{R}^*$, είναι άρτια αν $a > 0$ και περιττή αν $a < 0$.

(γ′) Αν τη σημείο $M(a, b)$ είναι σημείο του γραφήματος της $f(x) = 2x^2$, τότε το σημείο $M(2a, 2b)$ είναι σημείο του γραφήματος της $f(x) = x^2$.

(δ′) Το γράφημα της $f(x) = -\sqrt{-x}$ βρίσκεται δεξιά του άξονα $y'y$.

3. Να εξετάσετε την μονοτονία των παρακάτω συναρτήσεων:

(α′) $f(x) = \dfrac{1}{x}$, $\forall x \in (-\infty, -1)$.

(β′) $f(x) = -x^2$, $\forall x \in [-1, 0]$.

(γ′) $f(x) = x^2$, $\forall x \in (0, 1)$.

(δ′) $f(x) = \dfrac{1}{x}$, $\forall x \in (1, +\infty)$.

4. Εξετάστε αν οι παρακάτω συναρτήσεις είναι άρτιες ή περιττές:

(α′) $f(x) = x^2 + 2$,

(β′) $f(x) = \dfrac{|x|}{1 + 4x^4}$,

(γ′) $f(x) = \dfrac{2x}{3 + 4x^2}$,

(δ′) $f(x) = 1 - x + x^2$,

(ε′) $f(x) = \dfrac{x}{1 + x + x^2}$,

(ϛ′) $f(x) = \dfrac{x^3}{1 + x^4}$.

5. Μία συνάρτηση f είναι ορισμένη στο διάστημα $[-1, 5]$ που ικανοποιεί τις εξής ιδιότητες:

- $f(-1) = f(5) = 0$, $f(2) = 3$, $f(4) = -2$.
- Η f είναι αύξουσα στο $[-1, 2]$ και στο $[4, 5]$.
- Η f είναι φθίνουσα στο $[2, 4]$.

(α′) Να χαράξτε το γράφημα.

(β′) Να λύσετε γραφικά την εξίσωση $f(x) = 0$.

6. Έστω $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ με $f(x) = x^2 - 8x + 3$.

(α′) Δείξτε ότι $f(x) = (x - 4)^2 - 13$.

(β′) Υπολογίστε το $f(5)$ και το $f(1)$.

(γ′) Δείξτε ότι $f(x) > -13$, $\forall x \in \mathbb{R}$.

(δ′) Να δείξτε ότι η $f(x)$ δέχεται ένα ελάχιστο στο $\mathbb{R}$ και να προσδιορίσετε την τιμή του.

(ε′) Να βρείτε την τιμή του x για την οποία η συνάρτηση έχει αυτό το ελάχιστο.

7. Έστω η συνάρτηση $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ με $f(x) = -x^2 + 10x - 20$

(α′) Δείξτε ότι $f(x) = -(x - 5)^2 + 5$.

(β′) Δείξτε ότι $f(x) \leq 5$ και ότι η f δέχεται ένα μέγιστο και να προσδιορίσετε την τιμή του.

(γ΄) Βρείτε την τιμή του x για την οποία η συνάρτηση έχει αυτό το μέγιστο.

8. Έστω $AB\Gamma\Delta$ ένα ορθογώνιο με $AB = 10cm$ και $B\Gamma = 8cm$. Έστω N σημείο που κινείται πάνω στην $B\Gamma$ και $BN = x$. M και N είναι δύο σημεία στην $A\Delta$ και $\Delta\Gamma$ έτσι ώστε $AM = BN = \Gamma K = x$. Ο σκοπός της άσκησης είναι να βρούμε τη θέση του σημείου N έτσι ώστε το άθροισμα των εμβαδών των τριγώνων BNM και $N\Gamma K$ να γίνει το μέγιστο δυνατό.

   (α΄) Επαληθεύστε ότι $x \in [0, 8]$.

   (β΄) Εκφράστε το BM συναρτήσει του x.

   (γ΄) Εκφράστε το ΓN συναρτήσει του x.

   (δ΄) Δείξτε ότι το εμβαδόν του τριγώνου BNM είναι $\dfrac{10x - x^2}{2}$.

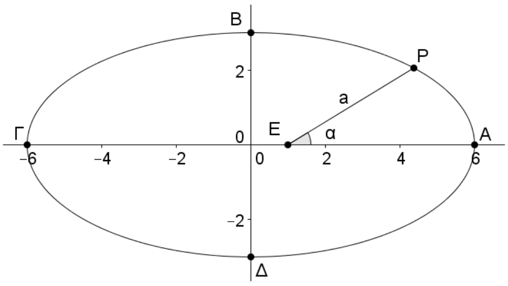
   (ε΄) Έστω f η συνάρτηση με μεταβλητή x και τιμή το άθροισμα των εμβαδών των δύο τριγώνων. Επαληθεύστε ότι $f(x) = 9x - x^2$.

   (ϛ΄) i. Δείξτε ότι $f(x) = -\left(x - \dfrac{9}{2}\right)^2 + 20.25$.

   ii. Λύστε το πρόβλημα.

   (ζ΄) Μοντελοποιήστε το πρόβλημα σε ένα σύστημα δυναμικής γεωμετρίας.

9. Ένας δορυφόρος E παρατηρεί έναν πλανήτη P που κινείται σε μια ελλειπτική τροχιά. Ο δορυφόρος βρίσκεται στην θέση $(1, 0)$ ενός ορθοκανονικού συστήματος, όπως φαίνεται στο παρακάτω σχήμα:



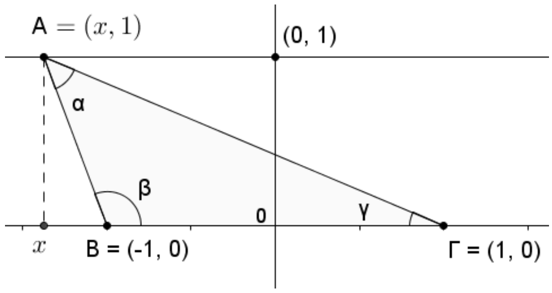
   (α΄) Αν $\widehat{AEP} = \alpha$, να βρείτε το γράφημα της συνάρτησης $d(\alpha) \to EP$ με $\alpha \in [0^o, 360^0]$ ή καλύτερα για να μην έχουμε πρόβλημα στην κλίμακα $\alpha \in [0, 2\pi]$ σε ακτίνια.

   (β΄) Όταν ο πλανήτης βρεθεί στο σημείο B της τροχιάς του, η τιμή $d(\alpha)$ γίνεται ελάχιστη;

   (γ΄) Εξετάστε την μονοτονία της συνάρτησης d. Βρείτε τα ακρότατα με προσέγγιση καθώς και τις αντίστοιχες τιμές της γωνίας α που δίνουν τα ακρότατα αυτά.

   (δ΄) Αν η περιστροφή συνεχισθεί, ποια μορφή θα έχει το γράφημα της συνάρτησης d;

10. (Η άσκηση μπορεί να γίνει συνεργατικά από τρείς ομάδες.) Έστω $B = (-1.0)$ και $\Gamma = (1, 0)$ δύο σημεία σε ένα ορθοκανονικό σύστημα συντεταγμένων. Έστω σημείο A κινούμενο πάνω σε παράλληλη ευθεία προς τον άξονα $x'x$. Η ευθεία αυτή διέρχεται από το σημείο $(0, 1)$. Έστω $A = (x, 1)$, $x \in \mathbb{R}$. Δείτε στο σχήμα.



1η Ομάδα: Μελέτη της γωνίας $\widehat{A}$

(α′) Να κάνετε γραφική παράσταση της συνάρτησης $\alpha(x) = \widehat{A}$, $\forall x \in \mathbb{R}$.
(β′) Να βρείτε τις εικόνες των σημείων $x = -2.75, -0.75, 0, 0.75, 2.75$.
(γ′) Να βρείτε τις τετμημένες των σημείων με εικόνες 60^o και 90^o.
(δ′) Να εξετάσετε την μονοτονία της συνάρτησης $\alpha(x)$, $\forall x \in \mathbb{R}$.
(ε′) Να λυθεί γεωμετρικά η ανίσωση $\alpha(x) < 90^o$.
(ϛ′) Να λυθεί γεωμετρικά η ανίσωση $\alpha(x) > 90^o$.

2η Ομάδα: Μελέτη της γωνίας $\widehat{B}$

(α′) Να κάνετε γραφική παράσταση της συνάρτησης $\beta(x) = \widehat{B}$, $\forall x \in \mathbb{R}$.
(β′) Να βρείτε τις εικόνες των σημείων $x = -2.75, -0.75, 0, 0.75, 2.75$.
(γ′) Να βρείτε τις τετμημένες των σημείων με εικόνες 60^o και 90^o.
(δ′) Να εξετάσετε την μονοτονία της συνάρτησης $\beta(x)$, $\forall x \in \mathbb{R}$.
(ε′) Να λυθεί γεωμετρικά η ανίσωση $\beta(x) < 90^o$.
(ϛ′) Να λυθεί γεωμετρικά η ανίσωση $\beta(x) > 90^o$.

1η Ομάδα: Μελέτη της γωνίας $\widehat{\Gamma}$

(α′) Να κάνετε γραφική παράσταση της συνάρτησης $\gamma(x) = \widehat{\Gamma}$, $\forall x \in \mathbb{R}$.
(β′) Να βρείτε τις εικόνες των σημείων $x = -2.75, -0.75, 0, 0.75, 2.75$.
(γ′) Να βρείτε τις τετμημένες των σημείων με εικόνες 60^o και 90^o.
(δ′) Να εξετάσετε την μονοτονία της συνάρτησης $\gamma(x)$, $\forall x \in \mathbb{R}$.
(ε′) Να λυθεί γεωμετρικά η ανίσωση $\gamma(x) < 90^o$.
(ϛ′) Να λυθεί γεωμετρικά η ανίσωση $\gamma(x) > 90^o$.

Εργασία κοινή για τις τρείς ομάδες.

(α′) Βρείτε τις τιμές του x για τις οποίες το τρίγωνο $AB\Gamma$ είναι:
  i. ορθογώνιο,
  ii. ισοσκελές (να βρείτε τα μέτρα των γωνιών),
  iii. ισόπλευρο,
  iv. αμλυγώνιο,
  v. οξυγώνιο.

(β′) Συμπληρώστε την φράση: Το τρίγωνο $AB\Gamma$ έχει πάντα μια γωνία μικρότερη από ....

11. Δείξτε ότι αν η συνάρτηση $f : D_f \to \mathbb{R}$ είναι περιττή με $0 \in D_f$, τότε το γράφημα της f διέρχεται από το σημείο $(0, 0)$.

2.4 ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΤΡΑΠΕΖΑΣ ΘΕΜΑΤΩΝ - 2022

1. Θέμα 4 άσκηση 15022.

Θεωρούμε μια συνάρτηση f με πεδίο ορισμού το διάστημα $[-3,3]$. Η συνάρτηση f είναι άρτια, γνησίως φθίνουσα στο διάστημα $[-3,0]$ και γνησίως αύξουσα στο διάστημα $[0,3]$.

α) Να αποδείξετε ότι $f(-1)<f(2)$.

(Μονάδες 6)

β) Να αποδείξετε ότι $f(3)\geq f(x)\geq f(0)$ για κάθε $x\in[-3,3]$.

(Μονάδες 7)

γ) Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f παρουσιάζει ελάχιστο και μέγιστο και να βρείτε τις θέσεις μεγίστου και ελαχίστου.

(Μονάδες 6)

δ) Παρακάτω δίνονται 4 τύποι, από τους οποίους ένας μόνο μπορεί να είναι ο τύπος της συνάρτησης f. Να επιλέξετε το σωστό τύπο αιτιολογώντας την απάντησή σας.

α. $f(x)=\sqrt{9-x^2}$ β. $f(x)=-\sqrt{9-x^2}$ γ. $f(x)=\sqrt{x^2-9}$ δ. $f(x)=-\sqrt{x^2-9}$

(Μονάδες 6)

ΛΥΣΗ

α) Αφού $-2<-1$ και f γνησίως φθίνουσα στο διάστημα $[-3,0]$ είναι $f(-2)>f(-1)$.

Επίσης f άρτια οπότε $f(-2)=f(2)$. Συνεπώς $f(-1)<f(2)$.

β) Η συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα στο διάστημα $[0,3]$, οπότε $f(3)\geq f(x)\geq f(0)$ για κάθε $x\in[0,3]$.

Η συνάρτηση f είναι γνησίως φθίνουσα στο διάστημα $[-3,0]$, οπότε $f(-3)\geq f(x)\geq f(0)$ για κάθε $x\in[0,3]$.

Επίσης f άρτια οπότε $f(-3)=f(3)$.

Συνεπώς $f(3)\geq f(x)\geq f(0)$ για κάθε $x\in[-3,3]$.

γ) Αφού $f(x)\geq f(0)$ για κάθε $x\in[-3,3]$, συμπεραίνουμε ότι η f παρουσιάζει ελάχιστο στο 0, που είναι και η μοναδική θέση ελαχίστου, αφού λόγω μονοτονίας $f(x)>f(0)$ για κάθε $x\in[-3,0)\cup(0,3]$.

Αφού $f(x)\leq f(3)$ για κάθε $x\in[-3,3]$, συμπεραίνουμε ότι η f παρουσιάζει μέγιστο στο 3, όπως και στο -3 αφού $f(-3)=f(3)$, που είναι και οι μοναδικές θέσεις μεγίστου, αφού λόγω μονοτονίας $f(x)<f(3)$ για κάθε $x\in(-3,3)$.

δ) Από τους 4 τύπους μόνο ο α. και ο β. έχουν πεδίο ορισμού το $[-3,3]$.

Επίσης για τον τύπο α. ισχύει $f(0)>f(3)$ οπότε δεν μπορεί να αντιστοιχεί στη συνάρτηση του προβλήματος. Συνεπώς ο σωστός τύπος είναι ο β. $f(x)=-\sqrt{9-x^2}$.

Στο παρακάτω σχήμα φαίνεται η γραφική παράσταση της $f(x)=-\sqrt{9-x^2}$.

1 Μαρτίου 2026 Λυγάτσικας Ζ.

Κεφάλαιο 3

ΤΡΙΓΩΝΟΜΕΤΡΙΑ

3.1 ΤΡΙΓΩΝΟΜΕΤΡΙΚΟΣ ΚΥΚΛΟΣ ΜΟΝΑΔΑ ΜΕΤΡΗΣΗΣ

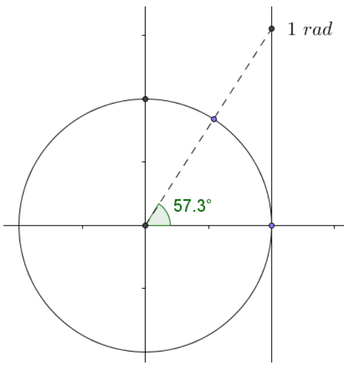
Ορισμός του **τριγωνομετρικού κύκλου** και η αναπαράσταση πάνω σε αυτόν των **τριγωνομετρικών αριθμών**.

Τι είναι το ακτίνιο; Θα κάνουμε ένα βήμα μέσα από τη μετρική γεωμετρία. Έχουμε ένα κύκλο (O, R) και δύο σημεία στη περιφέρεια A και M. Γνωρίζουμε ότι το μήκος ενός τόξου $\overset{\frown}{AM}$ μέτρου α^o δίνεται από τον τύπο

$$L = \frac{\alpha^o \cdot \pi \cdot R}{180^o}$$

Με άλλα λόγια θα μπορooύσαμε να πούμε ότι: το ακτίνιο είναι η γωνία η οποία αν είναι επίκεντρη σε δοθέντα κύκλο ακτίνας R, το μήκος του τόξου $\mathscr{L} = R$.

Ορισμός 3.1.1 *Έστω $\mathscr{C}$ ένας κύκλος $(O, 1)$ και δύο σημεία στη περιφέρεια A και M. Ο πραγματικός αριθμός r που μετρά το μήκος του τόξου $\overset{\frown}{AM}$* ***είναι το μέτρο σε radians της γωνίας*** *$\widehat{AOM}$.*
Για παράδειγμα, π radians είναι το μέτρο της ευθείας γωνίας.
1 radian είναι το μέτρο της γωνίας $\approx 57.3^o$.



3.2 ΤΑΥΤΟΤΗΤΕΣ

3.2.1 Χαρακτηριστικές Τριγωνομετρικές Ταυτότητες

1. $\text{ημ}^2(x) + \text{συν}^2(x) = 1$
2. $\text{εφ}(x) = \dfrac{\text{ημ}(x)}{\text{συν}(x)}$
3. $\text{σφ}(x) = \dfrac{\text{συν}(x)}{\text{ημ}(x)}$
4. $\text{εφ}(x) \cdot \text{σφ}(x) = 1$
5. $\text{συν}^2(x) = \dfrac{1}{1 + \text{εφ}^2(x)}$
6. $\text{ημ}^2(x) = \dfrac{\text{εφ}^2(x)}{1 + \text{εφ}^2(x)}$

3.2.2 Ασκήσεις

1. Αν εφ (a) και εφ (b) είναι ρίζες της εξίσωσης $x^2 - px + q = 0$ και σφ (a) και σφ (b) είναι ρίζες της $x^2 - rx + s = 0$, τότε rs είναι αναγκαστικά:

   Α. pq **Β.** $\dfrac{1}{pq}$ **Γ.** $\dfrac{p}{q^2}$ **Δ.** $\dfrac{q}{p^2}$ **Ε.** $\dfrac{p}{q}$

2. Υποθέστε ότι $\text{ημ}(a) + \text{ημ}(b) = \sqrt{\dfrac{5}{3}}$ και $\text{συν}(a) + \text{συν}(b) = 1$. Ποιο είναι το $\text{συν}(a - b)$;

   Α. $\sqrt{\dfrac{5}{3}} - 1$ **Β.** $\dfrac{1}{3}$ **Γ.** $\dfrac{1}{2}$ **Δ.** συν 23 **Ε.** 1

3. Αν $\text{ημ}(x) + \text{συν}(x) = \dfrac{1}{5}$ και $0 \leq x < \pi$, τότε εφ (x) είναι:

   Α. $\dfrac{3}{4}$ **Β.** $\dfrac{4}{3}$ **Γ.** $-\dfrac{4}{3}$ **Δ.** $-\dfrac{3}{4}$ **Ε.** δεν είναι δυνατός ο υπολογισμός από τα δεδομένα

4. Αν $\text{εφ}(x) = \dfrac{2ab}{a^2 - b^2}$, με $a > b > 0$ και $0^o < x < 90^o$. Τότε το ημ (x) είναι ίσο με:

   Α. $\dfrac{a}{b}$ **Β.** $\dfrac{b}{a}$ **Γ.** $\dfrac{\sqrt{a^2 - b^2}}{ab}$ **Δ.** $\dfrac{\sqrt{a^2 - b^2}}{2ab}$ **Ε.** $\dfrac{2ab}{a^2 + b^2}$

5. Να απλοποιήσετε τις παραστάσεις:

$$\text{συν}^2\alpha(1 + \text{εφ}^2\alpha), \qquad \text{ημ}^2\alpha(1 + \text{σφ}^2\alpha), \qquad \text{εφ}^2\alpha \cdot \text{συν}^2\alpha + \text{σφ}^2\alpha \cdot \text{ημ}^2\alpha$$

6. Ομοίως τις παραστάσεις:

$$\text{εφ}\,\alpha + \frac{\text{συν}\,\alpha}{1 + \text{ημ}\,\alpha} \quad \text{και} \quad \text{σφ}\,\alpha + \frac{\text{ημ}\,\alpha}{1 + \text{συν}\,\alpha}$$

7. Αν στεμ $\alpha := \dfrac{1}{\text{ημ } \alpha}$ και τεμ $\alpha := \dfrac{1}{\text{συν } \alpha}$, να δείξετε ότι:

(α΄) $\text{συν }^2\alpha - \text{ημ }^2\alpha = 1 - 2\text{ημ }^2\alpha = 2\text{συν }^2\alpha - 1$

(β΄) $\dfrac{1-\text{ημ } \alpha}{\text{συν } \alpha} = \dfrac{\text{συν } \alpha}{1+\text{ημ } \alpha}$ και $\dfrac{1-\text{συν } \alpha}{\text{ημ } \alpha} = \dfrac{\text{ημ } \alpha}{1+\text{συν } \alpha}$

(γ΄) $\Big(\text{ημ } \alpha + \text{συν } \alpha\Big)^2 = 1 + 2\text{ημ } \alpha \cdot \text{συν } \alpha$ και $\Big(\text{ημ } \alpha - \text{συν } \alpha\Big)^2 = 1 - 2\text{ημ } \alpha \cdot \text{συν } \alpha$

(δ΄) $\text{ημ }^3\alpha + \text{συν }^3\alpha = (\text{ημ } \alpha + \text{συν } \alpha)(1 - \text{ημ } \alpha \cdot \text{συν } \alpha)$

(ε΄) $\text{ημ }^4\alpha + \text{συν }^4\alpha = 1 - 2\text{ημ }^2\alpha \cdot \text{συν }^2\alpha$ και $\text{ημ }^4\alpha - \text{συν }^4\alpha = 1 - 2\text{ημ }^2\alpha$

(ϛ΄) $\dfrac{1 - 2\text{ημ } \alpha \cdot \text{συν } \alpha}{\text{ημ }^2\alpha - \text{συν }^2\alpha} = \dfrac{\text{ημ } \alpha - \text{συν } \alpha}{\text{ημ } \alpha + \text{συν } \alpha}$

(ζ΄) $\Big(\text{συν } \alpha + \text{ημ } \alpha + 1\Big)\Big(\text{συν } \alpha + \text{ημ } \alpha - 1\Big) = 2\text{ημ } \alpha \cdot \text{συν } \alpha$

(η΄) $\Big(1 + \text{ημ } \alpha + \text{συν } \alpha\Big)^2 = 2(1 + \text{ημ } \alpha)(1 + \text{συν } \alpha)$

(ϑ΄) $1 - \dfrac{\text{συν }^2\alpha}{1 + \text{ημ } \alpha} = \text{ημ } \alpha$

(ι΄) $\text{ημ } \alpha \cdot \text{συν } \alpha \cdot (\text{εφ } \alpha + \text{σφ } \alpha) = 1$

(ια΄) $\dfrac{\text{εφ } \alpha}{1 - \text{σφ } \alpha} + \dfrac{\text{σφ } \alpha}{1 - \text{εφ } \alpha} = \text{τεμ } \alpha \cdot \text{στεμ } \alpha + 1$

(ιβ΄) $3\text{συν }^2\alpha + 2\text{ημ }^2\alpha = \dfrac{3 + 2\text{εφ }^2\alpha}{1 + \text{εφ }^2\alpha}$

(ιγ΄) $\text{συν }^2\alpha - \text{ημ }^2\alpha = \dfrac{1 - \text{εφ }^2\alpha}{1 + \text{εφ }^2\alpha}$ και $\dfrac{\text{τεμ } \alpha}{\text{τεμ } \alpha + 1} + \dfrac{\text{τεμ } \alpha}{\text{τεμ } \alpha - 1} = 2\text{στεμ }^2\alpha$

(ιδ΄) $\text{συν }^2\alpha - \text{συν }^2\beta = \text{ημ }^2\beta - \text{ημ }^2\alpha = \dfrac{1}{1 + \text{εφ }^2\alpha} - \dfrac{1}{1 + \text{εφ }^2\beta}$

(ιε΄) $\text{ημ }^2\alpha \cdot \text{συν }^2\beta - \text{ημ }^2\beta \cdot \text{συν }^2\alpha = \text{ημ }^2\alpha - \text{ημ }^2\beta$

(ιϛ΄) $\dfrac{\text{ημ } \alpha + \text{συν } \beta}{\text{συν } \alpha + \text{ημ } \beta} + \dfrac{\text{συν } \alpha - \text{ημ } \beta}{\text{ημ } \alpha - \text{συν } \beta} = 0$

1 Μαρτίου 2026 Λυγάτσικας Ζ.

3.3 ΑΝΑΓΩΓΗ & ΤΡΙΓΩΝΟΜΕΤΡΙΚΕΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΙΣ

3.3.1 Αναγωγή στο 1ο τεταρτημόριο

(α′) συν $(-x) =$ συν (x)

(β′) ημ $(-x) = -$ημ (x)

(γ′) εφ $(-x) = -$εφ (x)

(δ′) σφ $(-x) = -$σφ (x)

(ε′) συν $(180^o - x) = -$συν (x)

(ϛ′) ημ $(180^o - x) =$ ημ (x)

(ζ′) εφ $(180^o - x) = -$εφ (x)

(η′) σφ $(180^o - x) = -$σφ (x)

(ϑ′) συν $(180^o + x) = -$συν (x)

(ι′) ημ $(180^o + x) = -$ημ (x)

(ια′) εφ $(180^o + x) =$ εφ (x)

(ιβ′) σφ $(180^o + x) =$ σφ (x)

(ιγ′) συν $(90^o - x) =$ ημ (x)

(ιδ′) ημ $(90^o - x) =$ συν (x)

(ιε′) εφ $(90^o - x) = -$σφ (x)

(ιϛ′) σφ $(90^o - x) =$ εφ (x)

3.3.2 Τριγωνομετρικές Συναρτήσεις

Ορισμός 3.3.1 *Έστω f μια συνάρτηση με πεδίο ορισμού A και $T \in \mathbb{R}_{>0}$.*
*Λέμε ότι η f είναι **περιοδική** με περίοδο T αν και μόνο αν ο T είναι ο μικρότερος θετικός αριθμός τέτοιος ώστε*

$$f(x+T) = f(x-T) = f(x)$$

*Ο αριθμός T ονομάζεται **περίοδος** της f.*

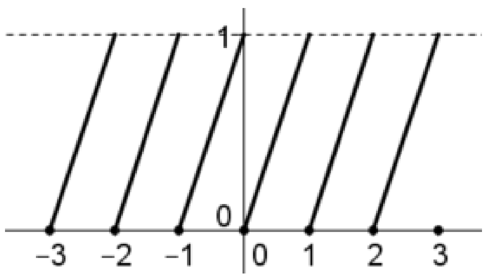
Οι συναρτήσεις $f(x) = r \cdot$ ημ $(\omega x),\ r, \omega \in \mathbb{R}_{>0}$ και $g(x) = r \cdot$ συν $(\omega x),\ r, \omega \in \mathbb{R}_{>0}$, έχουν περίοδο $\boxed{\dfrac{2\pi}{\omega}}$.

Υπάρχουν άλλες περιοδικές συναρτήσεις εκτός των βασικών τριγωνομετρικών; Η απάντηση είναι Ναι. Για παράδειγμα:

Αν με $\lfloor x \rfloor$, $x \in \mathbb{R}$, συμβολίσουμε τον μεγαλύτερο ακέραιο που μικρότερος ή ίσος του x ή

$$\lfloor x \rfloor \leq x < \lfloor x \rfloor + 1$$

τότε η συνάρτηση $f = x - \lfloor x \rfloor$ είναι περιοδική με περίοδο 1.



3.3.3 Ασκήσεις

8. Να βρείτε το άθροισμα των ριζών της $\text{εφ}^2(x) - 9\text{εφ}(x) + 1 = 0$ που είναι μεταξύ των $x = 0$ και $x = 2\pi$.
Α. $\frac{\pi}{2}$ **Β.** π **Γ.** $\frac{3\pi}{2}$ **Δ.** 3π **Ε.** 4π

9. Έστω κυρτό τετράπλευρο $AB\Gamma\Delta$ με $AB = 4$, $B\Gamma = 5$ και $\Gamma\Delta = 20$. Αν οι γωνίες $\widehat{B}$ και $\widehat{\Gamma}$ είναι αμβλείες και $\text{ημ}(\Gamma) = -\text{συν}(B) = \frac{3}{5}$ τότε η πλευρά $A\Delta$ έχει μήκος:
Α. 24 **Β.** 24.5 **Γ.** 24.6 **Δ.** 24.8 **Ε.** 25

10. Να δείξετε ότι:

(α') $\text{συν}\,\alpha + \text{ημ}(270^o + \alpha) + \text{συν}(180^o + \alpha) - \text{ημ}(270^o - \alpha) = 0$

(β') $\text{ημ}(171^o + \alpha - \beta) - \text{ημ}(9^o + \beta - \alpha) = 0$

(γ') $\text{ημ}(203^o + \alpha - \beta) + \text{ημ}(23^o + \alpha - \beta) = 0$

(δ') $\text{εφ}(138^o + 2\alpha - \beta) + \text{σφ}(48^o + 2\alpha - \beta) = 0$

(ε') $\text{ημ}(280^o + \alpha - \beta) + \text{συν}(10^o + \alpha - \beta) = 0$

(ϛ') $\text{ημ}\left(\frac{3\pi}{2} - \alpha\right) \cdot \text{εφ}(\pi - \alpha)$

(ζ') $\dfrac{\text{ημ}(\pi - \alpha) \cdot \text{εφ}\left(\frac{3\pi}{2} + \alpha\right)}{\text{ημ}\left(\frac{\pi}{2}\right) \cdot \text{εφ}(\pi + \alpha)}$

(η') $\dfrac{\text{ημ}(\pi + \alpha) \cdot \text{συν}\left(\frac{3\pi}{2} - \alpha\right) \cdot \text{εφ}\left(\frac{3\pi}{2} + \alpha\right)}{\text{ημ}(2\pi + \alpha)}$

(ϑ') Αν $\alpha + \beta + \gamma = 180^o \Rightarrow \text{συν}(\alpha + \gamma) = -\text{συν}(\beta)$

(ι') Αν $\alpha + \beta + \gamma = 180^o \Rightarrow \text{σφ}(\alpha + \beta) = -\text{σφ}(\gamma)$

(ια') Αν $\alpha + \beta + \gamma = 180^o \Rightarrow \text{ημ}(\alpha) = -\text{ημ}(2\alpha + \beta + \gamma)$

(ιβ') Αν $\alpha + \beta + \gamma = 180^o \Rightarrow \text{συν}(\beta) = -\text{συν}(2\beta + \alpha + \gamma)$

(ιγ') Αν $\alpha + \beta + \gamma = 180^o \Rightarrow \text{εφ}\,\frac{\alpha + \beta}{2} = \text{σφ}\,\frac{\gamma}{2}$

(ιδ') Αν $\alpha + \beta + \gamma = 180^o \Rightarrow \text{συν}\,\frac{\alpha - \gamma}{2} = \text{ημ}\,\frac{\beta + 2\alpha}{2} = \text{ημ}\,\frac{\beta + 2\gamma}{2}$

(ιε') Αν $\alpha + \beta + \gamma = 180^o \Rightarrow \text{εφ}\,\frac{\alpha + \beta - \gamma}{2} = \text{σφ}(\gamma)$

11. Αν $\text{ημ}\,\alpha = \dfrac{\mu^2 - \nu^2}{\mu^2 + \nu^2}$, να ευρεθεί η εφ α όταν $\mu, \nu \in \mathbb{R}^*$.

12. Πόσες διαφορετικές τιμές μπορεί να πάρει η παράσταση $\text{ημ}\,\frac{\kappa\pi}{7}$ όταν $\kappa \in \mathbb{Z}$.

13. Να ευρεθούν οι τριγωνομετρικοί αριθμοί του τόξου 1050^o.

14. Να δείξετε ότι η παράσταση $2(\text{ημ}\,^6x + \text{συν}\,^6x) - 3(\text{ημ}\,^4x + \text{συν}\,^4x)$ είναι ένας σταθερός αριθμός.

15. Δείξτε ότι: $|2\text{ημ}\,x + 3\text{συν}\,y| \leq 5$.

16. Να αποδείξτε ότι $\text{ημ}\,\theta \cdot \text{συν}\,\theta \leq \dfrac{1}{2}$.

17. Να δείξετε ότι $|\text{εφ}\,\theta| + |\text{σφ}\,\theta| = |\text{εφ}\,\theta + \text{σφ}\,\theta|$.

18. Αν $-\dfrac{\pi}{2} < x < \dfrac{\pi}{2}$ να δείξετε ότι: $|\text{συν}\,x| = |\text{συν}\,(-2k\pi + x)|$, $k \in \mathbb{N}$.

19. Να δείξτε ότι: $\text{ημ}\,^2 26^o + \text{ημ}\,^2 34^o + \text{ημ}\,^2 64^o + \text{ημ}\,^2 56^o = 2$.

20. Να απλοποιηθεί η παράσταση

$$B = \frac{\text{ημ}\left(\dfrac{3\pi}{2} - \theta\right) \cdot \text{συν}\left(\dfrac{\pi}{2} + \theta\right) \cdot \text{εφ}\,(2\pi - \theta)}{\text{συν}\left(\dfrac{5\pi}{2} + \theta\right) \cdot \text{σφ}\,(-\theta) \cdot \text{σφ}\left(\dfrac{\pi}{2} + \theta\right)}$$

21. Να δείξτε ότι: $\text{σφ}\,1^o + \text{σφ}\,2^o + \text{σφ}\,3^o + \cdots + \text{σφ}\,179^o = 0$.

22. Να δειχθεί ότι η συνάρτηση $y = \text{εφ}\,\dfrac{7x}{10} + \text{ημ}\,\dfrac{2x}{5}$ είναι περιοδική και να βρεθεί η περίοδος της.

23. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \lambda - 3\text{συν}\,(4x)$, $\lambda \in \mathbb{R}$ της οποίας η ελαχίστη τιμή είναι -5.
    (α′) Να βρείτε το λ.
    (β′) Για τη τιμή του λ που βρήκατε παραπάνω, να βρείτε τον τύπο και στη συνέχεια την περίοδο της συνάρτησης $g(x) = f\left(\dfrac{3x}{8}\right)$.
    (γ′) Να παραστήσετε γραφικά τη συνάρτηση $h(x) = f\left(\dfrac{3\pi}{4} - x\right)$ στο διάστημα $\left[-\dfrac{\pi}{2}, \pi\right]$.

24. Δίνεται η συνάρτηση με τύπο:

$$f(x) = \alpha\frac{1 + \text{συν}\,(2\beta x)}{2} - 2, \qquad x \in [0, 2\pi], \qquad \alpha > 0$$

Αν η περίοδος της είναι $T = \pi$ και έχει μέγιστο στο 3, τότε:

(α′) Να βρείτε τους αριθμούς α και β.

(β′) Να βρείτε το ελάχιστο της f καθώς και τις τιμές του x για τις οποίες η f παίρνει την ελάχιστη τιμή της.

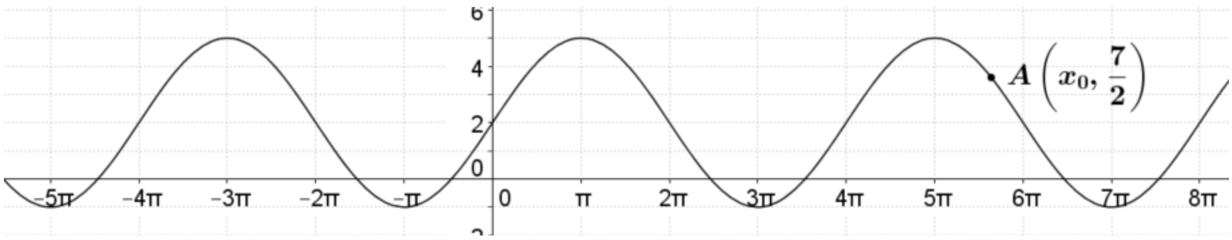
(γ′) Για τις παραπάνω τιμές των α και β να βρείτε τα σημεία τομής της γραφικής παράστασης της f με τον άξονα $y'y$.

25. Να βρεθεί το ελάχιστο της παράστασης $f(x) = \dfrac{9x^2\text{ημ}^2(x)+4}{x\text{ημ}(x)}$, για $0 < x < \pi$.

26. Στο παρακάτω σχήμα δίνεται η γραφική παράσταση μιας συνάρτησης f της μορφής

$$f(x) = \rho \cdot \text{ημ}\,(\omega \cdot x) + k$$

με $\rho,\ k$ πραγματικές σταθερές και $\omega > 0$.



(α′) Με βάση τη γραφική παράσταση, να βρείτε:

i. τη μεγίστη και ελαχίστη τιμή της συνάρτησης f.

ii. την περίοδο T της συνάρτησης f.

(β′) Να προσδιορισθούν οι τιμές των σταθερών $\rho,\ k$ και ω. Να αιτιολογήσετε.

3.4 ΤΡΙΓΩΝΟΜΕΤΡΙΚΟΙ ΑΡΙΘΜΟΙ ΑΘΡΟΙΣΜΑΤΟΣ

3.4.1 Τριγωνομετρικοί αριθμοί αθροίσματος

(α′) $\sigma\upsilon\nu\,(x-y)=\sigma\upsilon\nu\,(x)\sigma\upsilon\nu\,(y)+\eta\mu\,(x)\eta\mu\,(y)$

(β′) $\sigma\upsilon\nu\,(x+y)=\sigma\upsilon\nu\,(x)\sigma\upsilon\nu\,(y)-\eta\mu\,(x)\eta\mu\,(y)$

(γ′) $\eta\mu\,(x+y)=\eta\mu\,(x)\sigma\upsilon\nu\,(y)+\sigma\upsilon\nu\,(x)\eta\mu\,(y)$

(δ′) $\eta\mu\,(x-y)=\eta\mu\,(x)\sigma\upsilon\nu\,(y)-\sigma\upsilon\nu\,(x)\eta\mu\,(y)$

(ε′) $\varepsilon\varphi\,(x+y)=\dfrac{\varepsilon\varphi\,(x)+\varepsilon\varphi\,(y)}{1-\varepsilon\varphi\,(x)\varepsilon\varphi\,(y)}$

(ϛ′) $\varepsilon\varphi\,(x-y)=\dfrac{\varepsilon\varphi\,(x)-\varepsilon\varphi\,(y)}{1+\varepsilon\varphi\,(x)\varepsilon\varphi\,(y)}$

(ζ′) $\sigma\varphi\,(x+y)=\dfrac{\sigma\varphi\,(x)\sigma\varphi\,(y)-1}{\sigma\varphi\,(x)+\sigma\varphi\,(y)}$

(η′) $\sigma\varphi\,(x-y)=\dfrac{\sigma\varphi\,(x)\sigma\varphi\,(y)+1}{\sigma\varphi\,(y)-\sigma\varphi\,(x)}$

(ϑ′) $\eta\mu\,(2x)=2\eta\mu\,(x)\sigma\upsilon\nu\,(x)$

(ι′) $\left\{\begin{array}{lcl}\sigma\upsilon\nu\,(2x) & = & \sigma\upsilon\nu\,^2(x)-\eta\mu\,^2(x)\\ & = & 2\sigma\upsilon\nu\,^2(x)-1\\ & = & 1-2\eta\mu\,^2(x)\end{array}\right.$

(ια′) $\varepsilon\varphi\,(2x)=\dfrac{2\varepsilon\varphi\,(x)}{1-\varepsilon\varphi\,^2(x)}$

(ιβ′) $\eta\mu\,^2(x)=\dfrac{1-\sigma\upsilon\nu\,(2x)}{2}$

(ιγ′) $\sigma\upsilon\nu\,^2(x)=\dfrac{1+\sigma\upsilon\nu\,(2x)}{2}$

(ιδ′) $\varepsilon\varphi\,^2(x)=\dfrac{1-\sigma\upsilon\nu\,(2x)}{1+\sigma\upsilon\nu\,(2x)}$

3.4.2 Ασκήσεις

27. Να δείξετε ότι: $\sigma\upsilon\nu\,^2(\alpha+\beta)+\sigma\upsilon\nu\,^2\beta-2\sigma\upsilon\nu\,(\alpha+\beta)\cdot\sigma\upsilon\nu\,\alpha\cdot\sigma\upsilon\nu\,\beta=\eta\mu\,^2\alpha$.

28. Να δείξετε ότι: $\eta\mu\,^2\alpha+\eta\mu\,^2\beta+2\eta\mu\,\alpha\cdot\eta\mu\,\beta\cdot\sigma\upsilon\nu\,(\alpha+\beta)=\eta\mu\,^2(\alpha+\beta)$.

29. Να δείξετε ότι: $\eta\mu\,(\alpha+\beta)\cdot\eta\mu\,(\alpha-\beta)+\eta\mu\,(\gamma+\alpha)\cdot\eta\mu\,(\gamma-\alpha)+\eta\mu\,(\beta+\gamma)\cdot\eta\mu\,(\beta-\gamma)=0$.

30. Να δείξετε ότι: $\eta\mu\,(\alpha+\beta)\cdot\sigma\upsilon\nu\,(\alpha-\beta)+\eta\mu\,(\alpha-\beta)\cdot\sigma\upsilon\nu\,(\alpha+\beta)=\eta\mu\,2\alpha$.

31. Να αποδείξετε την πρόταση: $(\alpha+\beta+\gamma=\pi)\wedge(\eta\mu\,\alpha=2\eta\mu\,\beta\cdot\sigma\upsilon\nu\,\gamma)\Rightarrow\beta=\gamma$

32. Να δείξετε ότι:

    (α′) $\text{εφ }(45^o+\alpha)-\text{εφ }(45^o-\alpha)=2\text{εφ }2\alpha$

    (β′) $\text{συν }2\alpha=\dfrac{1}{1+\text{εφ }\alpha\cdot\text{εφ }2\alpha}$

    (γ′) $\text{εφ }\alpha=\text{σφ }\alpha-2\text{σφ }2\alpha$

    (δ′) $\text{εφ }78^o=\text{εφ }12^o+2\text{εφ }24^o+4\text{εφ }42^o$

33. Δείξτε ότι $-\sqrt{2}\leq\text{ημ }x+\text{συν }x\leq\sqrt{2}$.

34. Να αποδειχθεί ότι το ημίτονο του αθροίσματος δύο τόξων θετικών και μικρότερων του 90^o, είναι μικρότερο του αθροίσματος των ημιτόνων αυτών.

35. Από την ισότητα $\dfrac{\text{εφ }(\alpha-\beta)}{\text{εφ }\alpha}+\dfrac{\text{ημ }^2\gamma}{\text{ημ }^2\alpha}=1$ να εξαχθεί ότι $\text{εφ }^2\gamma=\text{εφ }\alpha\cdot\text{εφ }\beta$.

36. Να δειχθεί ότι η παράσταση

$$\text{συν }^2x-2\text{συν }x\cdot\text{συν }\alpha\cdot\text{συν }(x+\alpha)+\text{συν }^2(x+\alpha)$$

είναι ανεξάρτητη του x.

37. Να δειχθεί ότι αν $\alpha+\beta=\gamma$, τότε $\text{συν }^2\alpha+\text{συν }^2\beta-2\text{συν }\alpha\cdot\text{συν }\beta\cdot\text{συν }\gamma=\text{ημ }^2\gamma$.

38. Να δειχθεί ότι η παράσταση $\text{συν }^2x+\text{συν }^2(120^o+x)+\text{συν }^2(120^o-x)$ είναι ανεξάρτητη της μεταβλητής x.

39. Να απλοποιηθεί η παράσταση $3-4\text{συν }2x+\text{συν }4x$.

40. Να επαληθευθεί η ισότητα $\left(\text{σφ }\dfrac{\alpha}{2}-\text{εφ }\dfrac{\alpha}{2}\right)^2=\dfrac{1}{1-2\text{εφ }\alpha\cdot\text{σφ }2\alpha}$.

41. $(*)$ Να ευρεθεί η τιμή της παράστασης: $\text{εφ }2\alpha\cdot(1-\text{ημ }2\alpha)$, όταν $\alpha=45^o$.

42. (α′) Δείξτε ότι $\forall x,y\in\mathbb{R}^*$ ισχύει $\left(\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}\right)xy=x+y$.

    (β′) Αν $\text{εφ }(x)+\text{εφ }(y)=25$ και $\text{σφ }(x)+\text{σφ }(y)=30$, να βρεθεί το $\text{εφ }(x+y)$.

43. Απλοποιήστε τη παράσταση: $\text{ημ }(x-y)\text{συν }(y)+\text{συν }(x-y)\text{ημ }(y)$
Α. 1 **Β.** $\text{ημ }(x)$ **Γ.** $\text{συν }(x)$ **Δ.** $\text{ημ }(x)\text{συν }(2y)$ **Ε.** $\text{συν }(x)\text{συν }(2y)$

44. Αν θ είναι μια οξεία γωνία και $\text{ημ }\dfrac{\theta}{2}=\sqrt{\dfrac{x-1}{2x}}$, τότε $\text{εφ }(\theta)$ είναι ίσο με:
Α. x **Β.** $\dfrac{1}{x}$ **Γ.** $\dfrac{\sqrt{x-1}}{x+1}$ **Δ.** $\dfrac{\sqrt{x^2-1}}{x}$ **Ε.** $\sqrt{x^2-1}$

45. Αν ϕ είναι μια οξεία γωνία και $\text{ημ }(2\phi)=a$, τότε $\text{ημ }(\phi)+\text{συν }(\phi)$ είναι:
Α. $\sqrt{a+1}$ **Β.** $(\sqrt{2}-1)a+1$ **Γ.** $\sqrt{a+1}-\sqrt{a^2-a}$ **Δ.** $\sqrt{a+1}+\sqrt{a^2-a}$ **Ε.** $\sqrt{a+1}+a^2-a$

1 Μαρτίου 2026 Λυγάτσικας Ζ.

3.5 ΤΡΙΓΩΝΟΜΕΤΡΙΚΕΣ ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ

3.5.1 Ασκήσεις

46. Να λυθεί η εξίσωση: $\text{συν}\, x = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

47. Να λυθεί η εξίσωση: $\text{ημ}\, x = -\dfrac{\sqrt{6}}{2}$.

48. Να λυθεί η εξίσωση: $(1 - \text{ημ}\, x)(2\text{ημ}\, x - \sqrt{3}) = 0$.

49. Να λυθεί η εξίσωση: $(1 - \text{ημ}\, x)(2\text{ημ}\, x - \dfrac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{4}) = 0$.

50. Να λυθεί η εξίσωση: $\text{ημ}\,(5x + 80^o) = \text{ημ}\,(3x - 40^o)$.

51. Να λυθούν οι εξισώσεις:

    (α′) $\text{ημ}\,(2x + 12^o) + \text{συν}\, 5x = 0$.

    (β′) $\text{εφ}\left(3x - \dfrac{\pi}{3}\right) + \text{σφ}\left(x - \dfrac{\pi}{6}\right)$.

    (γ′) $2\text{συν}\,^2 x + \sqrt{3} \cdot \text{ημ}\, x + 1 = 0$.

52. Να λυθεί η εξίσωση: $4\text{ημ}\,^2 x - 2(1 + \sqrt{3})\text{ημ}\, x + \sqrt{3} = 0$.

53. Να λυθεί η εξίσωση: $\dfrac{1}{1 + \text{εφ}\,^2 x} + \text{ημ}\,^2 x - 2\text{συν}\, x = 0$.

54. Να λυθεί η εξίσωση: $(\sqrt{3} - 1)\text{συν}\,^2 x - (1 + \sqrt{3})\text{ημ}\, x \cdot \text{συν}\, x + 1 = 0$.

55. Να βρεθεί η συνθήκη που πρέπει να ικανοποιούν τα α, β και γ έτσι ώστε η εξίσωση $\alpha\text{ημ}\, x + \beta\text{συν}\, x = \gamma$ να έχει λύση.

56. Να λυθεί η εξίσωση: $\sqrt{3} \cdot \text{ημ}\, x + \text{συν}\, x = 1$.

57. Να λυθούν οι εξισώσεις:

    (α′) $-\text{ημ}\, x + \text{συν}\, x = 1$.

    (β′) $\lambda\text{ημ}\, x - (\lambda + 1)\text{συν}\, x = \lambda$, διερεύνηση ως προς λ.

58. (♣) Να λυθεί η εξίσωση: $\text{ημ}\,^3 x + \text{συν}\,^3 x = 1$.

59. Να λυθούν οι εξισώσεις:

    (α′) $\text{ημ}\, x + \text{συν}\, x + \text{ημ}\, x \cdot \text{συν}\, x + 1 = 0$.

    (β′) $\lambda(\text{ημ}\, x + \text{συν}\, x) = \text{ημ}\, x \cdot \text{συν}\, x$, διερεύνηση ως προς λ.

(γ΄) $\text{ημ}\, x \cdot \text{συν}\, x - \text{ημ}\, x + \text{συν}\, x - 1 = 0$

60. Να λυθεί η εξίσωση: $3\text{ημ}\, x - x = 0$.

61. Να λυθούν οι εξισώσεις:

(α΄) $4\text{συν}\,^2 x - 3x - 2 = 0$.

(β΄) $\text{συν}\, x = x(\text{ημ}\, x + \text{συν}\, x)$.

62. (♣) Να λυθεί η εξίσωση: $\text{ημ}\, \Big(\pi \cdot \text{συν}\, x\Big) = \text{συν}\, \Big(\pi \cdot \text{ημ}\, x\Big)$.

63. (α΄) Να λυθεί η εξίσωση: $2y^2 + y - 1 = 0$

(β΄) Να λυθεί η εξίσωση: $2\text{ημ}\,^2 x + \text{ημ}\, x - 1 = 0$.

64. (♣♣)

(α΄) Έστω $p(x) = \alpha x^2 + \beta x + \gamma$. Υποθέστε ότι $\Delta = \beta^2 - 4\alpha\gamma \geq 0$. Τότε δείξτε ότι η εξίσωση $p(x) = 0$:

i. έχει μόνο μια ρίζα στο διάστημα $[-1, 1]$, αν $p(-1)p(1) < 0$.

ii. έχει ρίζα το -1 και η άλλη είναι μέσα στο $(-1, 1]$, η οποία φυσικά είναι ίση με $-\dfrac{\gamma}{\alpha}$, αν $\alpha - \beta + \gamma = 0$ και $\gamma^2 < \alpha^2$.

iii. έχει ρίζα το -1 και η άλλη είναι εκτός του διαστήματος $(-1, 1]$, αν $\alpha - \beta + \gamma = 0$ και $\gamma^2 > \alpha^2$.

iv. έχει δύο ριζές μέσα στο $[-1, 1]$ αν $\alpha \cdot p(1) > 0$ και $\alpha \cdot p(-1) > 0$.

v. έχει μια ρίζα στο $[-1, 1]$ και η άλλη εκτός, αν ή $\alpha \cdot p(-1) > 0$ και $\alpha \cdot p(1) < 0$ ή $\alpha \cdot p(-1) < 0$ και $\alpha \cdot p(1) > 0$.

(β΄) Να λυθεί και να διερευνηθεί η εξίσωση:

$$\mu\text{ημ}\,^2 x - 2(\mu - 2)\text{ημ}\, x + \mu + 2 = 0$$

Υπόδειξη:

(α΄) i. Είναι προφανές ότι αν $\rho_1 < \rho_2$ οι δύο ρίζες τότε αν $-1 < \rho_1 < 1 < \rho_2$ ή $\rho_1 < -1 < \rho_2 < 1$, το $p(-1)$ και $p(1)$ έχουν αντίθετα πρόσημα, $p(-1)p(1) < 0$.

ii. Αν $p(-1) = 0$, τότε $\alpha - \beta + \gamma = 0$. Για την άλλη ρίζα ρ ισχύει ότι $\rho = \dfrac{\gamma}{\alpha}$ και $-1 < \dfrac{\gamma}{\alpha} < 1 \Leftrightarrow \left|\dfrac{\gamma}{\alpha}\right| < 1 \Leftrightarrow \gamma^2 < \alpha^2$.

iii. Όπως και η προηγούμενη ερώτηση.

iv. Αν έχει δύο ρίζες $\rho_1 < \rho_2$ μέσα στο $[-1, 1]$ ή $[-1, 1] \cap (\rho_1, \rho_2) = \emptyset$ τότε $p(1)$ και $p(-1)$ είναι ομόσημα του α.

(β΄) Έστω $p(x) = \mu x^2 - 2(\mu - 2)x + \mu + 2$

μ		-1		0		$\frac{1}{2}$		$\frac{2}{3}$		1		2	
Διακρίνουσα	$+$		$+$		$+$		$+$	0	$-$		$-$		$-$
$\alpha = \mu$	$-$		$-$		$+$		$+$		$+$		$+$		$+$
p(1)	$+$		$+$		$+$		$+$		$+$		$+$		$+$
p(-1)	$-$		$-$		$-$	0	$+$		$+$		$+$		$+$
$\gamma^2 - \alpha^2$	$-$		$+$		$+$		$+$		$+$		$+$		$+$
$\alpha \mathbf{p}(1)$	$-$		$-$		$+$		$+$		$+$		$+$		$+$
$\alpha p(-1)$	$+$		$+$		$-$		$+$		$+$		$+$		$+$
$\mathbf{p}(1)\mathbf{p}(-1)$	$-$		$-$		$-$		$+$		$+$		$+$		$+$

Σχήμα 3.1: Άσκηση 64β΄.

- Η διακρίνουσα είναι $-3\mu + 2$ με $-3\mu + 2 > 0$ για $\mu \in \left(-\infty, \frac{2}{3}\right)$.
- $p(1) = 6 > 0$, $p(-1) = 4\mu - 2 > 0$ για $\mu \in \left(\frac{1}{2}, \infty\right)$. Επίσης, $p(-1) = 4\mu - 2 = 0 \Leftrightarrow \mu = \frac{1}{2}$.
- $\alpha p(1) > 0$ αν $\mu \in (0, \infty)$.
- $\alpha p(-1) > 0$ αν $(-\infty, 0) \bigcup \left(\frac{1}{2}, \infty\right)$
- $p(1)p(-1) > 0$ αν $\mu \in \left(\frac{1}{2}, \infty\right)$.

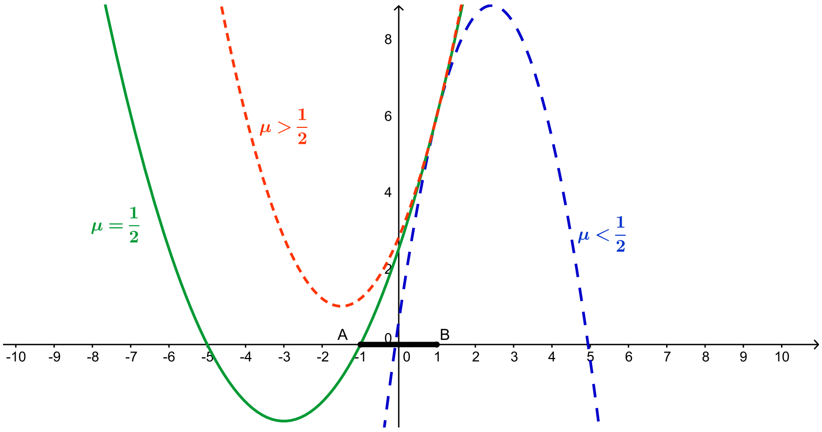
Άρα, η αρχική εξίσωση έχει μια ρίζα ημ $x = -1$ αν $\mu = \frac{1}{2}$ με την άλλη του ρίζα εκτός, αφού η άλλη ρίζα του $p(x) = 0$ για $\mu = \frac{1}{2}$ ικανοποιεί την $\gamma^2 - \alpha^2 > 0$.

Για $\mu < \frac{1}{2}$ το $p(x) = 0$ έχει μια ρίζα στο $[-1, 1]$ αφού $p(1)p(-1) < 0$. Και συνεπώς και η αρχική εξίσωση.

Για $\frac{1}{2} < \mu < \frac{2}{3}$ το $p(x) = 0$ πιθανόν να έχει δύο ρίζες στο $(-1, 1)$ ή καμμία, αφού $\alpha p(1) > 0$ και $\alpha p(-1) > 0$. Για να το δούμε ας υπολογίσουμε τη διαφορά του μέσου του διαστήματος των δύο πραγματικών ριζών με το -1, που είναι το $(\rho_1 + \rho_2) - (-1) = \frac{\mu - 2 + \mu}{\mu} = \frac{2(\mu - 1)}{\mu}$, το οποίο είναι αρνητικό για $\frac{1}{2} < \mu < \frac{2}{3}$. Άρα, η αρχική εξίσωση δεν έχει ρίζες στο διάστημα αυτό.

Συμπέρασμα, η αρχική εξίσωση έχει μια ρίζα για $\mu \leq \frac{1}{2}$.

■



Σχήμα 3.2: Άσκηση 64β΄.

65. Να λυθεί η ομογενής εξίσωση:

$$2\text{ημ}^2 x + 2\sqrt{3}\Big(\text{ημ } x \cdot \text{συν } x\Big) = 3$$

66. (♣) Να δειχθεί ότι το σύστημα των δύο εξισώσεων:

$$b(b^2 - a^2 - 1)\text{συν }(x) + a(2b^2 - 1)\text{ημ }(x) = ab \quad (1)$$

$$b(2a^2 - 1)\text{συν }(x) + a(a^2 - b^2 - 1)\text{ημ }(x) = ab \quad (2)$$

έχει λύση όταν a και b είναι τα ημ και συν της ίδιας γωνίας ω αντίστοιχα. Να ορισθούν οι λύσεις αυτές

67. (♣♣♣) Δείξτε ότι δεν υπάρχει τόξο x έτσι ώστε:

$$\text{συν }\Big(\text{ημ }(x)\Big) = \text{ημ }\Big(\text{συν }(x)\Big).$$

68. Αν ημ $(2x)$ημ $(3x)$ = συν $(2x)$συν $(3x)$, τότε μια τιμή του x είναι:
Α. 18^0 **Β.** 30^o **Γ.** 36^o **Δ.** 45^o **Ε.** 60^o

69. Αν ημ $(x) = 3$συν (x), τότε το ημ (x)συν (x) είναι:
Α. $1/6$ **Β.** $1/5$ **Γ.** $2/9$ **Δ.** $1/4$ **Ε.** $3/10$

70. Υποθέστε ότι συν $(x) = 0$ και συν $(x+z) = \frac{1}{2}$. Ποια είναι η μικρότερη πιθανή θετική τιμή του z;
Α. $\frac{\pi}{6}$ **Β.** $\frac{\pi}{3}$ **Γ.** $\frac{\pi}{2}$ **Δ.** $\frac{5\pi}{6}$ **Ε.** $\frac{7\pi}{6}$

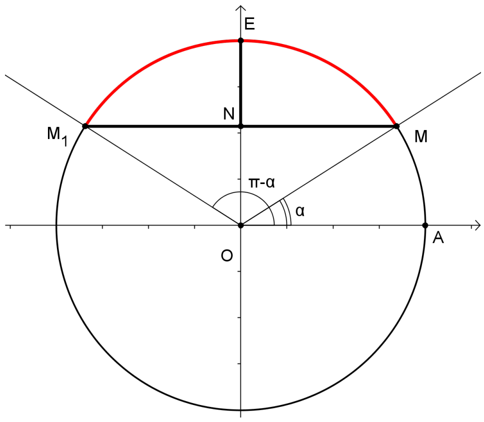
71. Να βρείτε το άθροισμα των ριζών της εφ $^2(x) - 9$εφ $(x) + 1 = 0$ που βρίσκονται στο διάστημα $(0, 2\pi)$.
Α. $\frac{\pi}{2}$ **Β.** π **Γ.** $\frac{3\pi}{2}$ **Δ.** 3π **Ε.** 4π

72. Πόσες ρίζες έχει η εξίσωση $f(x) =$ συν $(\ln(x))$ στο διάστημα $0 < x < 1$;
Α. 0 **Β.** 1 **Γ.** 2 **Δ.** 10 **Ε.** άπειρες

3.6 ΤΡΙΓΩΝΟΜΕΤΡΙΚΕΣ ΑΝΙΣΩΣΕΙΣ

3.6.1 Ασκήσεις

73. Να λυθεί η ανίσωση: ημ $x >$ ημ α.
Υπόδειξη: Γενικά: $\alpha + 2\kappa\pi < x < \pi - \alpha + 2\kappa\pi, \quad \kappa \in \mathbb{Z}$.



Από το σχήμα η ανισότητα αληθεύει αν

$$\alpha < x < \pi - a$$

■

74. Να μελετηθεί το πρόσημο στο $[0, 2\pi]$ και μετά στο $[-\pi, \pi]$ των

(α΄) $1 - 2$ημ (x)

(β΄) 2συν $(x) - 1$

Λύση:

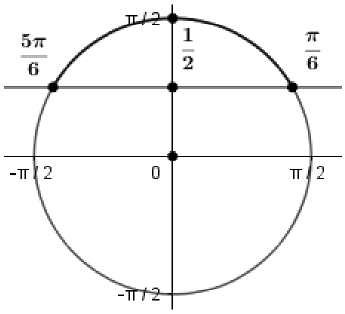
(α΄) $1 - 2\text{ημ}\,(x) > 0 \Leftrightarrow 2\text{ημ}\,(x) < 1 \Leftrightarrow \text{ημ}\,(x) < \dfrac{1}{2}$

Άρα στο $[0, 2\pi]$,

$\mathbf{1 - 2}$ημ $\mathbf{(x) < 0}$ στο $\left(\dfrac{\pi}{6}, \dfrac{5\pi}{6}\right)$,

$\mathbf{1 - 2}$ημ $\mathbf{(x) > 0}$ στο $\left[0, \dfrac{\pi}{6}\right) \cup \left(\dfrac{5\pi}{6}, 2\pi\right]$,

$\mathbf{1 - 2}$ημ $\mathbf{(x) = 0}$ όταν $x = \dfrac{\pi}{6} \vee \dfrac{5\pi}{6}$



Επίσης στο, $[-\pi, \pi]$

$\mathbf{1 - 2}$ημ $\mathbf{(x) < 0}$ στο $\left(\dfrac{\pi}{6}, \dfrac{5\pi}{6}\right)$,

$\mathbf{1-2}$ημ $(\mathbf{x}) > \mathbf{0}$ στο $\left[-\pi, \dfrac{\pi}{6}\right) \cup \left(\dfrac{5\pi}{6}, \pi\right]$,

$\mathbf{1-2}$ημ $(\mathbf{x}) = \mathbf{0}$ όταν $x = \dfrac{\pi}{6} \vee \dfrac{5\pi}{6}$

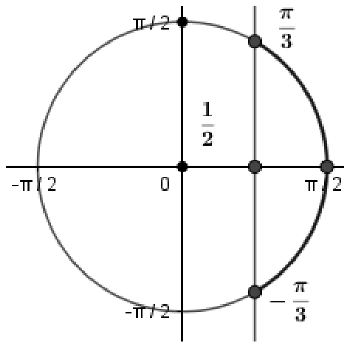
(β′) 2συν $(x) - 1 > 0 \Leftrightarrow 2$συν $(x) > 1 \Leftrightarrow$ συν $(x) > \dfrac{1}{2}$

Άρα στο $[0, 2\pi]$,

$\mathbf{2}$συν $(\mathbf{x}) - \mathbf{1} < \mathbf{0}$ στο $\left(\dfrac{\pi}{3}, \dfrac{5\pi}{3}\right)$,

$\mathbf{2}$συν $(\mathbf{x}) - \mathbf{1} > \mathbf{0}$ στο $\left[0, \dfrac{\pi}{3}\right) \cup \left(5\dfrac{\pi}{3}, 2\pi\right]$,

$\mathbf{2}$συν $(\mathbf{x}) - \mathbf{1} = \mathbf{0}$ για $x = \dfrac{\pi}{3} \vee \dfrac{5\pi}{3}$.



Επίσης στο $[-\pi, \pi]$,

$\mathbf{2}$συν $(\mathbf{x}) - \mathbf{1} < \mathbf{0}$ στο $\left[-\pi, -\dfrac{\pi}{3}\right) \cup \left(\dfrac{\pi}{3}, \pi\right]$,

$\mathbf{2}$συν $(\mathbf{x}) - \mathbf{1} > \mathbf{0}$ στο $\left(-\dfrac{\pi}{3}, \dfrac{\pi}{3}\right)$,

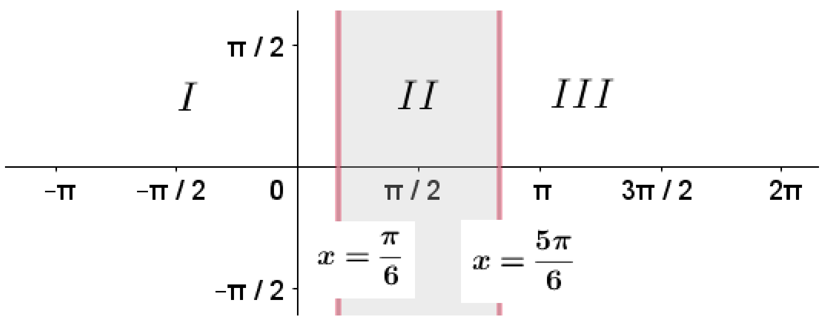
$\mathbf{2}$συν $(\mathbf{x}) - \mathbf{1} = \mathbf{0}$ για $x = -\dfrac{\pi}{3} \vee \dfrac{\pi}{3}$.

■

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ: Το ίδιο αποτέλεσμα μπορούμε να πάρουμε και με άλλο εργαλείο. Ας πάρουμε τη συνάρτηση $f(x) = 1 - 2$ημ (x). Η συνάρτηση μηδενίζεται για

$$f(x) = 0 \Leftrightarrow 1 - 2\text{ημ}\ (x) = 0 \Leftrightarrow \text{ημ}\ (x) = \text{ημ}\ \left(\frac{\pi}{6}\right)$$

Τότε έχουμε μέσα στο $[-\pi, 2\pi]$ δύο τιμές της μεταβλητής x:
$x = \dfrac{\pi}{6}$ ή $x = \pi - \dfrac{\pi}{6} = \dfrac{5\pi}{6}$. Έτσι στο καρτεσιανό συστημα δημιουργούνται 3 τομείς με διαφορετικό πρόσημο για τη συνάρτηση f.



Στη περιοχή I το πρόσημο της συνάρτησης θα είναι το πρόσημο του $f(0) = 1 > 0$, στη περιοχή II το πρόσημο του $f\left(\dfrac{\pi}{2}\right) = -1 < 0$ και στη περιοχή III το πρόσημο της $f(\pi) = 1 > 0$ και στο

διάστημα $[-\pi, 2\pi]$.
Άρα στο $[0, 2\pi]$,
$\mathbf{1-2}$ημ $\mathbf{(x) < 0}$ στο $\left(\frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{6}\right)$,
$\mathbf{1-2}$ημ $\mathbf{(x) > 0}$ στο $\left[0, \frac{\pi}{6}\right) \cup \left(\frac{5\pi}{6}, 2\pi\right]$,
$\mathbf{1-2}$ημ $\mathbf{(x) = 0}$ όταν $x = \frac{\pi}{6} \vee \frac{5\pi}{6}$

Επίσης στο, $[-\pi, \pi]$
$\mathbf{1-2}$ημ $\mathbf{(x) < 0}$ στο $\left(\frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{6}\right)$,
$\mathbf{1-2}$ημ $\mathbf{(x) > 0}$ στο $\left[-\pi, \frac{\pi}{6}\right) \cup \left(\frac{5\pi}{6}, \pi\right]$,
$\mathbf{1-2}$ημ $\mathbf{(x) = 0}$ όταν $x = \frac{\pi}{6} \vee \frac{5\pi}{6}$. Το εργαλείο αυτό θα μας είναι χρήσιμο στην επόμενη άσκηση.

75. Έστω S είναι το σύνολο όλων των σημείων (x, y) στο σύστημα συντεταγμένων έτσι ώστε $0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}$ και $0 \leq y \leq \frac{\pi}{2}$. Ποιο είναι το εμβαδόν του υποσυνόλου S για το οποίο

$$\text{ημ}^2(x) - \text{ημ}(x) \cdot \text{ημ}(y) + \text{ημ}^2(y) \leq \frac{3}{4}$$

Α. $\frac{\pi^2}{9}$ **Β.** $\frac{\pi^2}{8}$ **Γ.** $\frac{\pi^2}{6}$ **Δ.** $\frac{3\pi^2}{16}$ **Ε.** $\frac{2\pi^2}{9}$

Απάντηση: Για μια συγκεκριμένη τιμή του y οι τιμές του ημ (x) είναι οι λύσεις της δευτεροβάθμιας εξίσωσης

$$\text{ημ}^2(x) - \text{ημ}(x) \cdot \text{ημ}(y) + \text{ημ}^2(y) = \frac{3}{4}$$

Δηλαδή:

$$\text{ημ}(x) = \frac{\text{ημ}(y) \pm \sqrt{\text{ημ}^2(y) - 4\left(\text{ημ}^2(y) - \frac{3}{4}\right)}}{2} = \frac{1}{2}\text{ημ}(y) \pm \frac{\sqrt{3}}{2}\text{συν}(y)$$

Επειδή συν $\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{2}$ και ημ $\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}$συν (y), έχουμε:

$$\text{ημ}(x) = \text{συν}\left(\frac{\pi}{3}\right)\text{ημ}(y) \pm \text{ημ}\left(\frac{\pi}{3}\right)\text{συν}(y) = \text{ημ}\left(y \pm \frac{\pi}{3}\right)$$

Για να ανήκουν στο S πρέπει ημ $(x) =$ ημ $\left(y - \frac{\pi}{3}\right) \Leftrightarrow x = y - \frac{\pi}{3}$. Επίσης, από τη δεύτερη

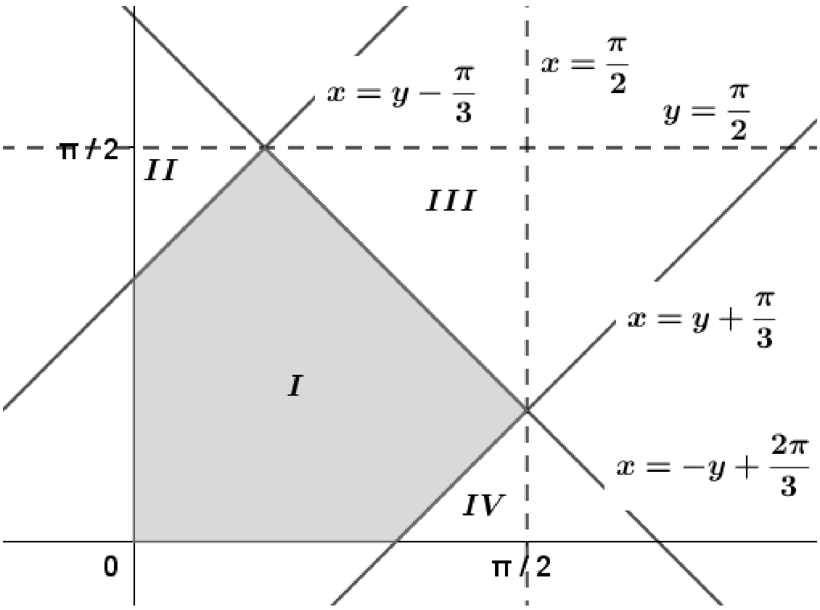
$$\text{ημ}(x) = \text{ημ}\left(y + \frac{\pi}{3}\right) \Leftrightarrow \begin{cases} x = y + \frac{\pi}{3} & , \quad y \leq \frac{\pi}{6} \\ x = \pi - (y + \frac{\pi}{3}) \Rightarrow x = -y + \frac{2\pi}{3} & , \quad y \geq \frac{\pi}{6} \end{cases}$$

Οι 3 ευθείες χωρίζουν την επιφάνεια S σε 4 τομείς. Εξετάζουμε ποιος από τους τομείς ικανοποιεί την αρχική ανίσωση τεστάροντας την ανίσωση με τις τιμές

$$(x, y) = (0,0) \vee \left(\frac{\pi}{2}, 0\right) \vee \left(0, \frac{\pi}{2}\right) \vee \left(\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$$

Βλέποπυμε ότι είναι το σκιασμένο μέρος. Συγκεκριμένα: Αν $f(x, y)$ είναι το πολυώνυμο, τότε: $f(0,0) < 0$ και $f\left(\frac{\pi}{2}, 0\right) = f\left(0, \frac{\pi}{2}\right) = f\left(\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) = \frac{1}{4} > 0$. Άρα, το εμβαδόν είναι:

$$\left(\frac{\pi}{2}\right)^2 - \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{\pi}{3}\right)^2 - 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{\pi}{6}\right)^2 = \frac{\pi^2}{6}$$



∎

3.7 ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΤΡΑΠΕΖΑΣ ΘΕΜΑΤΩΝ - 2022

1. **4^o ΘΕΜΑ** #15992.

Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x) = \rho\, \eta\mu x$, $g(x) = \eta\mu(\omega x)$, όπου $\rho, \omega > 0$.

α) Να βρεθούν οι τιμές των ρ, ω, αν είναι γνωστό ότι η ελάχιστη τιμή της f είναι -2 και η περίοδος της g είναι π. Να αιτιολογήσετε τις απαντήσεις σας.

(Μονάδες 6)

β)

i. Να κάνετε, στο ίδιο σύστημα αξόνων, τις γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων $f(x) = 2\eta\mu x, x \in [0,\pi]$ και $g(x) = \eta\mu(2x), x \in [0,\pi]$.

(Μονάδες 10)

ii. Χρησιμοποιώντας τις παραπάνω γραφικές παραστάσεις των δύο συναρτήσεων ή με οποιονδήποτε άλλο τρόπο, να αποδείξετε ότι $2\eta\mu\frac{5\pi}{9} > \eta\mu\frac{10\pi}{9}$.

(Μονάδες 9)

ΛΥΣΗ

α) Το ρ καθορίζει τη μέγιστη τιμή της συνάρτησης f, που είναι ίση με ρ και την ελάχιστη τιμή της, που είναι ίση με $-\rho$. Άρα $\rho = 2$.

Το ω καθορίζει την περίοδο της συνάρτησης g, που είναι ίση με $\frac{2\pi}{\omega}$.

Άρα $\frac{2\pi}{\omega} = \pi \Leftrightarrow \omega = 2$.

β)

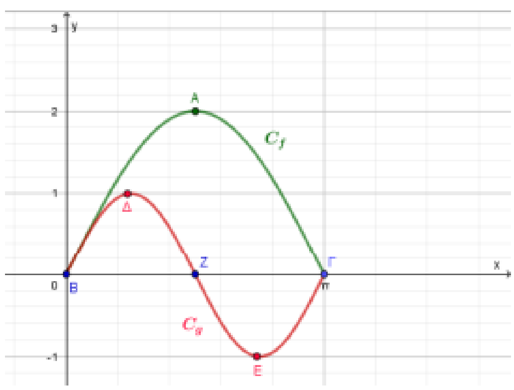
i. Για τη συνάρτηση $f(x) = 2\eta\mu x$, με $x \in [0,\pi]$, είναι:

x	0	$\frac{\pi}{2}$	π
$f(x) = 2\eta\mu x$	0	2	0

Για τη συνάρτηση $g(x) = \eta\mu(2x)$, με $x \in [0,\pi]$, είναι:

x	0	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{3\pi}{4}$	π
$2x$	0	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π
$g(x) = \eta\mu(2x)$	0	1	0	-1	0

Οι γραφικές παραστάσεις των δύο συναρτήσεων, είναι:



ii. Η ζητούμενη ανισότητα γράφεται ισοδύναμα

$$2\eta\mu\frac{5\pi}{9} > \eta\mu\frac{10\pi}{9} \Leftrightarrow 2\eta\mu\frac{5\pi}{9} > \eta\mu\left(2\cdot\frac{5\pi}{9}\right) \Leftrightarrow f\left(\frac{5\pi}{9}\right) > g\left(\frac{5\pi}{9}\right)$$

Είναι: $\frac{\pi}{2} < \frac{5\pi}{9} < \pi$.

Επομένως, από τις γραφικές παραστάσεις των δύο συναρτήσεων προκύπτει ότι

$$f\left(\frac{5\pi}{9}\right) > 0 \text{ και } g\left(\frac{5\pi}{9}\right) < 0.$$

Ως εκ τούτου είναι $f\left(\frac{5\pi}{9}\right) > g\left(\frac{5\pi}{9}\right)$.

2. 4^o ΘΕΜΑ #15287. Να γίνει με Θ. Bolzano.

Στο παρακάτω σχήμα δίνεται η ευθεία $y=\alpha x$, $\alpha\in\mathbb{R}, x\in\mathbb{R}$ και η γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x)=\rho\eta\mu(\omega x)$, όπου $\omega>0$, $\rho>0$ και $x\in\mathbb{R}$. Με βάση το σχήμα,

α) Να δείξετε ότι $\rho=3$ και $\omega=2$.

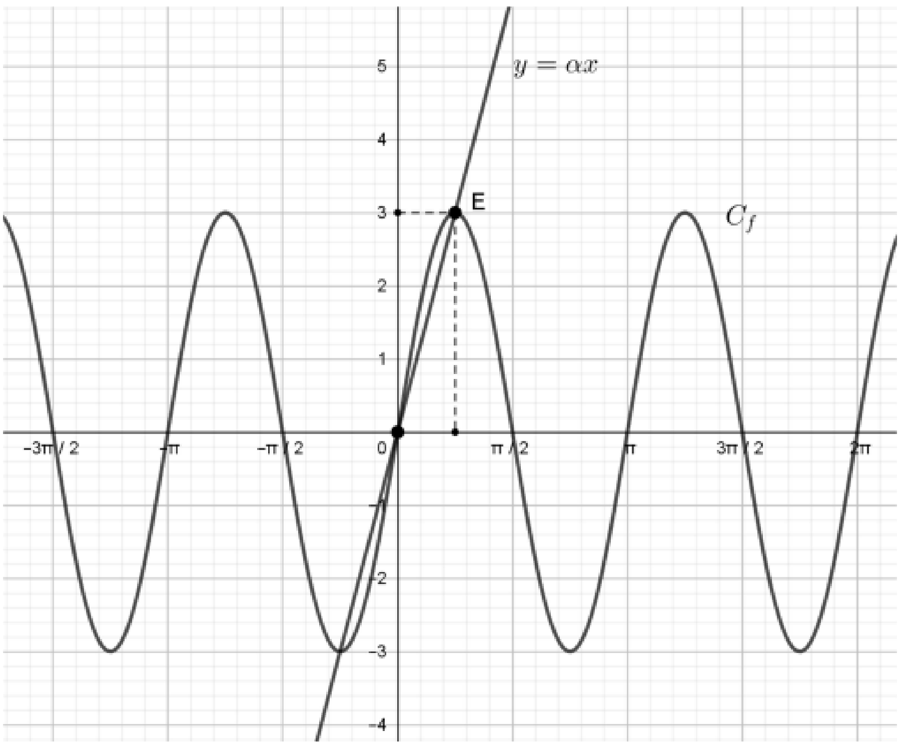
(Μονάδες 6)

β) Να βρείτε τον πραγματικό αριθμό α.

(Μονάδες 9)

γ) Να βρείτε τις λύσεις της εξίσωσης $3\eta\mu(2x)-\frac{12}{\pi}x=0$.

(Μονάδες 10)



ΛΥΣΗ

α) Η συνάρτηση $f(x)=\rho\eta\mu(\omega x)$ με $\rho>0$, έχει μέγιστη τιμή ρ. Με βάση το σχήμα η συνάρτηση έχει μέγιστη τιμή 3, άρα $\rho=3$. Επίσης η περίοδος της συνάρτησης είναι π, οπότε $\pi=\frac{2\pi}{\omega}\Leftrightarrow\omega=2$. Άρα $f(x)=3\eta\mu(2x)$.

β) Η ευθεία $y=\alpha x$ διέρχεται από το σημείο Ε της γραφικής παράστασης της f που έχει τεταγμένη 3, η οποία είναι η μέγιστη τιμή της συνάρτησης. Η συνάρτηση $f(x)=3\eta\mu(2x)$ παρουσιάζει μέγιστη τιμή σε διάστημα μιας περιόδου στο $\frac{1}{4}$ της περιόδου, δηλαδή στη θέση $x=\frac{\pi}{4}$. Άρα είναι $\mathrm{E}\left(\frac{\pi}{4},3\right)$ και $3=\alpha\cdot\frac{\pi}{4}\Leftrightarrow\alpha=\frac{12}{\pi}$. Οπότε η εξίσωση της ευθείας είναι : $y=\frac{12}{\pi}x$.

γ) Η εξίσωση $3\eta\mu(2x)-\frac{12}{\pi}x=0$ γράφεται ισοδύναμα $3\eta\mu(2x)=\frac{12}{\pi}x$. Οι λύσεις της εξίσωσης είναι οι τετμημένες των σημείων τομής της γραφικής παράστασης της $f(x)=3\eta\mu(2x)$ με την ευθεία $y=\frac{12}{\pi}x$. Με βάση το σχήμα τα σημεία τομής είναι 3, οι τετμημένες των οποίων είναι

- $x=0$, δεδομένου ότι $f(0)=3\eta\mu 0=0$ και η ευθεία $y=\frac{12}{\pi}x$ διέρχεται από το σημείο $(0,0)$.
- $x=\frac{\pi}{4}$, δεδομένου ότι $f(\frac{\pi}{4})=3\eta\mu\left(2\cdot\frac{\pi}{4}\right)=3\eta\mu\left(\frac{\pi}{2}\right)=3\cdot 1=3$ και η ευθεία $y=\frac{12}{\pi}x$ διέρχεται από το σημείο $\left(\frac{\pi}{4},\frac{12}{\pi}\cdot\frac{\pi}{4}\right)=\left(\frac{\pi}{4},3\right)$ και
- $x=-\frac{\pi}{4}$, δεδομένου ότι $f(-\frac{\pi}{4})=3\eta\mu\left(-2\cdot\frac{\pi}{4}\right)=3\eta\mu\left(-\frac{\pi}{2}\right)=3\cdot(-1)=-3$ και η ευθεία $y=\frac{12}{\pi}x$ διέρχεται από το σημείο $\left(-\frac{\pi}{4},\frac{12}{\pi}\cdot\left(-\frac{\pi}{4}\right)\right)=\left(-\frac{\pi}{4},-3\right)$.

Άρα η εξίσωση $3\eta\mu(2x)-\frac{12}{\pi}x=0$ έχει λύσεις τις $x=0$, $x=\frac{\pi}{4}$ και $x=-\frac{\pi}{4}$.

3. **4^o ΘΕΜΑ** #15347.

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = 2\sigma\upsilon\nu^2(\pi - x) - 3\eta\mu\left(\frac{\pi}{2} + x\right) + \alpha$, με $\alpha \in \mathbb{R}$.

α) Να δείξετε ότι $f(x) = 2\sigma\upsilon\nu^2 x - 3\sigma\upsilon\nu x + \alpha$.

(Μονάδες 8)

β) Να εξετάσετε αν η συνάρτηση f είναι άρτια ή περιττή.

(Μονάδες 5)

γ) Να βρείτε το α αν είναι γνωστό ότι η γραφική παράσταση της f διέρχεται από το σημείο $M(\frac{\pi}{3}, 1)$.

(Μονάδες 5)

δ) Για α=2 και $g(x) = 2\eta\mu^2 x + 9\sigma\upsilon\nu x - 9$, να εξετάσετε (αν υπάρχουν) κοινά σημεία των γραφικών παραστάσεων των συναρτήσεων f και g.

(Μονάδες 7)

ΛΥΣΗ

α) Είναι: $\sigma\upsilon\nu(\pi - x) = -\sigma\upsilon\nu x$ και $\eta\mu\left(\frac{\pi}{2} + x\right) = \eta\mu\left(\frac{\pi}{2} - (-x)\right) = \sigma\upsilon\nu(-x) = \sigma\upsilon\nu x$.

Άρα: $f(x) = 2\sigma\upsilon\nu^2(\pi - x) - 3\eta\mu\left(\frac{\pi}{2} + x\right) + \alpha = 2\sigma\upsilon\nu^2 x - 3\sigma\upsilon\nu x + \alpha$.

β) Το πεδίο ορισμού της συνάρτησης f είναι το σύνολο των πραγματικών αριθμών $\mathbb{R}$.

Άρα για κάθε $x \in \mathbb{R}$ και $-x \in \mathbb{R}$.

Έχουμε: $f(-x) = 2\sigma\upsilon\nu^2(-x) - 3\sigma\upsilon\nu(-x) + \alpha = 2\sigma\upsilon\nu^2 x - 3\sigma\upsilon\nu x + \alpha = f(x)$.

Άρα η συνάρτηση f είναι άρτια.

γ) Η γραφική παράσταση της συνάρτησης f διέρχεται από το σημείο $M(\frac{\pi}{3}, 1)$ αν και μόνον αν $f\left(\frac{\pi}{3}\right) = 1 \Leftrightarrow 2\sigma\upsilon\nu^2\frac{\pi}{3} - 3\sigma\upsilon\nu\frac{\pi}{3} + \alpha = 1 \Leftrightarrow 2 \cdot \frac{1}{4} - 3 \cdot \frac{1}{2} + \alpha = 1 \Leftrightarrow$ α = 2.

δ) Με $\alpha = 2$ έχουμε $f(x) = 2\sigma\upsilon\nu^2 x - 3\sigma\upsilon\nu x + 2$.

Για να βρούμε τις τετμημένες των κοινών σημείων των δύο γραφικών παραστάσεων λύνουμε την εξίσωση :

$$f(x) = g(x) \Leftrightarrow 2\sigma\upsilon\nu^2 x - 3\sigma\upsilon\nu x + 2 = 2\eta\mu^2 x + 9\sigma\upsilon\nu x - 9 = 0 \Leftrightarrow$$

$$2\sigma\upsilon\nu^2 x - 3\sigma\upsilon\nu x + 2 = 2(1 - \sigma\upsilon\nu^2 x) + 9\sigma\upsilon\nu x - 9 \Leftrightarrow 4\sigma\upsilon\nu^2 x - 12\sigma\upsilon\nu x + 9 = 0 \Leftrightarrow$$

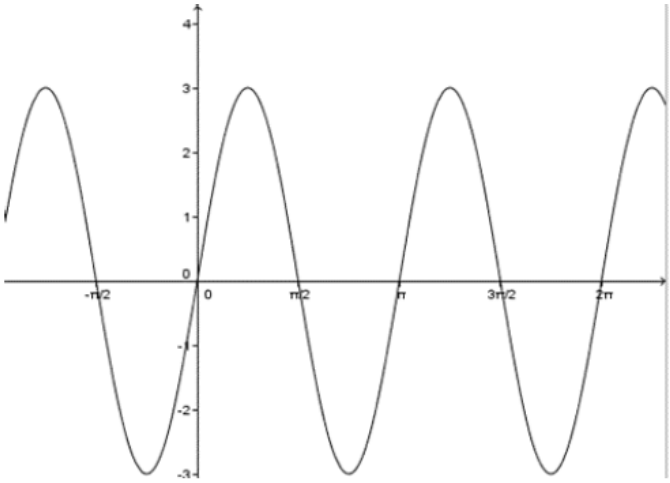
$(2\sigma\upsilon\nu x - 3)^2 = 0 \Leftrightarrow \sigma\upsilon\nu x = \frac{3}{2}$, αδύνατη.

Αφού η παραπάνω εξίσωση είναι αδύνατη, δεν υπάρχουν σημεία τομής των δύο γραφικών παραστάσεων.

4. **4^o ΘΕΜΑ** #15062.

Στο διπλανό σχήμα δίνεται η γραφική παράσταση μιας συνάρτησης f που είναι της μορφής

$f(x)=\rho\eta\mu(\alpha x)$, $x\in\mathbb{R}$ και $\alpha,\rho>0$



α) Να βρείτε, με βάση το σχήμα, την περίοδό της, την μέγιστη και την ελάχιστη τιμή της.

(Μονάδες 6)

β) Με βάση τις απαντήσεις στο προηγούμενο ερώτημα, να βρείτε τους αριθμούς α και ρ.

(Μονάδες 6)

Έστω $\rho=3$ και $\alpha=2$. Θεωρούμε επίσης τη συνάρτηση $g(x)=x^4-2x^2+5$, $x\in\mathbb{R}$.

γ) Να αποδείξετε ότι η ελάχιστη τιμή της είναι ίση με 4.

(Μονάδες 7)

δ) Να αιτιολογήσετε γιατί οι γραφικές παραστάσεις των f, g δεν έχουν κοινό σημείο.

(Μονάδες 6)

ΛΥΣΗ

α)Από το σχήμα είναι φανερό ότι η γραφική της παράσταση προκύπτει από επανάληψη του τμήματος της που αντιστοιχεί στο διάστημα $[0,\pi]$, οπότε η περίοδος της f είναι $T=\pi$. Επιπλέον οι τεταγμένες των σημείων της γραφικής της παράστασης περιέχονται στο διάστημα $[-3,3]$, οπότε η ελάχιστη τιμή της είναι ίση με -3 και η μέγιστη είναι ίση με 3.

β) Η συνάρτηση είναι της μορφής $f(x)=\rho\eta\mu(\alpha x)$ με $\alpha,\rho>0$, οπότε έχει περίοδο $T=\dfrac{2\pi}{\alpha}$ ελάχιστη τιμή $-\rho$ και μέγιστη ίση με ρ. Έτσι, έχουμε $\dfrac{2\pi}{\alpha}=\pi$, οπότε $\alpha=2$ και $\rho=3$.

γ) Είναι: $g(x)=x^4-2x^2+5=(x^2-1)^2+4\geq 4$ και η ισότητα $g(x)=4$ ισχύει όταν $x^2=1$ δηλαδή όταν $x=-1$ ή $x=1$. Άρα ο αριθμός 4 είναι η ελάχιστη τιμή της f.

δ) Επειδή για κάθε $x\in\mathbb{R}$ ισχύει $f(x)\leq 3$ και $g(x)\geq 4$, η εξίσωση $f(x)=g(x)$ είναι αδύνατη. Άρα οι γραφικές παραστάσεις των f, g δεν έχουν κοινό σημείο.

5. **4^o ΘΕΜΑ** #15026.

Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=1+2\eta\mu\left(\frac{\pi x}{2}\right)$, $x\in\mathbb{R}$.

α) Να βρείτε την περίοδο της συνάρτησης f.

(Μονάδες 5)

β) Να βρείτε τα ακρότατα της συνάρτησης f.

(Μονάδες 6)

γ) Να βρείτε τις τετμημένες των σημείων στα οποία η γραφική παράσταση της f τέμνει τον άξονα xx'.

(Μονάδες 7)

δ) Να αποδείξετε ότι $\left(f(x)-1\right)^2+\left(f(1-x)-1\right)^2=4$, για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

(Μονάδες 7)

ΛΥΣΗ

α) Η περίοδος της συνάρτησης f είναι $\mathrm{T}=\dfrac{2\pi}{\frac{\pi}{2}}=4$.

β) Για κάθε $x\in\mathbb{R}$ είναι

$-1\le\eta\mu\left(\frac{\pi x}{2}\right)\le 1$ οπότε $-2\le 2\eta\mu\left(\frac{\pi x}{2}\right)\le 2$ οπότε $-2+1\le 1+2\eta\mu\left(\frac{\pi x}{2}\right)\le 2+1$ και τελικά $-1\le f(x)\le 3$.

Επίσης $f(1)=1+2\eta\mu\left(\frac{\pi}{2}\right)=3$ και $f(3)=1+2\eta\mu\left(\frac{3\pi}{2}\right)=-1$.

Συνεπώς η μέγιστη τιμή της f είναι το 3 και η ελάχιστη το -1.

γ) Οι τετμημένες των σημείων στα οποία η γραφική παράσταση της f τέμνει τον άξονα xx' είναι οι λύσεις της εξίσωσης $f(x)=0$. Είναι

$$f(x)=0 \Leftrightarrow 1+2\eta\mu\left(\frac{\pi x}{2}\right)=0 \Leftrightarrow \eta\mu\left(\frac{\pi x}{2}\right)=-\frac{1}{2} \Leftrightarrow \eta\mu\left(\frac{\pi x}{2}\right)=\eta\mu\left(-\frac{\pi}{6}\right) \Leftrightarrow$$

$$\left\{\begin{array}{c} \frac{\pi x}{2}=2\kappa\pi+\left(-\frac{\pi}{6}\right) \\ \eta' \\ \frac{\pi x}{2}=2\kappa\pi+\pi-\left(-\frac{\pi}{6}\right) \end{array}\right\} \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{c} \frac{\pi x}{2}=2\kappa\pi-\frac{\pi}{6} \\ \eta' \\ \frac{\pi x}{2}=2\kappa\pi+\frac{7\pi}{6} \end{array}\right\} \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{c} \frac{x}{2}=2\kappa-\frac{1}{6} \\ \eta' \\ \frac{x}{2}=2\kappa+\frac{7}{6} \end{array}\right\} \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{c} x=4\kappa-\frac{1}{3} \\ \eta' \\ x=4\kappa+\frac{7}{3} \end{array}\right\}, \quad \kappa\in\mathbb{Z}$$

οπότε οι ζητούμενες τετμημένες είναι όλοι οι πραγματικοί αριθμοί της μορφής $x=4\kappa-\frac{1}{3}$ ή $x=4\kappa+\frac{7}{3}$, όπου $\kappa\in\mathbb{Z}$.

δ) Για κάθε $x\in\mathbb{R}$ είναι

$f(1-x)=1+2\eta\mu\left(\frac{\pi(1-x)}{2}\right)=1+2\eta\mu\left(\frac{\pi-\pi x}{2}\right)=1+2\eta\mu\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi x}{2}\right)=1+2\sigma\upsilon\nu\left(\frac{\pi x}{2}\right)$, οπότε

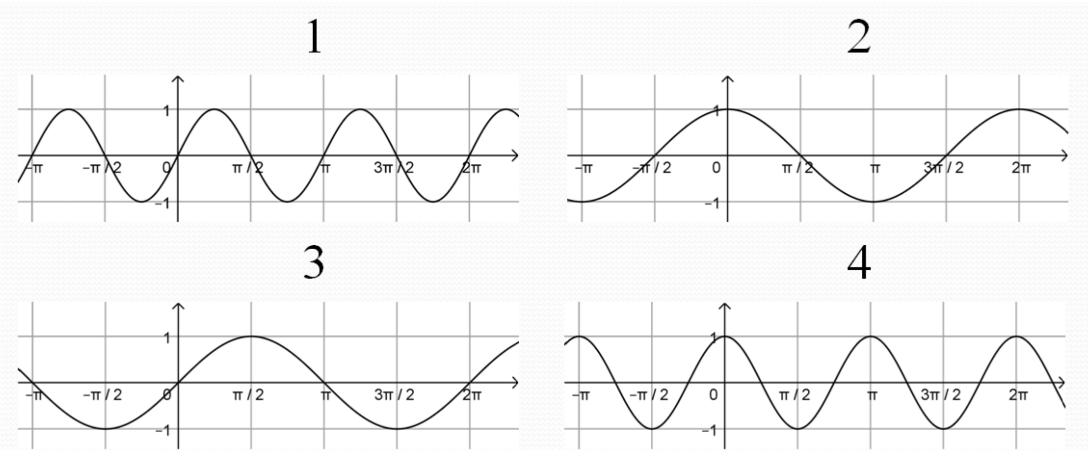
$$\left(f(x)-1\right)^2+\left(f(1-x)-1\right)^2=\left(1+2\eta\mu\left(\frac{\pi x}{2}\right)-1\right)^2+\left(1+2\sigma\upsilon\nu\left(\frac{\pi x}{2}\right)-1\right)^2=$$

$$4\eta\mu^2\left(\frac{\pi x}{2}\right)+4\sigma\upsilon\nu^2\left(\frac{\pi x}{2}\right)=4(\eta\mu^2\left(\frac{\pi x}{2}\right)+\sigma\upsilon\nu^2\left(\frac{\pi x}{2}\right))=4\cdot 1=4$$

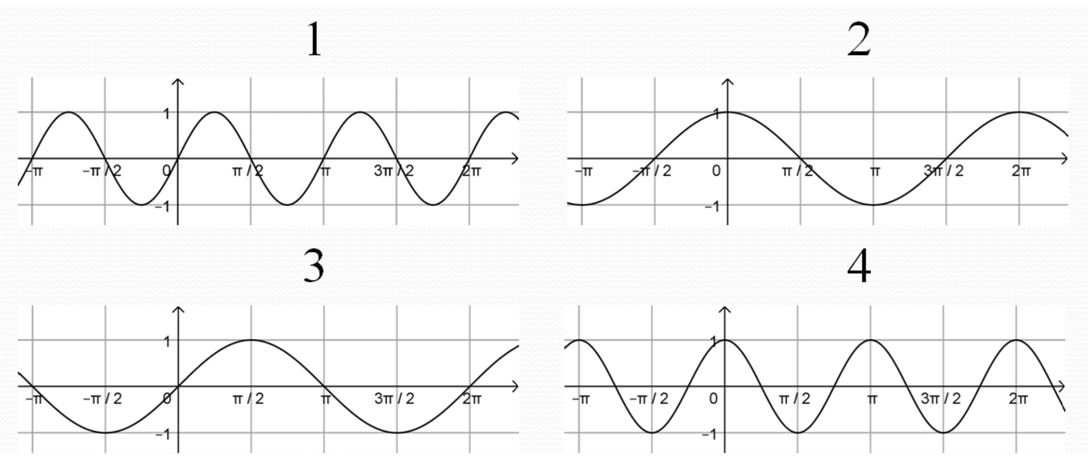
δηλαδή $\left(f(x)-1\right)^2+\left(f(1-x)-1\right)^2=4$, για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

3.8 ΕΡΩΤΗΣΕΙΣ ΕΠΑΝΑΛΗΨΗΣ

1. Μεταξύ των παρακάτω γραφημάτων, ποιά καμπύλη παριστά τη συνάρτηση συν (x);



2. Μεταξύ των παρακάτω γραφημάτων, ποιά καμπύλη παριστά τη συνάρτηση ημ (x);



3. Η συνάρτηση $f(x) = \text{ημ } (x)$ είναι αύξουσα στο διάστημα $\left[0, \dfrac{\pi}{2}\right]$;

4. Η συνάρτηση $f(x) = \text{συν } (x)$ είναι αύξουσα στο διάστημα $\left[-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right]$;

5. Η συνάρτηση $f(x) = 2 + \text{συν } (x)$ στο $\mathbb{R}$ δεχεται το 2 σαν ελλάχιστη τιμή;

6. Η συνάρτηση $f(x) = \text{ημ }^2(x) + \text{συν }^2(x)$ ορισμένη στο $\mathbb{R}$ είναι γραμμική;

7. Η συνάρτηση $f(x) = \text{ημ } (x) + x$ ορισμένη στο $\mathbb{R}$ είναι άρτια;

8. Η συνάρτηση $f(x) = \text{ημ } (x) + x$ ορισμένη στο $\mathbb{R}$ είναι περιοδική με περίοδο 2π;

9. Η συνάρτηση $f(x) = x\text{ημ } (x)$ ορισμένη στο $\mathbb{R}$ είναι περιττή;

10. Η συνάρτηση $f(x) = \text{συν } (2x)$ ορισμένη στο $\mathbb{R}$ είναι περιοδική με περίοδο π;

11. Αν $x = y$, τότε ημ $(x) =$ ημ (y);
12. Αν ημ $(x) =$ ημ (y), τότε $x = y$;
13. Αν $x \neq y$, τότε συν $(x) \neq$ συν (y);
14. Αν συν $(x) \neq$ συν (y), τότε $x \neq y$;
15. Η συνάρτηση ημ είναι αύξουσα στο διάστημα $\left[\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right]$;

Αντικαταστήστε το $<$ ή $>$ στις παρακάτω προτάσεις:

16. Αν $0 \leq a < b \leq \frac{\pi}{2}$, τότε συν $(a) \ldots$ συν (b).
17. Αν $\frac{\pi}{2} \leq a < b \leq \pi$, τότε ημ $(a) \ldots$ ημ (b).
18. Αν $\pi \leq a < b \leq \frac{3\pi}{2}$, τότε συν $(a) \ldots$ συν (b).
19. Αν $\frac{3\pi}{2} \leq a < b \leq 2\pi$, τότε ημ $(a) \ldots$ ημ (b).

Κεφάλαιο 4

ΠΟΛΥΩΝΥΜΑ

4.1 ΟΡΙΣΜΟΙ & ΠΡΑΞΕΙΣ

4.1.1 Ασκήσεις

1. Ο βαθμός του πολυωνύμου $(x^2+1)^4(x^3+1)^3$ είναι:
Α. 5 **Β.** 7 **Γ.** 12 **Δ.** 17 **Ε.** 72

2. Αν $p(x) = ax^4 - bx^2 + x + 5$ και $p(-3) = 2$, τότε $p(3) =$;
Α. -3 **Β.** -2 **Γ.** 1 **Δ.** 3 **Ε.** 8

3. Έστω το πολυώνυμο $p(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \cdots + a_{n-1}x + a_n$ όπου $n \in \mathbb{N}$ και $a_0 \in \mathbb{Z}^+$. Έστω
$$h = n + a_0 + |a_1| + |a_2| + \cdots + |a_1|$$
τότε ο αριθμός των πολυωνύμων που ικανοποιούν τη συνθήκη $h = 3$ είναι:
Α. 3 **Β.** 5 **Γ.** 6 **Δ.** 7 **Ε.** 9

4. Ένα πολυώνυμο $p(x)$ διαιρούμενο με το $x-1$ δίνει υπόλοιπο 3, όταν διαιρεθεί με το $x-3$ δίνει υπόλοιπο 5. Το υπόλοιπο της διαίρεσης του $p(x)$ με το $(x-1)(x-3)$ είναι:
Α. $x+3$ **Β.** 3 **Γ.** 5 **Δ.** $x+2$ **Ε.** 15

5. Αν $3x^3 - 9x^2 + kx - 12$, $k \in \mathbb{R}$, είναι διαιρετό με $x-3$, τότε είναι επίσης διαιρετό με:
Α. $3x^2 - x + 4$ **Β.** $3x^2 - 4$ **Γ.** $3x^2 + 4$ **Δ.** $3x - 4$ **Ε.** $3x + 4$

6. Αν n ο αριθμός των ακεραίων τιμών του x έτσι ώστε το
$$p(x) = x^4 + 6x^3 + 11x^2 + 3x + 31$$
είναι τετράγωνο ενός ακεραίου. Τότε το n μπορεί να είναι:
Α. 4 **Β.** 3 **Γ.** 2 **Δ.** 1 **Ε.** 0

7. Αν $p(x) = x^4 + 4x^3 + 6px^2 + 4qx + r$ διαιρείται ακριβώς με το $q(x) = x^3 + 3x^2 + 9x + 3$, η τιμή της $(p+q)r$ είναι:
Α. -18 **Β.** 12 **Γ.** 15 **Δ.** 27 **Ε.** 45

8. Ποιο είναι το υπόλοιπο της διάιρεσης του $x^{51}+51$ με το $x+1$;
Α. 0 **Β.** 1 **Γ.** 49 **Δ.** 50 **Ε.** 51

9. Αν $(3x-1)^7 = a_7x^7 + a_6x^6 + \cdots + a_0$, τότε $a_0 + a_1 + \ldots a_6 + a_7$ είναι ίσο με:
Α. 0 **Β.** 1 **Γ.** 64 **Δ.** -64 **Ε.** 128

10. Να προσδιορίσετε τους πραγματικούς αριθμούς k και λ, ώστε αν το πολυώνυμο $p(x) = x^4+1$ διαιρεθεί με το πολυώνυμο $x^2+kx+\lambda$ να αφήνει υπόλοιπο 0.
Υπόδειξη: Η διαίρεση $p(x) \div (x^2+kx+\lambda)$ δίνει πηλίκο: x^2-kx+k^2-l και υπόλοιπο: $(2kl-k^3)x+1+l^2-lk$. Πρέπει λοιπόν, $2kl-k^3=0$ και $1+l^2-lk=0$. Δύσκολη απάντηση αν θέλουμε αριθμητικά δεδομένα. Δοκιμάστε το εξής: $x^4+1=(x^2+x\sqrt{2}+1)(x^2-x\sqrt{2}+1)$, τότε: $(k,l)=(\sqrt{2},1)$ ή $(-\sqrt{2},1)$. ■

11. Έστω $p(x) = x^5+x^4+x^3+x^2+x+1$. Ποιο είναι το υπόλοιπο της διάιρεσης $p(x^{12}) \div p(x)$;
Α. 6 **Β.** $5-x$ **Γ.** x^2-x+4 **Δ.** $-x^3+x^2-x+3$ **Ε.** $x^4-x^3+x^2-x+2$

12. Έστω $p(x)$ είναι ένα πολυώνυμο έτσι ώστε όταν διαρεθεί με το $x-19$ αφήνει υπόλοιπο 99 και όταν διαιρεθεί με το $x-99$ αφήνει υπόλοιπο 19. Ποιο είναι το υπόλοιπο όταν διαιρεθεί με το $(x-19)(x-99)$;

Α. $-x+80$ **Β.** $x+80$ **Γ.** $-x+118$ **Δ.** $x+118$ **Ε.** 0

13. Να δείξετε ότι αν το πολυώνυμο $g(x) \neq 0$ διαιρεί ακριβώς κάθε ένα από τα πολυώνυμα

$$p_1(x), p_2(x), \ldots, p_n(x), \quad n \in \mathbb{N}$$

τότε θα διαρεί και τα πολυώνυμα:

$$F(x) = c_1p_1(x) + c_2p_2(x) + \cdots + \gamma_n p_n(x) \tag{4.1}$$
$$G(x) = p_1(x) \cdot p_2(x) \cdot \cdots \cdot p_n(x) \tag{4.2}$$

14. Αν $g(x)/p(x)$ και $p(x)/g(x)$ τότε δείξτε ότι ισχύει $p(x) = c \cdot g(x)$, $c \in \mathbb{R}$.

15. Να ορισθεί πολυώνυμο δευτέρου βαθμού, $p(x)$, το οποίον να ικανοποιεί τη σχέση:

$$p\Big(p(x)\Big) = x^2p(x) - xp(x) + 1$$

16. Να δείξετε ότι ικανή και αναγκαία συνθήκη έτσι ώστε το πολυώνυμο $p(x) = \alpha x^3 + \beta x^2 + \gamma x + \delta$ να είναι κύβος πρωτοβάθμιου πολυωνύμου είναι $\begin{cases} \beta^2 &= 3\alpha\gamma \\ \beta^3 &= 27\alpha^2\delta \end{cases}$

17. Έστω η συνάρτηση με τύπο $f(x) = \dfrac{p(x)}{q(x)}$, $q(x) \not\equiv 0$, όπου

$$p(x) = \alpha_\nu x^\nu + \alpha_{\nu-1}x^{\nu-1} + \cdots + \alpha_0 \tag{4.3}$$
$$q(x) = \beta_\nu x^\nu + \beta_{\nu-1}x^{\nu-1} + \cdots + \beta_0 \tag{4.4}$$

$\beta_i \neq 0$. Να ευρεθεί η ικανή και αναγκαία συνθήκη έτσι ώστε η συνάρτηση να είναι σταθερή.

18. Να ορισθεί πολυώνυμο $p(x)$, τετάρτου βαθμού, για το οποίο: $p(x) - p(x-1) = x^3$ με $p(0) = 0$. Στην συνέχεια να υπολογίσετε το άθροισμα $S_3 = 1^3 + 2^3 + \cdots + \nu^3$.

19. Να ορισθούν οι πραγματικοί $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ έτσι ώστε:

    (α΄) $\dfrac{6(x^2-2)}{(x^2-1)(x^2-4)} = \dfrac{\alpha}{x-1} + \dfrac{\beta}{x+1} + \dfrac{\gamma}{x-2} + \dfrac{\delta}{x-2}$.

    (β΄) $\dfrac{3x^2-4x+2}{(x-1)^3} = \dfrac{\alpha}{x-1} + \dfrac{\beta}{(x-1)^2} + \dfrac{\gamma}{(x-1)^3}$.

20. Αν $\pi_1(x)$ και $\upsilon_1(x)$ είναι το πηλίκο και το υπόλοιπο της διαίρεσης του πολυωνύμου $p(x)$ δια του πολυωνύμου $q(x) \not\equiv 0$ και $\pi_2(x)$, $\upsilon_2(x)$ είναι το πηλίκο το υπόλοιπο της διαίρεσης του πολυωνύμου $\pi_1(x)$ δια του $h(x) \not\equiv 0$. Να βρεθούν το πηλίκο και το υπόλοιπο της διαίρεσης του πολυωνύμου $p(x)$ δια του $q(x) \cdot h(x)$. Δείξτε επίσης ότι, ικανή και αναγκαία συνθήκη για να είναι η διαίρεση $p(x) \div q(x) \cdot h(x)$ τέλεια, είναι η $\upsilon_1(x) \equiv \upsilon_2(x) \equiv 0$.

21. Το πολυώνυμο $p(x)$ διαιρούμενο με τα $q(x) = x^2 + x + 1$ και $h(x) = x^2 - x + 1$ δίδει αντίστοιχα υπόλοιπα $\upsilon_1(x) = x - 1$ και $\upsilon_2(x) = 2x + 5$. Να βρεθεί το υπόλοιπο $\upsilon(x)$ της διαίρεσης του πολυωνύμου $p(x)$ δια του $q(x) \cdot h(x) = x^4 + x^2 + 1$.

22. Ποια είναι η μεγαλύτερη θετική ακέραια τιμή του x έτσι ώστε ο αριθμός $x^3 + 100$ να είναι διαιρετός με το $x + 10$;
    σκιπ 5πτ

23. Να βρεθούν οι ακέραιοι a και b έτσι ώστε το πολυώνυμο $x^2 - x + 1$ να είναι παράγοντας του

$$ax^{17} + bx^{16} + 1$$

24. Αν το πολυώνυμο με ακέραιους συντελεστές

$$p(x) = a_k x^k + a_{k-1} x^{k-1} + \cdots + a_1 x + a_0, \quad a_k \neq 0 \wedge \forall k \, (a_k \in \mathbb{Z})$$

    δέχεται το ανάγωγο κλάσμα

$$\rho = \frac{m}{n}, \quad m, n \in \mathbb{Z} \wedge n \neq 0, \pm 1$$

    σαν ρίζα, τότε οι αριθμοί m και n είναι διαρέτες των a_0 και a_k αντίστοιχα.

25. (Εφαρμογή στην άσκηση 23) Δείξτε ότι η ρίζα της εξίσωσης $x^2 - 2 = 0$ είναι άρρητος αριθμός.

26. (Εφαρμογή στην άσκηση 23) Βρείτε τις ρίζες της εξίσωσης

$$x^3 - x^2 - \frac{x}{4} + \frac{1}{4} = 0$$

27. Δείξτε ότι αν ένα πολυώνυμο $p(x)$ βαθμού κ δέχεται $\kappa + 1$ ρίζες πραγματικές απλές και διάφορες μεταξύ τους, τότε αυτό είναι το μηδενικό πολυώνυμο.

28. Δίδεται το πολυώνυμο:
$$p(x) = \frac{(x-\alpha)(x-\beta)}{(\gamma-\alpha)(\gamma-\beta)} + \frac{(x-\beta)(x-\gamma)}{(\alpha-\beta)(\alpha-\gamma)} + \frac{(x-\gamma)(x-\alpha)}{(\beta-\gamma)(\beta-\alpha)}$$
με $\alpha \neq \beta \neq \gamma \neq \alpha$. Να δειχθεί ότι $p(x) \equiv 1$.

29. Δείξτε οτι το πολυώνυμο $p(x) = (x-\alpha)^2(\beta-\gamma) + (x-\beta)^2(\gamma-\alpha) + (x-\gamma)^2(\alpha-\beta) + (\alpha-\beta)(\beta-\gamma)(\gamma-\alpha)$, $\alpha \neq \beta \neq \gamma \neq \alpha$, είναι το μηδενικό[1] πολυώνυμο.

30. Αναγκαία και ικανή συνθήκη ώστε το $p(x) = x^n - \alpha^n$ να διαιρεί το $q(x) = x^m - \alpha^m$, $\alpha \neq 0$, είναι $m = \text{πολ}.n$.

31. Αν το πολυώνυμο $p(x) = \alpha_n x^n + \alpha_{n-1}x^{n-1} + \cdots + \alpha_1 x + \alpha_0$, $\alpha_n \neq 0$, με ρητούς συντελεστές δέχεται τον αριθμό $\rho_1 = \kappa + \sqrt{\lambda}$, $\kappa, \lambda \in \mathbb{Q}$ και $\sqrt{\lambda} \in \mathbb{Q}_a$, ως ρίζα, τότε θα δέχεται και τον αριθμό $\rho_2 = \kappa - \sqrt{\lambda}$.

32. Να προσδιορισθούν οι πραγματικοί αριθμοί α και β ώστε το πολυώνυμο
$$p(x) = x^3 - x^2 - (3+\alpha)x + \beta + 10$$
να έχει παράγοντα το $(x-2)^2$.

33. Θεωρούμε το πολυώνυμο $p(x) = x^3 - 3\alpha x + 2\beta,\ \alpha, \beta \in \mathbb{R}^*$. Έστω, $\rho \in \mathbb{R}$ με $(x-\rho)^2$ παράγοντα του $p(x)$. Δείξτε ότι $\alpha^3 = \beta^2$.

34. Αν για το πολυώνυμο $p(x)$ ισχύει $2p(x) + p(2-x) = -x^2 - 1$, να βρείτε
   (α′) $p(0)$ και $p(2)$,
   (β′) το υπόλοιπο της διαίρεσης του $p(x)$ με το $x^2 - 2x$

35. Δίδεται το πολυώνυμο $p(x) = x^5 - 2\alpha x^3 + \beta x + 3\gamma - 6$. Να βρεθούν οι πραγματικοί α, β, γ ώστε το $p(x)$ να έχει παράγοντα το $x^3 - x$. Να βρείτε επίσης το πηλίκο της διαίρεσης αυτής.

36. Να δείξετε ότι αν $\alpha \neq \beta$ τότε το υπόλοιπο της διαίρεσης του πολυωνύμου $p(x)$ δια του γινομένου $(x-\alpha)(x-\beta)$ είναι:
$$\upsilon(x) = \frac{p(\alpha) - p(\beta)}{\alpha - \beta}x + \frac{\beta p(\alpha) - \alpha p(\beta)}{\beta - \alpha}$$

37. Αν το πολυώνυμο $p(x) = \alpha_\nu x^\nu + \alpha_{\nu-1}x^{\nu-1} + \cdots + \alpha_1 x + a_0$ δέχεται τον πραγματικό ϱ σαν ρίζα και $p(\alpha_0) = 0$, τότε ο αριθμός ϱ είναι ρίζα του $p\Big(p\big(p(x)\big)\Big)$.

38. (♣♣) Θεωρήστε γνωστό το εξής θεώρημα[2] που ισχύει για πολυώνυμα με πραγματικούς συντελεστές: *Κάθε πολυώνυμο περιττού βαθμού έχει τουλάχιστον μια πραγματική ρίζα.*
Αν οι πραγματικοί συντελεστές του πολυωνύμου $p(x) = \alpha x^3 + \beta x^2 + \gamma x + \delta,\ \gamma \neq 0$, ικανοποιούν την σχέση $\beta^2 - \alpha\gamma < 0$, η εξίσωση $p(x) = 0$ έχει μία και μόνο μια πραγματική ρίζα.

[1] Δείτε άσκηση 26.

[2] Είναι συνέπεια του θεωρήματος Bolzano στην Ανάλυση, δείτε παρακάτω παράγραφος 4.4. Το θεώρημα αυτό θα το συναντήσουμε στα Μαθηματικά Κατευθυνσης της Γ Λυκείου.

39. (♣) Αν οι συντελεστές του πολυωνύμου $p(x)$ (τουλάχιστον πρώτου βαθμού) είναι πραγματικοί και οι τιμές $p(0)$ και $p(1)$ είναι περιττοί αριθμοί, να δείξετε ότι η εξίσωση $p(x) = 0$ δεν έχει ακέραια ρίζα.

40. (♣) Να αποδείξετε ότι δεν υπάρχουν ακέραιοι αριθμοί $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ τέτοιοι ώστε το πολυώνυμο $p(x) = \alpha x^3 + \beta x^2 + \gamma x + \delta$ να λαμβάνει τιμή ίση με 1 για $x = 19$ και την τιμή 2 για $x = 62$.

41. (♣)Υπάρχουν περιοδικά πολυώνυμα;

42. (♣♣♣) Δείξτε ότι για κάθε ρίζα[3] ϱ του πολυωνύμου $p(x) = x^\nu + \alpha_{\nu-1}x^{\nu-1} + \cdots + \alpha_1 x + \alpha_0$ ισχύει:

$$|\varrho| < 1 + |\alpha_{\nu-1}| + |\alpha_{\nu-2}| + \cdots + |\alpha_1| + |\alpha_0|$$

<u>Υπόδειξη:</u> Θέτω $|\alpha| = \max\{|\alpha_i|_{i=0\ldots\nu-1}\}$, δηλαδή το $|\alpha|$ είναι το μεγαλύτερο μεταξύ των $|\alpha_i|$. Τότε, $1 + |\alpha| < 1 + |\alpha_{\nu-1}| + |\alpha_{\nu-2}| + \cdots + |\alpha_1| + |\alpha_0|$. Άρα, θα δείξουμε κάτι ισχυρότερο:

$$|\varrho| < 1 + |\alpha| \tag{4.5}$$

Από την ιδιότητα του α έχουμε:

$$\begin{aligned}
|\alpha_{\nu-1}||\varrho^{\nu-1}| + |\alpha_{\nu-2}||\varrho^{\nu-2}| + \cdots + |\alpha_1||\varrho| + |\alpha_0| &\leq |\alpha||\varrho^{\nu-1}| + |\alpha||\varrho^{\nu-2}| + \cdots + |\alpha||\varrho| + |\alpha| \\
|\alpha_{\nu-1}||\varrho^{\nu-1}| + |\alpha_{\nu-2}||\varrho^{\nu-2}| + \cdots + |\alpha_1||\varrho| + |\alpha_0| &\leq |\alpha|\left(|\varrho^{\nu-1}| + |\varrho^{\nu-2}| + \cdots + |\varrho| + 1\right)
\end{aligned}$$

ή

$$-\left(|\alpha_{\nu-1}||\varrho^{\nu-1}| + |\alpha_{\nu-2}||\varrho^{\nu-2}| + \cdots + |\alpha_1||\varrho| + |\alpha_0|\right) > -|\alpha|\left(|\varrho^{\nu-1}| + |\varrho^{\nu-2}| + \cdots + |\varrho| + 1\right)$$

Εφαρμόζοντας την τριγωνική ανισότητα έχουμε

$$\begin{aligned}
|p(\varrho)| &\geq |\varrho|^\nu - |\alpha_{\nu-1}\varrho^{\nu-1} + \alpha_{\nu-2}\varrho^{\nu-2} + \cdots + \alpha_1\varrho + \alpha_0| \\
&\geq |\varrho|^\nu - \left(|\alpha_{\nu-1}||\varrho^{\nu-1}| + |\alpha_{\nu-2}||\varrho^{\nu-2}| + \cdots + |\alpha_1||\varrho| + |\alpha_0|\right) \\
&> |\varrho|^\nu - |\alpha|\left(|\varrho^{\nu-1}| + |\varrho^{\nu-2}| + \cdots + |\varrho| + 1\right) \\
&> |\varrho|^\nu - |\alpha|\frac{|\varrho|^\nu - 1}{|\varrho| - 1}
\end{aligned}$$

Ας υποθέσουμε ότι δεν ισχύει η 4.5. Τότε $|\varrho| \geq 1 + |\alpha|$ ή ισοδύναμα

$$1 \geq |\alpha|\frac{1}{|\varrho| - 1} \Leftrightarrow |\varrho|^\nu \geq |\alpha|\frac{|\varrho|^\nu}{|\varrho| - 1}$$

[3] Πρόκειται για ένα φράγμα των ριζών πολυωνύμου. Παρατηρείστε ότι το 4.5 είναι καλύτερο. Ένα τέτοιο πολυώνυμο στο οποίο ο συντελεστής του μεγιστοβάθμιου όρου είναι 1, λέγεται *μονικό*. Κάθε πολυώνυμο μπορεί να γίνει μονικό, απλά διαιρούμε με τον συντελεστή του μεγιστοβάθμιου όρου ο οποίος λογίζεται πάντα να είναι $\neq 0$. Όλα τα πολυώνυμα στηνΆλγεβρα θεωρούνται μονικά γιατί οι αλγόριθμοι έχουν καλύτερη πολυπλοκότητα.

Άρα,

$$\begin{aligned}
|p(\varrho)| &\geq |\varrho|^\nu - |\alpha|\frac{|\varrho|^\nu - 1}{|\varrho| - 1} \\
&\geq |\varrho|^\nu - |\alpha|\frac{|\varrho|^\nu}{|\varrho| - 1} + |\alpha|\frac{1}{|\varrho| - 1} \\
&\geq |\alpha|\frac{|\varrho|^\nu}{|\varrho| - 1} - |\alpha|\frac{|\varrho|^\nu}{|\varrho| - 1} + |\alpha|\frac{1}{|\varrho| - 1} \\
&\geq |\alpha|\frac{1}{|\varrho| - 1} \\
&> 0
\end{aligned}$$

Αδύνατο, αφού ϱ είναι ρίζα του $p(x) = 0 \Rightarrow p(\varrho) = 0$. Άρα,

$$|\varrho| < 1 + |\alpha| < 1 + |a_{\nu-1}| + |a_{\nu-2}| + \cdots + |\alpha_1| + |\alpha_0|$$

■

43. (♣♣) (Εξειδίκευση του προηγούμενου) Δείξτε ότι για κάθε ρίζα ϱ του πολυωνύμου $p(x) = x^2 + \alpha x + \beta$ ισχύει:

$$|\varrho| < 1 + |\alpha| + |\beta|$$

Το παραπάνω θεώρημα, που λέγεται θεώρημα Gauchy, 1829 ή και όριο Gauchy, λέει ότι οι ρίζες ενός πολυωνύμου βρίσκονται στο εσωτερικό ενός διαστήματος. Για παράδειγμα, δείτε το διάστημα που ανήκουν οι ρίζες της πολυωνυμικής εξίσωσης:

$$p(x) := 360x^5 - \frac{6001704}{5}x^4 + \frac{57005893}{50}x^3 - \frac{39668427}{100}x^2 + \frac{3000047}{50}x - \frac{333333}{100} = 0$$

στη σελίδα 86, παράδειγμα 4.4.2.

44. (♣♣)(Πανελλαδικές 2013 θέμα Β3) Δείξτε ότι αν ένας πραγματικός ϱ ικανοποιεί τη σχέση

$$\varrho^3 + \alpha_2\varrho^2 + \alpha_1\varrho + \alpha_0 = 0$$

με $\alpha_i \in \mathbb{R}$ και $|\alpha_i| < 3$, ικανοποιεί επίσης τη σχέση $|\varrho| < 4$.
<u>Υπόδειξη:</u>

$$\begin{aligned}
\varrho^3 + \alpha_2\varrho^2 + \alpha_1\varrho + \alpha_0 = 0 &\Leftrightarrow \varrho^3 = -\alpha_2\varrho^2 - \alpha_1\varrho - \alpha_0 \\
&\Leftrightarrow \varrho^3 \leq |-\alpha_2\varrho^2 - \alpha_1\varrho - \alpha_0| \\
&\Leftrightarrow \varrho^3 \leq |\alpha_2\varrho^2| + |\alpha_1\varrho| + |\alpha_0| \\
&\Leftrightarrow \varrho^3 < 3\Big(|\varrho|^2 + |\varrho| + 1\Big) \\
&\Leftrightarrow \varrho^3 < 3\frac{|\varrho|^3 - 1}{|\varrho| - 1}
\end{aligned}$$

(α′) Αν $|\varrho| \leq 1$ ισχύει αφού $1 < 4$.

(β΄) Αν $|\varrho| \geq 1$,
$|\varrho|^3 < 3\dfrac{|\varrho|^3}{|\varrho|-1} - 3\dfrac{1}{|\varrho|-1} < 3\dfrac{|\varrho|^3}{|\varrho|-1}$ Άρα, $|\varrho|^3 < 3\dfrac{|\varrho|^3}{|\varrho|-1} \Leftrightarrow \cdots \Leftrightarrow |\varrho| < 4$, με άτοπο.

Διαφορετικά:

$$\begin{array}{rcll}
\varrho^3 + \alpha_1\varrho^2 + \alpha_2\varrho + \alpha_0 = 0 & \Rightarrow & |\varrho|^3 \leq 3|\varrho|^2 + 3|\varrho| + 3 & \text{Τριγωνική ανισότητα} \\
& \Rightarrow & |\varrho|^3 < 3|\varrho|^2 + 3|\varrho| + 4 & (3 < 4) \\
& \Rightarrow & |\varrho|^3 - 3|\varrho|^2 - 3|\varrho| - 4 < 0 & \\
& \Rightarrow & (|\varrho| - 4)(|\varrho|^2 + |\varrho| + 1) < 0 &
\end{array}$$

πράγμα που οδηγεί αναπόφευκτα στην σχέση: $|\varrho| < 4$. ■

45. Αν ϱ ρίζα της εξίσωσης $\alpha x^2 + \beta x + c = 0$, $\alpha \neq 0$, $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$, τότε:

$$|\varrho| < \frac{|\alpha| + |\beta| + |\gamma|}{|\alpha|}$$

Υπόδειξη: Μπορείτε για εξάσκηση να δουλέψετε με τις τριγωνικές ανισότητες όπως κάναμε επιτυχώς προηγουμένως. Θα σας προτείνω όμως κάτι διαφορετικό.

$$\frac{|\alpha| + |\beta| + |\gamma|}{|\alpha|} = 1 + \left|\frac{\beta}{\alpha}\right| + \left|\frac{\gamma}{\alpha}\right| \tag{4.6}$$

Στο δεύτερο μέλος της ισότητας 4.6 αναγνωρίζεται το άθροισμα και το γινόμενο των ριζών της αρχικής εξίσωσης 2ου βαθμού. Άρα,

$$1 + \left|\frac{\beta}{\alpha}\right| + \left|\frac{\gamma}{\alpha}\right| = 1 + |\varrho + \varrho'| + |\varrho \cdot \varrho'|$$

Αρκεί λοιπόν να δείξουμε ότι:

$$1 + |\varrho + \varrho'| + |\varrho \cdot \varrho'| > |\varrho| \tag{4.7}$$

Επομένως, αν

(α΄) $|\varrho| < 1$, η 4.7 είναι προφανής.

(β΄) $|\varrho| \geq 1$, τότε

$$\begin{array}{rcll}
1 + |\varrho + \varrho'| + |\varrho \cdot \varrho'| & \geq & 1 + |\varrho| - |\varrho'| + |\varrho \cdot \varrho'| & \\
& = & 1 + |\varrho| + |\varrho'|(|\varrho| - 1) & \\
& \geq & 1 + |\varrho| & \text{αφού } |\varrho'|(|\varrho| - 1) > 0 \\
& > & |\varrho| &
\end{array}$$

Αποδείχθηκε η 4.7. ■

46. Έστω πολυώνυμο με πραγματικούς συντελεστές

$$p(x) = a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0$$

τέτοιο ώστε $|p(x)| \leq 1$ για $|x| \leq 1$. Να βρεθεί πραγματικός αριθμός M έτσι ώστε $|a_3| \leq M$.
<u>Υπόδειξη:</u>

$$\begin{cases} p(1) & = & a_3 + a_2 + a_1 + a_0 \\ p(-1) & = & -a_3 + a_2 - a_1 + a_0 \\ p(1/2) & = & \dfrac{1}{8}a_4 + \dfrac{1}{4}a_2 + \dfrac{1}{2}a_1 + a_0 \\ p(-1/2) & = & -\dfrac{1}{8}a_4 + \dfrac{1}{4}a_2 - \dfrac{1}{2}a_1 + a_0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2a_3 + 2a_1 & = & p(1) - p(-1) \\ 2a_3 + 8a_1 & = & 8p(1/2) - 8p(-1/2) \end{cases}$$

Άρα,

$$\begin{aligned} a_3 &= \frac{2p(1) - 2p(-1) - 4p(1/2) + 4p(-1/2)}{3} \\ |a_3| &\leq \frac{2|p(1)| + 2|p(-1)| + 4|p(1/2)| + 4|p(-1/2)|}{3} \\ &\leq \frac{2+2+4+4}{3} \\ &= 4 \end{aligned}$$

Επομένως, $M = 4$. ∎

1 Μαρτίου 2026 Λυγάτσικας Ζ.

4.2 ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ ΚΑΙ ΑΝΙΣΩΣΕΙΣ

4.2.1 Ασκήσεις στις πολυωνυμικές εξισώσεις/ανισώσεις

1. Να λυθούν ως προς x οι εξισώσεις:

   (α′) $\sqrt{x-3}=5$

   (β′) $x-\sqrt{25-x^2}=1$

   (γ′) $\sqrt{x}-\sqrt{x+1}=2$

   (δ′) $2\sqrt{5-4x}=5-4x$

   (ε′) $\sqrt{x^2-x+5}=x-3$

2. Να λυθούν ως προς x οι ανισώσεις:

   (α′) $\sqrt{x-2}<\sqrt{2x+1}$

   (β′) $\sqrt{4x+1}<\sqrt{1-2x}$

3. Να σχηματισθεί εξίσωση τετάρτου βαθμού η οποία έχει ρίζες τους αριθμούς:

   (α′) $-2,-3,4,5.$

   (β′) $\frac{1}{2},\frac{2}{5},\frac{5}{2},3.$

4. Να βρείτε τα κοινά σημεία των γραφικών παραστάσεων των $f(x)=x^3+9$ και $g(x)=5x^2-3x$.

5. Να βρείτε τα διαστήματα του x στα οποία η γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x)=-x^3+3x^2$ είναι πάνω από την ευθεία $y=5x+9$.

6. Έστω $p(x)=x^3+x^2-2x$.

   (α′) Να αναλύσετε το $p(x)$ σε γινόμενο πρώτων μεταξύ τους παραγόντων.

   (β′) Να λύθεί ως προς x η $\sqrt{p(x)}=\sqrt{x-1}$.

   (γ′) Να λύθεί ως προς x η $\sqrt{p(x)}>\sqrt{x-1}$.

7. (α′) Να λυθεί ως προς x η εξίσωση $x+\sqrt{2(x+1)}=11$.

   (β′) Να λυθεί ως προς x η ανίσωση $x+\sqrt{2(x+1)}<11$.

8. Να λυθούν ως προς x οι εξισώσεις:

   (α′) $(2\text{ημ}\,x-1)^4+6(2\text{ημ}\,x-1)^2-7=0$

   (β′) $2\text{ημ}^3x+5\text{ημ}^2x+5\text{ημ}\,x+2=0$

   (γ′) $2\text{συν}^4x-5\text{συν}^3x+5\text{συν}\,x-2=0$

9. Να λυθεί ως προς x η εξίσωση: $x^3 - 2x^2 + 22x + 60 = 0$.

10. Να λυθεί ως προς x η ανίσωση $7x^3 - 13x^2 + 3x + 3 < 0$.

11. Αν $p(x) = x^{15} - 4x^{14} + 2x^{13} + 2015$, να υπολογισθεί η τιμή της παράστασης $\dfrac{p(2+\sqrt{2}) + p(2-\sqrt{2})}{2}$.

12. Να λυθεί ως προς x η εξίσωση: $(x-1)^4 + (x-5)^4 = 32$.
<u>Υπόδειξη:</u> Θέτω $\dfrac{x-1+x-5}{2} = y$, τότε: $x-1 = y+2$ και $x-5 = y-2$. Άρα, η αρχική γίνεται

$$(y+2)^4 + (y-2)^4 = 32$$

Μπορούμε να βρούμε τα αναπτύγματα $(y+2)^4$ και $(y-2)^4$, στα οποία οι όροι με περιττές δυνάμεις του -2 θα αλληλοαναιρούνται. Οι συντελεστές των αναπτυγμάτων $(a+b)^4$ βρίσκονται είτε από το διώνυμο του Newton:

$$(a+b)^n = \binom{n}{0}a^n b^0 + \binom{n}{1}a^{n-1}b + \cdots + \binom{n}{n-1}ab^{n-1} + \binom{n}{n}a^0 b^n$$

με $\binom{n}{0} = \binom{n}{n} = 1$ και $\binom{n}{m} = \dfrac{n!}{m!(n-m)!}$ ή με το τρίγωνο του Pascal:

$$\begin{array}{llllllllllllll}
0 & & & & & & & 1 & & & & & & \\
1 & & & & & & 1 & & 1 & & & & & \\
2 & & & & & 1 & & 2 & & 1 & & & & \\
3 & & & & 1 & & 3 & & 3 & & 1 & & & \\
4 & & & 1 & & 4 & & 6 & & 4 & & 1 & & \\
5 & & 1 & & 5 & & 10 & & 10 & & 5 & & 1 & \\
6 & 1 & & 6 & & 15 & & 20 & & 15 & & 6 & & 1
\end{array}$$

Τότε:

$$(y+2)^4 + (y-2)^4 = 32 \Leftrightarrow y^4 + 12y^2 = 0$$

Η τελευταία έχει διπλή ρίζα: $y = 0$, επομένως $x = 3$ διπλή ρίζα.

■

13. Να λυθεί ως προς x και να διερευνηθεί η εξίσωση $\sqrt{x^2 + \alpha x} = x - \alpha$.
<u>Υπόδειξη:</u>

Αν $\alpha = 0$	η εξίσωση αληθεύει για κάθε x με $x \geq 0$
Αν $\alpha > 0$	η εξίσωση είναι αδύνατη
Αν $\alpha < 0$	η εξίσωση έχει μια λύση $x = \dfrac{\alpha}{3}$

■

14. Να λυθεί ως προς x η $\sqrt{x^2-3x+2}-\sqrt{x^2+x-6}=x-2$.
<u>Υπόδειξη:</u> Πρέπει:

$$x^2-3x+2\geq 0 \;\&\; x^2+x-6\geq 0 \Rightarrow x\leq -3 \text{ ή } 2\leq x$$

Αλλά: $x^2-3x+2=(x-2)(x-1)$ και $x^2+x-6=(x-2)(x+3)$. Τότε η αρχική για

(α′) $x\geq 2$ γίνεται:

$$\sqrt{x-2}\Big[\sqrt{x-1}-\sqrt{x+3}-\sqrt{x-2}\Big]=0 \tag{4.8}$$

i. Η 4.8 έχει μία ρίζα αν $x=2$.
ii. Αν $\sqrt{x-1}-\sqrt{x+3}-\sqrt{x-2}=0 \qquad (**)$. Τότε, για $x>2$ έχουμε:

$$\sqrt{x-1}=\sqrt{x+3}=\sqrt{x-2}\Leftrightarrow -x-2=2\sqrt{(x-3)(x-2)}$$

Τότε: $-x-2\geq 0\Leftrightarrow x<-2$, αδύνατο αφού $x>2$. Άρα, δεν υπάρχει λύση

(β′) $x\leq -3$ γίνεται:

$$\sqrt{2-x}\Big[\sqrt{1-x}-\sqrt{-x-3}-\sqrt{2-x}\Big]=0 \tag{4.9}$$

i. Η 4.9 μηδενίζεται για $x=2$ αδύνατο αφού $x\leq -3$.
ii. Αν $\sqrt{1-x}-\sqrt{-x-3}-\sqrt{2-x}=0 \quad (***)$. Τότε,

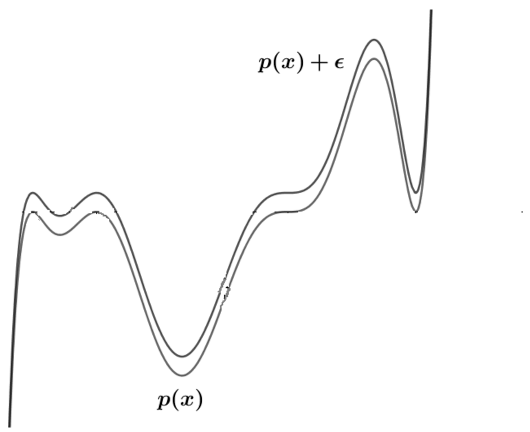
$$\begin{aligned}\sqrt{1-x}=\sqrt{-x-3}+\sqrt{2-x} &\Leftrightarrow\; 2+x=2\sqrt{(x-2)(x+3)}\\ &\Leftrightarrow\; \text{αφού } x\leq -3,\; 2+x<0\\ &\Leftrightarrow\; \text{η } (***) \text{ είναι αδύνατη}\end{aligned}$$

Συμπέρασμα: η μοναδική ρίζα της εξίσωσης είναι η $x=2$. ■

15. Να λυθεί ως προς x η ανίσωση $\dfrac{x^4-2x^3-10x^2+4x+16}{x-4}>2x+1$.

16. Έστω $p(x)=(x-3)^2(x-1)^3(x+2)^2(x+3)^2$. Αν ε είναι ένας πολύ μικρός θετικός αριθμός, πόσες διαφορετικές πραγματικές ρίζες έχει το πολυώνυμο $q(x)=p(x)+\varepsilon$;

<u>Υπόδειξη:</u>



Η άσκηση μπορεί να φαίνεται παράξενη. Αλλά θέλουμε να κατανοήσετε την διάσταση μιας απειροστικής διαταραχής πάνω στους συντελεστές μιας εξίσωσης και την επίδραση που έχει αυτό στις ρίζες της εξίσωσης. Βέβαια ένα εναλλακτικό πρόβλημα είναι να βρεθούν οι διακεκριμένες ρίζες του

$$(x-3)^2(x-1)^3(x+2)^2(x+3)^2+c=0$$

Αλλά, εδώ δεν πρόκειται για ένα τόσο τεχνικό πρόβλημα! Είναι αλήθεια ότι απευθύνεται σε πολύ καλά ενημερωμένους από πλευράς μαθηματικών μαθητές.

Εξηγήστε στο γράφημα την ποιότητα των ριζών του γραφήματος $\mathscr{G}_p$. Πρίν αρχίσουμε τη μελέτη πρέπει να δούμε που το γράφημα είναι πάνω ή κάτω από τον άξονα. Από το πρόσημο του $p(x)$ βλέπουμε ότι για $x < 1$ βρίσκεται κάτω από τον άξονα, ενώ για $x > 1$ πάνω. Η κατάσταση αυτή απεικονίζεται και στο γράφημα.

Οι ρίζες -3 και -2 είναι διπλές. Άρα, το γράφημα εκεί εφάπτεται στον άξονα $x'x$. Επομένως μια απειροστή διαταραχή του γραφήματος προς τα πάνω πρέπει να γεννά $2{+}2 = 4$ επιπλέον ρίζες αφού το γράφημα είναι όλο κάτω από τον άξονα. Επίσης, η ρίζα 3 είναι διπλή αλλά το γράφημα εκεί είναι πάνω από το άξονα των $x'x$. Επομένως η απειροστή αλλαγή δεν προσθέτει ρίζα.

Τελικά, η $p(x)+\epsilon = 0$ έχει 5 πραγματικές ρίζες. ■

17. Έστω p πολυώνυμο με συντελεστές στο $\mathbb{R}$ τέτοι ώστε

$$p(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$$

με $a \neq 0$. Υποθέστε ότι $ad = bc$.

(α΄) Δείξτε ότι, $\forall x \in \mathbb{R}$, $p(x) = a\left(x^2 + \frac{c}{a}\right)\left(x + \frac{b}{a}\right)$.

(β΄) Να λυθεί στο $\mathbb{R}$ η εξίσωση: $2x^3 + 4x^2 - 3x - 6 = 0$.

18. Έστω εξίσωση της μορφής:

$$x^3 + px + q = 0,\ \ p, q \in \mathbb{R}^* \tag{4.10}$$

(α΄) Δείξτε ότι η εξίσωση 4.10 δεν μπορεί να έχει τρείς ίσες μεταξύ τους ρίζες.

(β΄) Δείξτε αν η εξίσωση 4.10 έχει τρείς διαφορετικές πραγματικές ρίζες, a, b και c, τότε

$$a + b + c = 0$$

19. Έστω πολυώνυμο $p(x) = x^4 + 10x^3 + 18x^2 + 10x + 1$.

(α΄) Είναι δυνατόν η εξίσωση $p(x) = 0$ να έχει ρίζα $\rho = 0$;

(β΄) Έστω ρ μια ρίζα της $p(x) = 0$. Θέτουμε $t = \rho + \dfrac{1}{\rho + 2}$. Να βρείτε τις ρίζες του πολυωνύμου με άγνωστο τη μεταβλητή t.

(γ΄) Να λυθεί η εξίσωση $p(x) = 0$, με τη βοήθεια των προηγουμένων.

20. (Θα παρουσιάσουμε τη μέθοδο του Cardan[4] επίλυσης μιας εξίσωσης 3ου βαθμού) Έτσω η εξίσωση:

$$x^3 + 9x^2 + 21x + 18 = 0 \tag{4.11}$$

[4] Ιταλός μαθηματικός $1501 - 1576$.

(α′) Να βρείτε έναν πραγματικό ρ έτσι ώστε αν είναι μια ρίζα της εξίσωσης 4.11, τότε η $y = x + \rho$ είναι μια ρίζα της $y^3 + py + q = 0$.

(β′) Έστω $\xi = u + v$ όπου ξ είναι μια ρίζα της εξίσωσης 4.11. Να βρεθεί η τιμή του γινομένου uv αν $u^3 + v^3 = -9$.

(γ′) Να βρείτε τις ρίζες της εξίσωσης 4.11.

21. (Μέθοδος Cartan στο $\mathbb{R}$) Έστω a, b, c τρείς πραγματικοί αριθμοί. Έστω η εξίσωση:

$$x^3 + ax^2 + bx + c = 0 \tag{4.12}$$

(α′) Δείξτε ότι αν ρ είναι μια ρίζα της εξίσωσης 4.12, τότε $y = \rho + \dfrac{a}{3}$ είναι μια ρίζα της εξίσωσης

$$y^3 + py + q = 0,\ p = b - \frac{a^2}{3},\ q = \frac{2a^3}{27} - \frac{ab}{3} + c \tag{4.13}$$

(β′) Θέτουμε $y = u + v$, όπου y μια ρίζα της εξίσωσης 4.13. Να βρεθεί το γινόμενο uv αν $u^3 + v^3 = -q$.

(γ′) Θέτουμε $\Delta = q^2 + \dfrac{4p^3}{27}$. Δείξτε ότι:

i. αν $\Delta > 0$, τότε $y = \sqrt[3]{\dfrac{-q-\sqrt{\Delta}}{2}} + \sqrt[3]{\dfrac{-q+\sqrt{\Delta}}{2}}$ είναι μια ρίζα της εξίσωσης 4.13.

ii. αν $\Delta = 0$, τότε $y = 2\sqrt[3]{\dfrac{-q}{2}}$ είναι μια ρίζα της εξίσωσης 4.13.

22. (Μέθοδος Cartan στο $\mathbb{R}$) Θέτουμε $a = \sqrt[3]{\sqrt{5}+2}$, $b = \sqrt[3]{\sqrt{5}-2}$ και $N = a - b$.

(α′) Υπολογίστε τις τιμές των $a^3 - b^3$ και ab.
Υπενθύμιση: Έχουμε ορίσει για κάθε πραγματικό a την ρίζα $\sqrt[3]{a}$ να είναι $\sqrt[3]{a}^3 = a$.

(β′) Δείξτε ότι ο αριθμός N είναι μια ρίζα της εξίσωσης $x^3 + 3x - 4 = 0$.

(γ′) Δείξτε ότι ο N είναι ένας ακέραιος αριθμός του οποίου να βρείτε την τιμή.

23. Να βρείτε ένα πολυώνυμο με ακέραιους συντελεστές τέτοιο ώστε:

(α′) ο αριθμός $\sqrt{2} + \sqrt{3}$ να είναι ρίζα του πολυωνύμου.

(β′) οι δύο αριθμοί $\sqrt{2} + \sqrt{3}$ και $\sqrt{2} + \sqrt[3]{3}$ να είναι ρίζες του πολυωνύμου.

<u>Υπόδειξη:</u>

(α′) Έστω $x = \sqrt{2} + \sqrt{3}$.

$$\begin{aligned}(x - \sqrt{2})^2 = (\sqrt{3})^2 &\Rightarrow x^2 - 1 = 2x\sqrt{2}\\ &\Rightarrow (x^2 - 1)^2 = 8x^2\\ &\Rightarrow x^4 - 10x^2 + 1 = 0\end{aligned}$$

Το πολυώνυμο $p(x) = x^4 - 10x^2 + 1$ έχει ρίζα τον αριθμό $\sqrt{2} + \sqrt{3}$.

(β′) Θέτω $y = \sqrt{2} + \sqrt[3]{3}$

$$\begin{aligned} y = \sqrt{2} + \sqrt[3]{3} &\Rightarrow (y - \sqrt{2})^3 = 3 \\ &\Rightarrow y^3 + 6x - 3 = \sqrt{2}(3y^2 + 2) \\ &\Rightarrow y^6 - 6y^4 - 6y^3 + 12y^2 - 36y + 1 = 0 \end{aligned}$$

Άρα, $\sqrt{2} + \sqrt[3]{3}$ είναι ρίζα του

$$q(x) = x^6 - 6x^4 - 6x^3 + 12x^2 - 36x + 1$$

Χρησιμοποιώντας το πρώτο ερώτημα οι δύο αριθμοί $\sqrt{2} + \sqrt{3}$ και $\sqrt{2} + \sqrt[3]{3}$ είναι ρίζες του πολυωνύμου $p(x) \cdot q(x)$ ή

$$p(x) \cdot q(x) = x^{10} - 16x^8 - 6x^7 + 73x^6 + 24x^5 - 125x^4 + 354x^3 + 2x^2 - 36x + 1$$

■

24. Η εξίσωση $p(x) = x^6 - 3x^5 - 6x^3 - x + 8 = 0$ έχει:

(α′) καμία πραγματική ρίζα

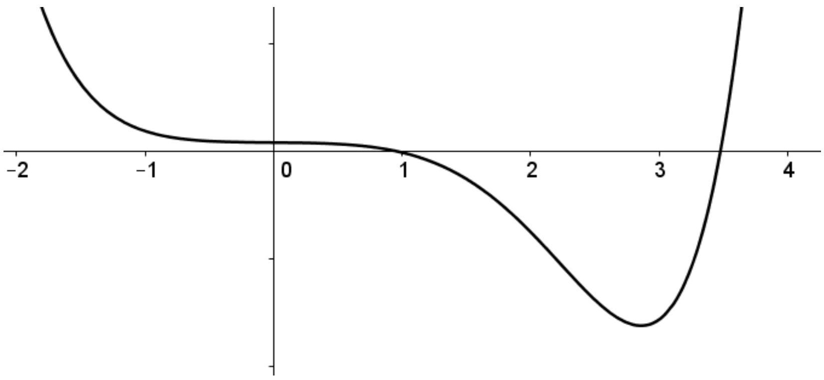
(β′) ακριβώς 2 αρνητικές ρίζες

(γ′) ακριβώς 1 ρίζα αρνητική

(δ′) καμία αρνητική ρίζα αλλά 1 τουλάχιστον θετική

(ε′) τίποτα από τα παραπάνω

Υπόδειξη:



Αν $x < 0$ τότε $p(x) > 0$ Άρα δεν μπορεί να έχει καμία ρίζα αρνητική ρίζα. Επομένως το γράφημα είναι πάνω από τον άξωνα $x'x$.
$p(1) = -1 < 0$, επομένως ανάμεσα από 0 και 1 υπάρχει μια τουλάχιστον ρίζα. **Σωστό το Δ.**

25. Το γράφημα του πολυωνύμου

$$p(x) = x^5 + ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e$$

τέμνει τον οριζόντιο άξονα σε 5 διακριτά μεταξύ τους σημεία εκ των οποίων ένα εξ αυτών είναι το $(0, 0)$. Ποιός από τους παρακάτω συντελεστές **δεν μπορεί** να είναι 0;

Α. a **Β.** b **Γ.** c **Δ.** d **Ε.** e

26. Να βρεθεί το άθροισμα των τετραγώνων όλων των πραγματικών αριθμών που ικανοποιούν την εξίσωση:

$$x^{256} - 256^{32} = 0$$

Α. 8 **Β.** 128 **Γ.** 512 **Δ.** 65.36 **Ε.** $2(256^2)$

27. Έστω το πολυώνυμο $p(x) = (x-1)(x-2)(x-3)$. Πόσα πολυώνυμα $q(x)$ υπάρχουν έτσι ώστε αν $r(x)$ είναι πολυώνυμο βαθμού 3, να ισχύει $p\big(q(x)\big) = p(x) \cdot r(x)$;
Α. 19 **Β.** 22 **Γ.** 25 **Δ.** 27 **Ε.** Τίποτα από τα προηγούμενα

<u>Υπόδειξη:</u> Επειδή $\deg(pr) = 6$ πρέπει $\deg(q) = 2$. Άρα, $q(x) = ax^2 + bx + c$, $a, b, c \in \mathbb{R}$. Επειδή $1, 2$ και 3 είναι ρίζες της εξίσωσης $p(x) = 0$, τότε από τη σχέση $p\big(q(x)\big) = p(x) \cdot r(x)$ θα έχουμε επίσης ότι $p(q(1)) = p(q(2)) = p(q(3)) = 0$. Άρα, τα $q(1)$, $q(2)$ και $q(3)$ έχουν τιμές από το σύνολο $\{1, 2, 3\}$. Οι πιθανοί συνδιασμοί για την επιλογή των $q(i)$ είναι οι συνδιασμοί ανα 3 του στοιχείων του συνόλου $\{1, 2, 3\}$, δηλαδή σύνολο: $3^3 = 27$. Αλλά, πρέπει να εξαιρέσουμε τους συνδιασμούς

$$(1,1,1), (2,2,2), (3,3,3), (1,2,3), (3,2,1)$$

επειδή παίρνουμε αντίστοιχες τιμές του $q(x)$, $1, 2, 3, x$ και $4 - x$ που είναι πολυώνυμα βαθμού 0 ή 1 (λύνοντας τα συστήματα για πχ $\{a + b + c = 1,\ 4a + 2b + c = 2,\ 9a + 3b + c = 3\}$ θα πάρουμε $(a, b, c) = (0, 1, 0)$). Άρα, μένουν 22 συνδιασμοί. **Σωστό το Β**. ■

4.3 ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΤΡΑΠΕΖΑΣ ΘΕΜΑΤΩΝ - 2022

1. **4^o ΘΕΜΑ** #15377.

Μία κυβική δεξαμενή Α έχει ακμή με μήκος x μέτρα.

Αν αυξηθεί η μία μόνο ακμή της κατά μία μονάδα θα μετατραπεί στη δεξαμενή Β σχήματος ορθογωνίου παραλληλεπίπεδου με τετράγωνη βάση.

α) Να βρείτε τη διαφορά $\Delta(x)$ των όγκων των δύο δεξαμενών ως συνάρτηση του x.

(Μονάδες 4)

β) Αν ο όγκος της δεξαμενής Β είναι 36 κυβικά μέτρα να βρείτε:

i. Τις διαστάσεις των δεξαμενών Α και Β.

(Μονάδες 9)

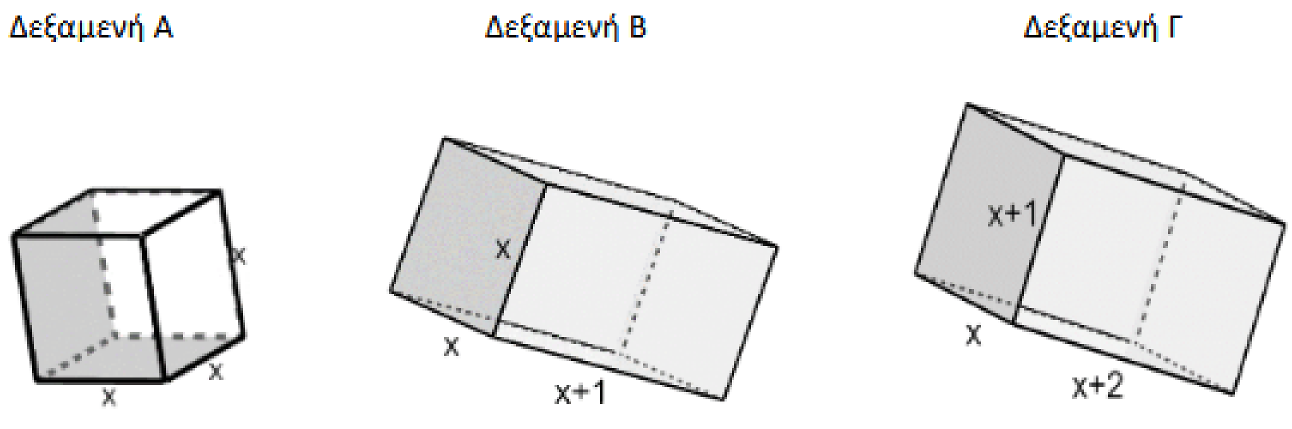
ii. Τη διαφορά των όγκων $\Delta(x)$.

(Μονάδες 4)

γ) Αν επιπλέον αυξηθεί η μία ακμή της βάσης της δεξαμενής Β κατά 2 μονάδες, να βρείτε τη μικρότερη τιμή του x ώστε ο όγκος της νέας δεξαμενής Γ να είναι τουλάχιστον 60 κυβικά μέτρα.

(Μονάδες 8)

Βοηθητικά δίνονται τα σχήματα των δεξαμενών Α, Β και Γ



α) Ο όγκος της κυβικής δεξαμενής Α υπολογίζεται από τον τύπο του όγκου κύβου, δηλαδή $V_A(x) = x^3$ και ο όγκος της δεξαμενής Β, από τον τύπο του όγκου ορθογωνίου παραλληλεπιπέδου, $V_B(x) = (x+1) \cdot x^2$.

Επομένως, $\Delta(x) = V_B(x) - V_A(x) = (x+1) \cdot x^2 - x^3 = x^3 + x^2 - x^3 = x^2$.

β) i. Επειδή $V_B(x) = 36 \Leftrightarrow (x+1) \cdot x^2 = 36 \Leftrightarrow x^3 + x^2 = 36$.

$$x^3 + x^2 = 36 \Leftrightarrow x^3 + x^2 - 36 = 0 \Leftrightarrow (x-3)(x^2 + 4x + 12) = 0 \Leftrightarrow$$

$$x - 3 = 0 \text{ ή } x^2 + 4x + 12 = 0.$$

Άρα, έχει τη μοναδική λύση το x=3, το τριώνυμο $x^2 + 4x - 12 = 0$ έχει διακρίνουσα

Δ=-32<0. Η διάσταση της δεξαμενής Α είναι $x = 3$ μέτρα. Οι διαστάσεις της δεξαμενής Β είναι 3 μέτρα, 3 μέτρα και 4 μέτρα.

ii. Η διαφορά των όγκων $\Delta(x) = x^2$ για $x = 3$ προκύπτει ότι είναι ίση με 9 κυβικά μέτρα.

γ) Η νέα δεξαμενή Γ θα έχει όγκο $V_\Gamma(x) = (x+1)(x+2)x$.

Από τα δεδομένα έχουμε $V_\Gamma(x) \geq 60$.

Λύνουμε τη πολυωνυμική ανίσωση

$$x^3 + 3x^2 + 2x - 60 \geq 0 \Leftrightarrow (x-3)(x^2 + 6x + 20) \geq 0 \ (1).$$

Επειδή, το τριώνυμο $x^2 + 6x + 20$ διατηρεί θετικό πρόσημο για κάθε τιμή του x, το πρόσημο της ανίσωσης (1) καθορίζεται από το x-3.

Άρα οι λύσεις της ανίσωσης (1) είναι $x \geq 3$.

Επομένως, η μικρότερη τιμή που μπορεί να πάρει το x είναι το 3, που είναι και η ζητούμενη ακμή.

2. **2^{o} ΘΕΜΑ** #15349.

Δίνεται η γραφική παράσταση C_f της συνάρτησης f με πεδίο ορισμού το $\mathbb{R}$, όπως φαίνεται στο σχήμα.

α) Να αιτιολογήσετε γιατί η συνάρτηση είναι άρτια.

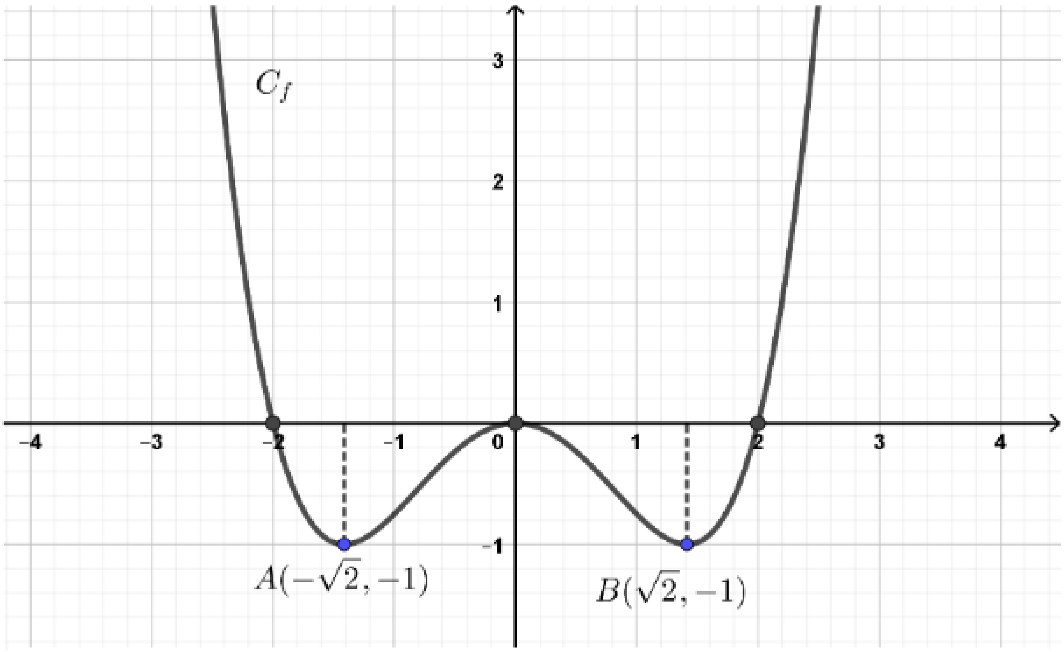
(Μονάδες 7)

β) Αν γνωρίζετε ότι τα σημεία $A\left(-\sqrt{2},-1\right)$ και $B(\sqrt{2},-1)$ ανήκουν στη γραφική παράσταση της f να βρείτε τα διαστήματα μονοτονίας της συνάρτησης f.

(Μονάδες 8)

γ) Να λύσετε γραφικά την εξίσωση $f(x)=0$.

(Μονάδες 10)



α) Για κάθε $x \in \mathbb{R}$ έχουμε $-x \in \mathbb{R}$ και από το σχήμα παρατηρούμε πως η C_f έχει άξονα συμμετρίας τον $y'y$. Άρα, η συνάρτηση f είναι άρτια.

β) Από τη γραφική παράσταση C_f, η συνάρτηση f είναι γνησίως φθίνουσα για $x \in (-\infty,-\sqrt{2}]$ και $x \in [0,\sqrt{2}]$ ενώ η συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα για $x \in [-\sqrt{2},0]$ και $x \in [\sqrt{2},+\infty)$.

γ) Για τις λύσεις της εξίσωσης $f(x)=0$ αρκεί να βρούμε τις τετμημένες των σημείων που η C_f τέμνει τον άξονα $x'x$, δηλαδή τα σημεία που έχουν τεταγμένη ίση με μηδέν. Αυτά είναι $\Gamma(-2,0)$, $O(0,0)$, $\Delta(2,0)$. Άρα οι λύσεις της εξίσωσης είναι $-2, 0, 2$.

3. **2^o ΘΕΜΑ** #15187.

Για τη γωνία ω του παρακάτω σχήματος ισχύει

$$5\eta\mu^3\omega - 8\eta\mu^2\omega - 7\eta\mu\omega + 6 = 0.$$

α) Να δείξετε ότι $\eta\mu\omega = \frac{3}{5}$.

(Μονάδες 8)

β) Να βρείτε:

i. την τιμή του $\sigma\upsilon\nu\omega$,

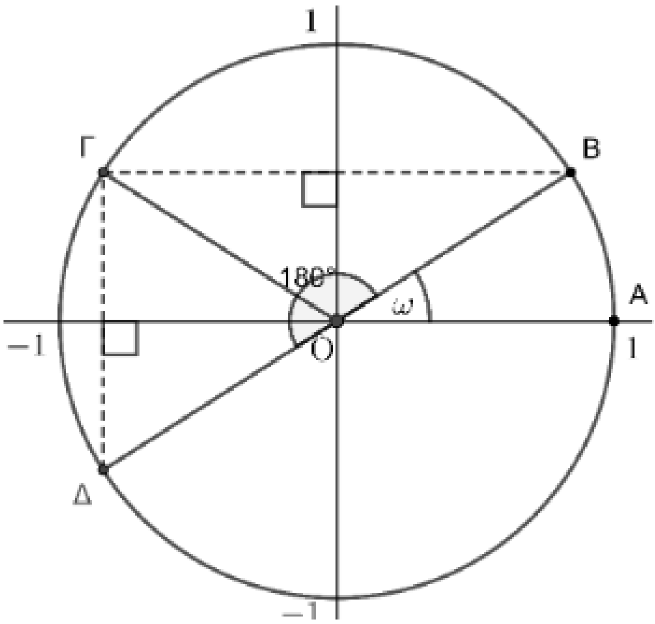
(Μονάδες 6)

ii. τις συντεταγμένες των σημείων B, Γ και Δ,

(Μονάδες 6)

iii. το ημίτονο και το συνημίτονο των θετικών γωνιών $A\hat{O}B$, $A\hat{O}\Gamma$ και $A\hat{O}\Delta$.

(Μονάδες 5)



α) Θέτουμε $\eta\mu\omega = x$ και η εξίσωση γράφεται:

$$5x^3 - 8x^2 - 7x + 6 = 0.$$

Οι πιθανές ακέραιες ρίζες της εξίσωσης είναι οι διαιρέτες του 6, δηλαδή οι $\pm1, \pm2, \pm3, \pm6$.

Με δοκιμή διαπιστώνουμε ότι ο -1 είναι ρίζα. Κάνουμε τη διαίρεση $(5x^3 - 8x^2 - 7x + 6) : (x + 1)$.

5	-8	-7	6	-1
	-5	13	-6	
5	-13	6	0	

Άρα $5x^3-8x^2-7x+6=(x+1)(5x^2-13x+6)$.

Το τριώνυμο $5x^2-13x+6$ έχει διακρίνουσα $\Delta=(-13)^2-4\cdot5\cdot6=169-120=49$ και ρίζες:

$$x_1=\frac{13+\sqrt{49}}{2\cdot5}=\frac{13+7}{10}=2$$

και

$$x_2=\frac{13-\sqrt{49}}{2\cdot5}=\frac{13-7}{10}=\frac{6}{10}=\frac{3}{5}.$$

Επειδή $0<\omega<\frac{\pi}{2}$, είναι $0<\eta\mu\omega<1$, άρα η μόνη αποδεκτή λύση είναι $\eta\mu\omega=\frac{3}{5}$.

β)

i. Ισχύει ότι:

$$\eta\mu^2\omega+\sigma\upsilon\nu^2\omega=1\Leftrightarrow\left(\frac{3}{5}\right)^2+\sigma\upsilon\nu^2\omega=1\Leftrightarrow$$
$$\sigma\upsilon\nu^2\omega=1-\frac{9}{25}=\frac{16}{25}$$

Επειδή $0<\omega<\frac{\pi}{2}$, είναι $\sigma\upsilon\nu\omega>0$. Άρα,

$$\sigma\upsilon\nu\omega=\sqrt{\frac{16}{25}}=\frac{4}{5}.$$

ii. Από τον τριγωνομετρικό κύκλο γνωρίζουμε ότι το σημείο B έχει συντεταγμένες $(\sigma\upsilon\nu\omega,\eta\mu\omega)$, άρα $B(\frac{4}{5},\frac{3}{5})$. Τα σημεία Γ και Δ είναι συμμετρικά του B ως προς τον άξονα $y'y$ και την αρχή O αντίστοιχα. Οπότε είναι:

$$\Gamma\left(-\frac{4}{5},\frac{3}{5}\right),\Delta\left(-\frac{4}{5},-\frac{3}{5}\right).$$

iii. Το ημίτονο και το συνημίτονο των γωνιών $A\hat{O}B$, $A\hat{O}\Gamma$ και $A\hat{O}\Delta$ είναι οι τεταγμένες και οι τετμημένες των σημείων B, Γ και Δ αντίστοιχα. Άρα,

$$\eta\mu A\hat{O}B=\frac{3}{5},\qquad \sigma\upsilon\nu A\hat{O}B=\frac{4}{5},$$
$$\eta\mu A\hat{O}\Gamma=\frac{3}{5},\qquad \sigma\upsilon\nu A\hat{O}\Gamma=-\frac{4}{5},$$

και

$$\eta\mu A\hat{O}\Delta=-\frac{3}{5},\qquad \sigma\upsilon\nu A\hat{O}\Delta=-\frac{4}{5}.$$

4. **4^o ΘΕΜΑ** #17943.

Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο με εμβαδό $\mathrm{E}=60cm^2$, του οποίου η υποτείνουσα είναι κατά $2cm$ μεγαλύτερη από τη μία κάθετη πλευρά. Αν ονομάσουμε x το μήκος αυτής της κάθετης πλευράς και y το μήκος της άλλης κάθετης (σε cm), τότε:

α) Να δείξετε ότι ο αριθμός x ικανοποιεί την εξίσωση:

$$x^3+x^2-3600=0.$$

(Μονάδες 10)

β) Αν γνωρίζετε ότι το μήκος της πλευράς x είναι αριθμός ακέραιος και μικρότερος του 16, να βρείτε την τιμή του x καθώς και τα μήκη των άλλων πλευρών του τριγώνου.

(Μονάδες 10)

γ) Να βρείτε το πλήθος των ορθογωνίων τριγώνων που ικανοποιούν τα αρχικά δεδομένα του προβλήματος. Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

(Μονάδες 5)

ΛΥΣΗ

α) Το ορθογώνιο τρίγωνο που ικανοποιεί τα δεδομένα έχει κάθετες πλευρές x, y και υποτείνουσα $(x+2)$. Το εμβαδόν του είναι $\mathrm{E}=60cm^2$, οπότε: $\frac{xy}{2}=60 \Leftrightarrow y=\frac{120}{x}$ και από το Πυθαγόρειο θεώρημα:

$$\begin{aligned}
&(x+2)^2=x^2+y^2 \Leftrightarrow \\
&(x+2)^2=x^2+\left(\frac{120}{x}\right)^2 \Leftrightarrow \\
&x^2+4x+4=x^2+\frac{14400}{x^2} \Leftrightarrow \\
&x+1=\frac{3600}{x^2} \Leftrightarrow \\
&x^3+x^2-3600=0. \qquad (1)
\end{aligned}$$

β) Οι πιθανές ακέραιες ρίζες της εξίσωσης $x^3+x^2-3600=0$ που είναι μικρότερες του 16 και είναι θετικοί αριθμοί (το x είναι μήκος πλευράς τριγώνου), είναι οι $1,2,3,4,5,6,8,9,10,12$ και 15. Οι αριθμοί που είναι μικρότεροι του 10 δεν μπορεί να είναι ρίζες, γιατί το άθροισμα $\left(x^3+x^2\right)$ πρέπει να ισούται με 3600. Παρατηρούμε ότι $10^3+10^2-3600\neq 0$, άρα το 10 δεν είναι ρίζα της εξίσωσης, όπως δεν είναι και το 12. Καταλήγουμε στο 15 και κάνουμε τη διαίρεση $\left(x^3+x^2-3600\right)\div(x-15)$:

$$
\begin{array}{rr|l}
 & x^3+x^2+0x-3600 & x-15 \\ \cline{3-3}
(+) & -x^3+15x^2 & x^2+16x+240 \\ \cline{2-2}
 & 16x^2+0x-3600 & \\
(+) & -16x^2+240x & \\ \cline{2-2}
 & 240x-3600 & \\
(+) & -240x+3600 & \\ \cline{2-2}
 & 0 &
\end{array}
$$

Οπότε η εξίσωση (1) γράφεται: $(x-15)\left(x^2+16x+240\right)=0$.

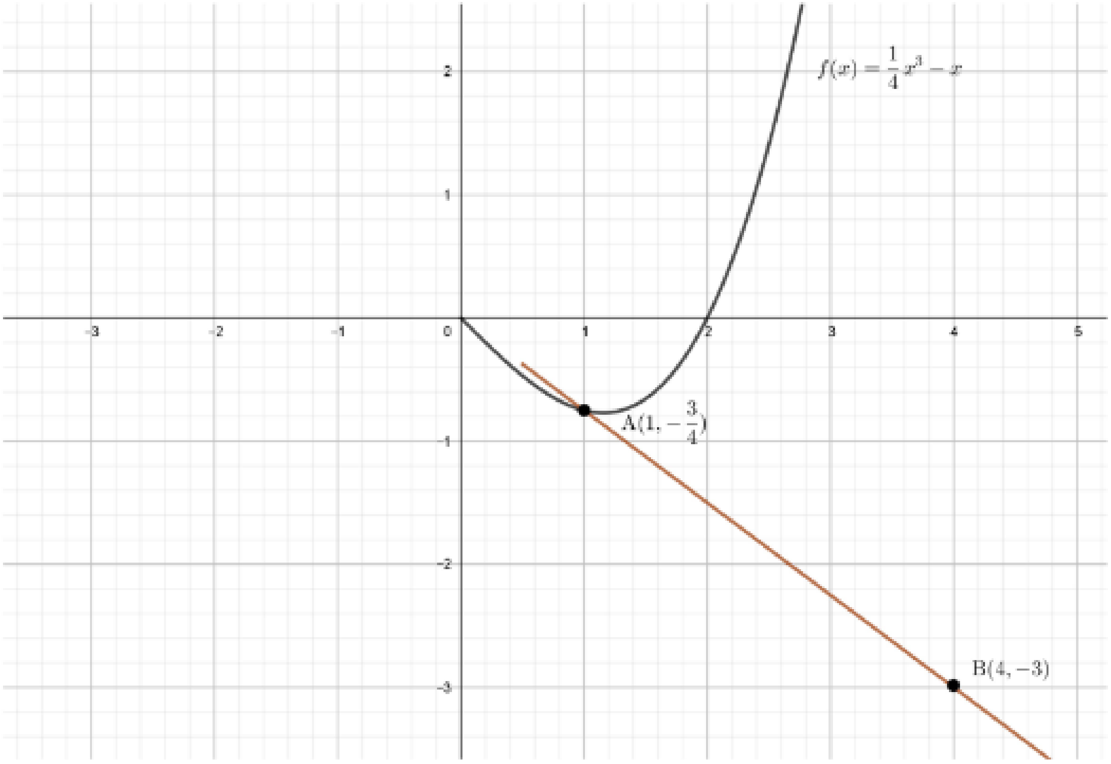
Η μόνη λύση της εξίσωσης είναι $x=15$, γιατί η $x^2+16x+240=0$ είναι αδύνατη ($\Delta=-704<0$).

Άρα οι κάθετες πλευρές του τριγώνου είναι $15cm$ και $\frac{120}{15}=8cm$. Η υποτείνουσα είναι $15+2=17cm$.

γ) Ένα είναι το ορθογώνιο τρίγωνο που ικανοποιεί τα αρχικά δεδομένα του προβλήματος και αυτό είναι το τρίγωνο που βρήκαμε στο β) ερώτημα, γιατί η εξίσωση $x^3+x^2-3600=0$ δεν έχει άλλη λύση εκτός από την $x=15$.

5. **4^o ΘΕΜΑ** #17919.

Στο παρακάτω σχήμα δίνεται τμήμα της γραφικής παράστασης της συνάρτησης $f(x)=\frac{1}{4}x^3-x$, $x\in\mathbb{R}$ και η ευθεία που διέρχεται από τα σημεία $A\left(1,-\frac{3}{4}\right)$ και $B(4,-3)$.



α) Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας AB.

(Μονάδες 6)

β)

i. Να αποδείξετε ότι $f(-x)=-f(x)$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

(Μονάδες 5)

ii. Να μεταφέρετε στην κόλλα σας το σχήμα και να συμπληρώσετε τη γραφική παράσταση της f για $x<0$.

(Μονάδες 6)

γ) Αν η ευθεία AB έχει εξίσωση $y=-\frac{3}{4}x$, με χρήση του β) ερωτήματος ή με όποιον άλλο τρόπο θέλετε, να βρείτε τα κοινά σημεία της ευθείας με την γραφική παράσταση της f.

(Μονάδες 8)

ΛΥΣΗ

α) Η ευθεία AB έχει εξίσωση της μορφής $(\varepsilon): y=\alpha x+\beta$. Το σημείο $\mathrm{A}\left(1,-\frac{3}{4}\right)$ είναι σημείο της (ε), άρα:

$$-\frac{3}{4}=\alpha\cdot 1+\beta \quad (1).$$

Το σημείο $\mathrm{B}(4,-3)$ είναι σημείο της (ε), άρα:

$$-3=\alpha\cdot 4+\beta \quad (2).$$

Λύνουμε το σύστημα των εξισώσεων (1) και (2):

$$\begin{cases}-\frac{3}{4}=\alpha\cdot 1+\beta \\ -3=\alpha\cdot 4+\beta\end{cases} \overset{(-)}{\Leftrightarrow} \begin{cases}3\alpha=-3+\frac{3}{4} \\ 4\alpha+\beta=-3\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}\alpha=-\frac{3}{4} \\ 4\cdot\left(-\frac{3}{4}\right)+\beta=-3\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}\alpha=-\frac{3}{4} \\ \beta=0.\end{cases}$$

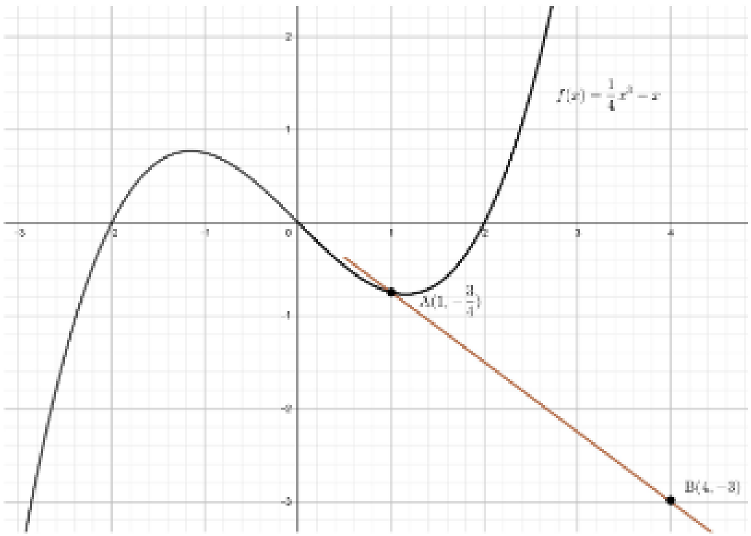
Άρα η ευθεία AB έχει εξίσωση $(\varepsilon): y=-\frac{3}{4}x$.

β)

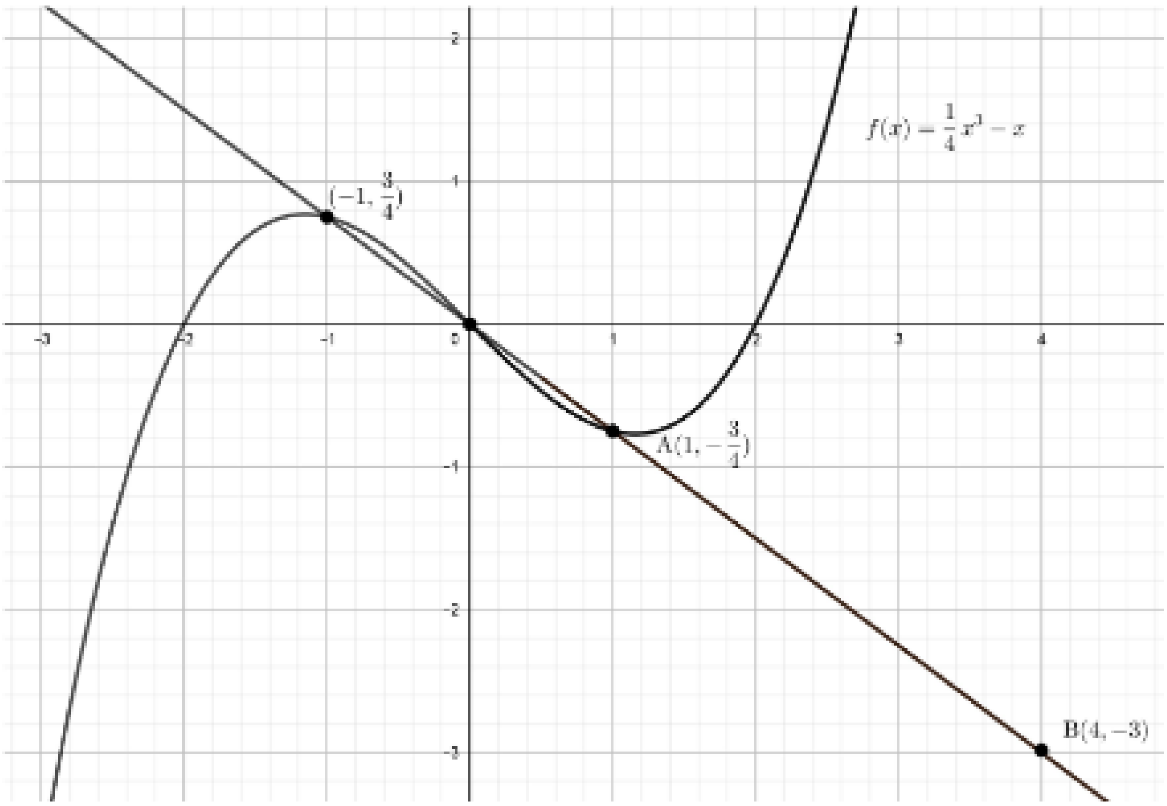
i. Για κάθε $x\in\mathbb{R}$ ισχύει και $-x\in\mathbb{R}$. Έχουμε:

$$f(-x)=\frac{1}{4}(-x)^3-(-x)=-\frac{1}{4}x^3+x=-\left(\frac{1}{4}x^3-x\right)=-f(x).$$

ii. Στο βi) αποδείξαμε ότι $f(-x)=-f(x)$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$, δηλαδή ότι η f είναι περιττή. Συνεπώς η γραφική της παράσταση είναι συμμετρική ως προς την αρχή των αξόνων $(0,0)$:



γ) Εξαιτίας της συμμετρίας της γραφικής παράστασης της f ως προς το $(0,0)$, το σημείο $\left(-1,\frac{3}{4}\right)$ θα ανήκει στη γραφική παράσταση η οποία διέρχεται και από το $(0,0)$. Όμως τα σημεία αυτά ανήκουν και στην ευθεία AB. Άρα τα κοινά σημεία της ευθείας και της καμπύλης είναι τα $\left(1,-\frac{3}{4}\right)$, $(0,0)$ και $\left(-1,\frac{3}{4}\right)$.



Εναλλακτικά, θα λύσουμε την εξίσωση $\frac{1}{4}x^3 - x = -\frac{3}{4}x$. Έχουμε ισοδύναμα:

$$\frac{1}{4}x^3 - x = -\frac{3}{4}x \Leftrightarrow$$
$$x^3 - 4x + 3x = 0 \Leftrightarrow$$
$$x^3 - x = 0 \Leftrightarrow$$
$$x\left(x^2 - 1\right) = 0 \Leftrightarrow$$
$$x = 0 \text{ ή } x = 1 \text{ ή } x = -1.$$

Άρα τα κοινά σημεία είναι τα $\left(1,-\frac{3}{4}\right)$, $(0,0)$ και $\left(-1,\frac{3}{4}\right)$.

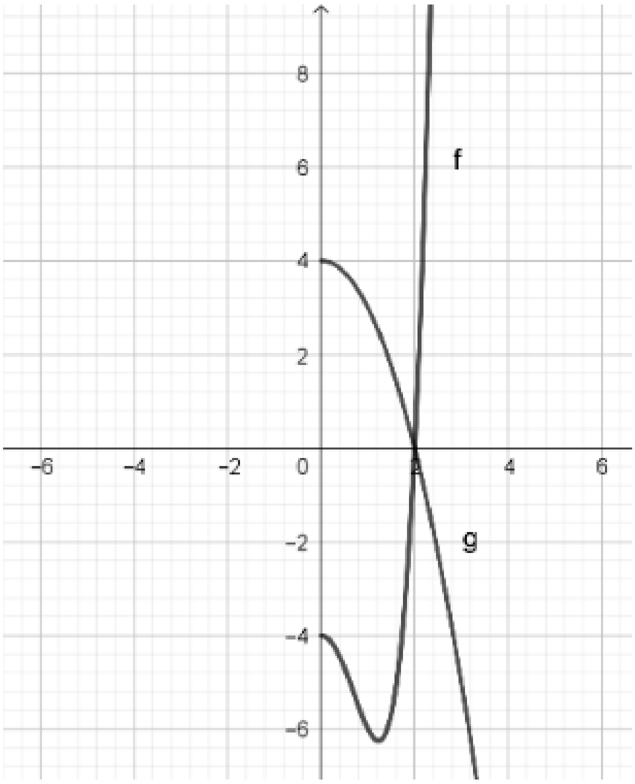
6. **4^o ΘΕΜΑ** #15790.

Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x)=x^4-3x^2-4$ και $g(x)=-x^2+4$ με πεδίο ορισμού το $\mathbb{R}$.

α) Να δείξετε ότι $f(-x)=f(x)$ και $g(-x)=g(x)$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

(Μονάδες 7)

β) Στο παρακάτω σχήμα δίνεται μέρος των γραφικών παραστάσεων των συναρτήσεων f και g.



Αφού μεταφέρετε το σχήμα στην κόλλα σας, να συμπληρώσετε τις γραφικές παραστάσεις σε όλο το $\mathbb{R}$. Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

(Μονάδες 6)

γ) Να λύσετε , αλγεβρικά ή γραφικά:

i. την εξίσωση $f(x)=g(x)$.

(Μονάδες 6)

ii. την ανίσωση $f(x)<g(x)$.

(Μονάδες 6)

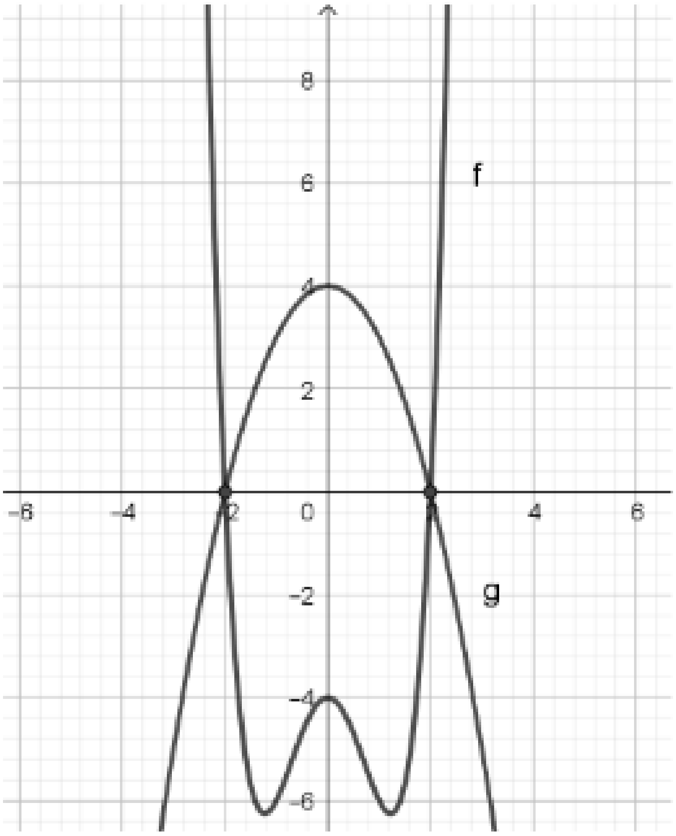
ΛΥΣΗ

α) Οι συναρτήσεις f και g έχουν πεδίο ορισμού το $\mathbb{R}$, άρα έχουμε $x \in \mathbb{R} \Rightarrow -x \in \mathbb{R}$.

Επιπλέον $f(-x) = (-x)^4 - 3(-x)^2 - 4 = x^4 - 3x^2 - 4 = f(x)$.

Όμοια $g(-x) = -(-x)^2 + 4 = -x^2 + 4 = g(x)$.

β) Από το α) ερώτημα οι συναρτήσεις f και g είναι άρτιες. Η γραφική παράσταση άρτιας συνάρτησης είναι συμμετρική ως προς τον άξονα $y'y$. Επομένως οι γραφικές παραστάσεις των f και g συμπληρώνονται όπως φαίνεται στο παρακάτω σχήμα.



γ)

i. Έχουμε $f(x) = g(x) \Leftrightarrow x^4 - 3x^2 - 4 = -x^2 + 4 \Leftrightarrow x^4 - 2x^2 - 8 = 0$. (1)

Θέτουμε $x^2 = y$, οπότε (1): $y^2 - 2y - 8 = 0$ με $\Delta = 36$ και $y_1 = -2, y_2 = 4$, άρα $x^2 = -2$ που είναι αδύνατη ή $x^2 = 4 \Leftrightarrow x = -2$ ή $x = 2$ που είναι οι ζητούμενες λύσεις.

ii. Γραφικά, λύση της ανίσωσης $f(x) < g(x)$ είναι οι τιμές του x για τις οποίες η γραφική παράσταση της g είναι πάνω από την γραφική παράσταση της f. Οπότε η ανίσωση αληθεύει για $x \in (-2, 2)$.

7. **4^o ΘΕΜΑ** #15094.

Το διάστημα $S(t)$ σε μέτρα που έχει διανύσει ένα κινητό τη χρονική στιγμή t σε δευτερόλεπτα, δίνεται από τη σχέση: $S(t) = 2t^3 - 6t^2 + 10t$

α) Να βρείτε το διάστημα που έχει διανύσει το κινητό τις χρονικές στιγμές $t = 0$ και $t = 2$.

(Μονάδες 03)

β) Να βρείτε πόσο χρόνο χρειάζεται το κινητό για να διανύσει απόσταση *30* μέτρων.

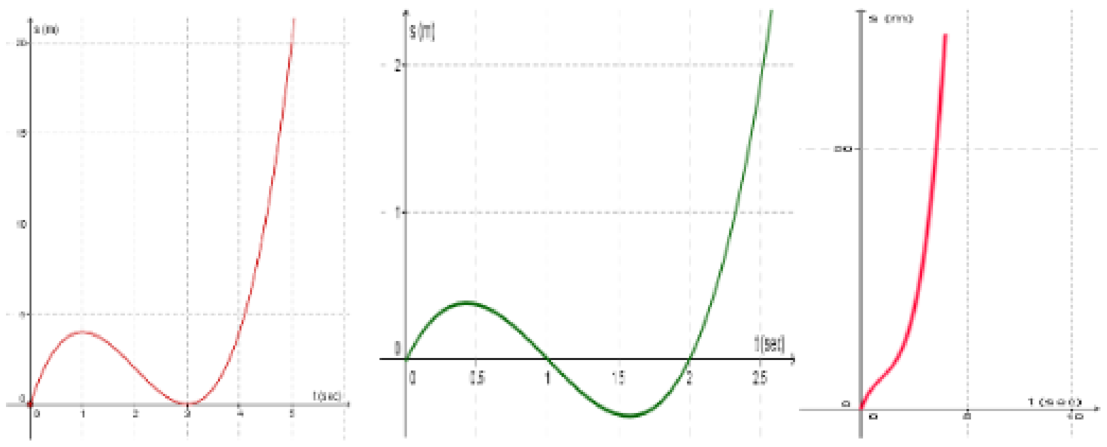
(Μονάδες 10)

γ) Επειδή το $S(t)$ εκφράζει το διάστημα που διανύει το κινητό, θα πρέπει να είναι πάντα μη αρνητικό. Να αποδείξετε αλγεβρικά αυτόν τον ισχυρισμό.

(Μονάδες 08)

δ) Δίνονται οι γραφικές παραστάσεις τριών πολυωνύμων $S(t)$. Μία από αυτές εκφράζει το διάστημα $S(t)$ της εκφώνησης. Να βρείτε ποια από τις τρεις είναι αυτή, δικαιολογώντας την απάντησή σας.

(Μονάδες 04)



(I) (II) (III)

ΛΥΣΗ

α) $S(0) = 0$ (το κινητό βρίσκεται στην αφετηρία) και $S(2) = 2 \cdot 8 - 6 \cdot 4 + 20 = 12$ μέτρα.

β) $S(t) = 30 \Leftrightarrow 2t^3 - 6t^2 + 10t = 30 \Leftrightarrow t^3 - 3t^2 + 5t - 15 = 0$ (1).

Πιθανές ακέραιες ρίζες της (1) είναι οι ± 1, ± 3, ± 5, ± 15. Επειδή ο χρόνος είναι μη αρνητικό φυσικό μέγεθος, πιθανές ρίζες είναι οι 1, 3, 5, 15.

Η τιμή $t = 3$ επαληθεύει την εξίσωση και με τη βοήθεια του σχήματος Horner, έχουμε:

1	−3	5	−15	3
	3	0	15	
1	0	5	0	

Άρα η (1) $\Leftrightarrow (t-3)(t^2+5) = 0 \Leftrightarrow t = 3$.

Επομένως το κινητό θα χρειαστεί *3* δευτερόλεπτα για να διανύσει απόσταση *30* μέτρων.

γ) Πραγματικά, έχουμε:

$S(t) = 2t^3 - 6t^2 + 10t = 2t(t^2 - 3t + 5) \geq 0$,

διότι $t \geq 0$ (εκφράζει το χρόνο)

και $t^2 - 3t + 5 > 0$ (το τριώνυμο έχει διακρίνουσα $\Delta = -11 < 0$, επομένως είναι πάντα ομόσημο του συντελεστή του t^2).

δ) Με βάση το φυσικό πλαίσιο του προβλήματος, η συνάρτηση $S(t)$ πρέπει να είναι μη αρνητική και σε κανένα χρονικό διάστημα γνήσια φθίνουσα. Επομένως, είναι:

Η (I) είναι μεν μη αρνητική, αλλά δε διατηρεί το ίδιο είδος μονοτονίας.

Η (II) παίρνει και αρνητικές τιμές.

Η (III) είναι μη αρνητική και γνησίως αύξουσα παντού, ως εκ τούτου αποτελεί την ενδεδειγμένη απάντηση.

8. **4^o ΘΕΜΑ** #15037.

Στο σχήμα φαίνονται οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεις $f(x) = \sqrt{x+3}$ και

$g(x) = 3x - 1$.

α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού και τη μονοτονία των συναρτήσεων f, g.

(Μονάδες 4)

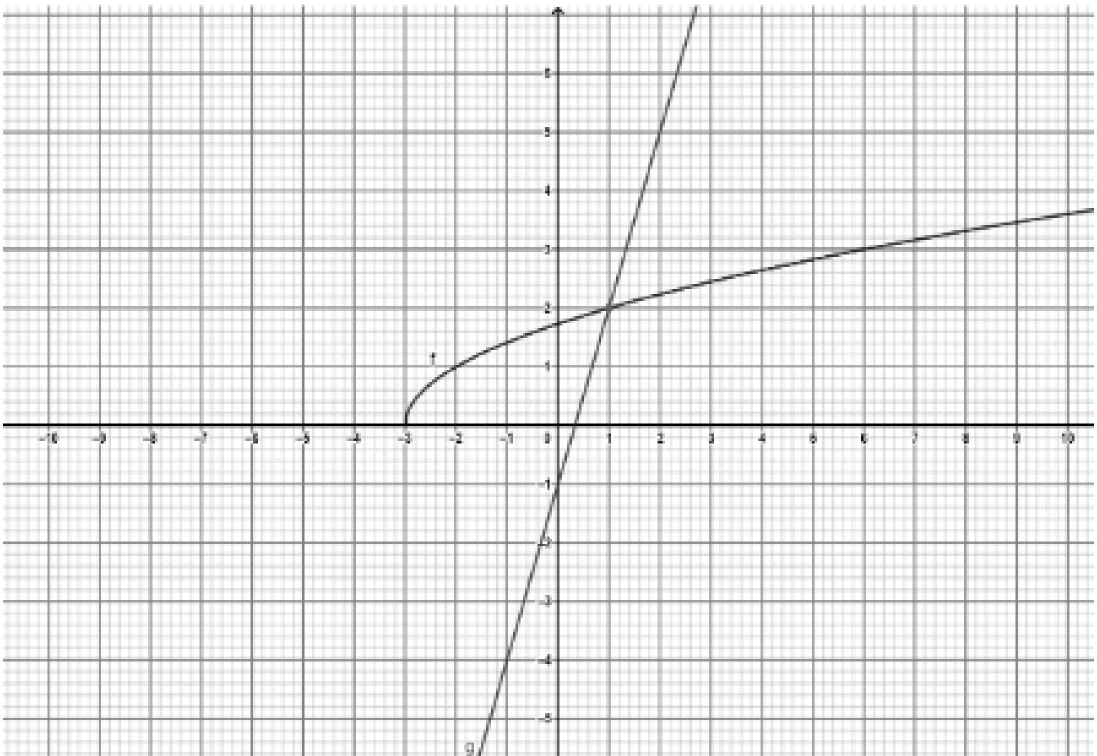
β) Να λύσετε την εξίσωση $f(x) = g(x)$.

(Μονάδες 6)

γ)

i. Να λύσετε γραφικά την ανίσωση $f(x) < g(x)$. (Μονάδες 7)

ii. Να επιβεβαιώσετε αλγεβρικά το αποτέλεσμα του i ερωτήματος. (Μονάδες 8)



ΛΥΣΗ

α) Η συνάρτηση f ορίζεται μόνο για $x + 3 \geq 0$, δηλαδή για $x \geq -3$.

Άρα, το πεδίο ορισμού της f είναι: $A_f = [-3, +\infty)$.

Σύμφωνα με το σχήμα η f είναι γνησίως αύξουσα στο $[-3, +\infty)$.

Η συνάρτηση g παριστάνει ευθεία για κάθε πραγματική τιμή του x και είναι γνησίως

αύξουσα στο $\mathbb{R}$, εφόσον είναι της μορφής $y = \alpha x + \beta$ με $\alpha > 0$.

β) Οι ρίζες της εξίσωσης $f(x) = g(x) \Leftrightarrow \sqrt{x + 3} = 3x - 1$ είναι οι τετμημένες των κοινών σημείων των C_f και C_g που ανήκουν στο σύνολο $A = A_f \cap A_g = [-3, +\infty)$.

Από το σχήμα παρατηρούμε πως οι γραφικές παραστάσεις τέμνονται στο σημείο (1,2), δηλαδή στο σημείο με τετμημένη x=1 και $1 \epsilon A$.

Άρα, η εξίσωση έχει μοναδική λύση x=1.

β) **Εναλλακτική λύση :**

Οι ρίζες της εξίσωσης $f(x) = g(x)$ προκύπτουν από τις λύσεις της παρακάτω εξίσωσης

$$\sqrt{x + 3} = 3x - 1.$$

Η εξίσωση ορίζεται για $x \geq -3$ και $3x - 1 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq \frac{1}{3}$.

$\sqrt{x + 3} = 3x - 1$ υψώνουμε και τα δυο μέλη στο τετράγωνο

$\sqrt{x + 3}^2 = (3x - 1)^2 \Leftrightarrow x + 3 = 9x^2 - 6x + 1 \Leftrightarrow 9x^2 - 7x - 2 = 0$.

Οι ρίζες του τριωνύμου είναι 1 και $-\frac{2}{9}$. Από τις ρίζες αυτές διαπιστώνουμε με επαλήθευση ότι μόνο η x=1 είναι δεκτή.

Άρα, μοναδική λύση της εξίσωσης $f(x) = g(x)$ είναι η x=1.

γ) i. Η ανίσωση $f(x) < g(x)$ λύνεται γραφικά με το να βρούμε τις τετμημένες, δηλαδή τα x, όπου η C_f είναι κάτω από C_g.

Από το σχήμα προκύπτει πως αυτό συμβαίνει για $x \epsilon (1, +\infty)$.

ii. Αλγεβρικά η ανίσωση λύνεται:

Για $3x - 1 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq \frac{1}{3}$ και $x \geq -3$, έχουμε

$$f(x) < g(x) \Leftrightarrow \sqrt{x+3} < 3x - 1 \Leftrightarrow \sqrt{x+3}^2 < (3x-1)^2 \Leftrightarrow$$

$$x + 3 < 9x^2 - 6x + 1 \Leftrightarrow$$

$$9x^2 - 7x - 2 > 0 \text{ τότε}$$

$$x\epsilon(-\infty, -\tfrac{2}{9}) \cup (1, +\infty).$$

Σύμφωνα με τους περιορισμούς η ανίσωση αληθεύει για $x\epsilon(1, +\infty)$.

Για $3x - 1 < 0 \Leftrightarrow x < \frac{1}{3}$ και $x \geq -3$, έχουμε $\sqrt{x+3} < 3x - 1$ αδύνατη.

Δεν είναι σωστή η παραπάνω ισοδυναμία. Η σωστή μαθηματικά ισοδυναμία των προτάσεων είναι:

$$\begin{aligned}
f(x) < g(x) &\Leftrightarrow \sqrt{x+3} < 3x - 1 \wedge x \geq -3 \wedge x \geq \frac{1}{3} \\
&\Leftrightarrow \left(\sqrt{x+3}\right)^2 < (3x-1)^2 \wedge x \geq -3 \wedge x \geq \frac{1}{3} \\
&\Leftrightarrow 9x^2 - 7x - 2 > 0 \wedge x \geq -3 \wedge x \geq \frac{1}{3} \\
&\Leftrightarrow x \in \left(-\infty, -\frac{2}{9}\right) \cup (1, +\infty) \wedge x \geq -3 \wedge x \geq \frac{1}{3} \\
&\Leftrightarrow x \in (1, +\infty)
\end{aligned}$$

Επομένως, αν μια συνιστώσα στη διάζευξη πρόταση δεν ισχύει, τότε το αποτέλεσμα είναι ψευδές.

9. **4^o ΘΕΜΑ** #15960.

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x^4 + \kappa x - 1$, με $\kappa \in \mathbb{R}$.

α) Να βρείτε την τιμή του $\kappa \in \mathbb{R}$ για την οποία $f(-x) = f(x)$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

(Μονάδες 6)

β) Για $\kappa = 0$,

i. να δείξετε ότι η συνάρτηση f είναι γνησίως φθίνουσα στο διάστημα $(-\infty, 0]$,

(Μονάδες 6)

ii. να δείξετε ότι $f(x) \geq -1$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$,

(Μονάδες 6)

iii. να βρείτε τα $x \in \mathbb{R}$ για τα οποία η γραφική παράσταση της f βρίσκεται κάτω από τον άξονα $x'x$.

(Μονάδες 7)

ΛΥΣΗ

α) Το πεδίο ορισμού της συνάρτησης f είναι το σύνολο των πραγματικών αριθμών $\mathbb{R}$.

Για τη συνάρτηση f έχουμε:

$f(-x) = f(x) \Leftrightarrow (-x)^4 + \kappa(-x) - 1 = x^4 + \kappa x - 1 \Leftrightarrow x^4 - \kappa x - 1 = x^4 + \kappa x - 1 \Leftrightarrow$ $2\kappa x = 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Άρα το $2\kappa x$ είναι το μηδενικό πολυώνυμο, οπότε $2\kappa = 0$ και ισοδύναμα $\kappa = 0$.

β) Για $\kappa = 0$, η συνάρτηση f είναι: $f(x) = x^4 - 1$.

i. Με $x_1 < x_2 \leq 0 \Leftrightarrow {x_1}^4 > {x_2}^4 \Leftrightarrow {x_1}^4 - 1 > {x_2}^4 - 1$

Άρα: $f(x_1) > f(x_2)$. Επομένως η συνάρτηση f είναι γνησίως φθίνουσα για $x \in (-\infty, 0]$.

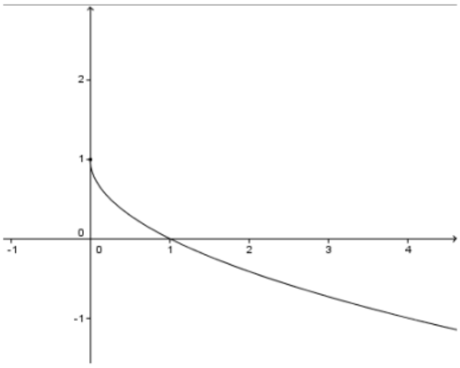
ii. Έχουμε: $f(x) \geq -1 \Leftrightarrow x^4 - 1 \geq -1 \Leftrightarrow x^4 \geq 0$, που ισχύει για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

iii. Για να βρούμε τα $x \in \mathbb{R}$ για τα οποία η γραφική παράσταση της f βρίσκεται κάτω από τον άξονα $x'x$, λύνουμε την ανίσωση:

$f(x) < 0 \Leftrightarrow x^4 - 1 < 0 \Leftrightarrow (x^2 - 1) \cdot (x^2 + 1) < 0 \overset{x^2+1>0}{\Longleftrightarrow} x^2 - 1 < 0 \Leftrightarrow$ $(x - 1) \cdot (x + 1) < 0$.

Άρα $x \in (-1,1)$. Επομένως η γραφική παράσταση της συνάρτησης f βρίσκεται κάτω από τον άξονα $x'x$ για $x \in (-1,1)$.

10. **4^o ΘΕΜΑ** #15270.



Στο διπλανό σχήμα δίνεται η γραφική παράσταση μιας συνάρτησης $f:[0,+\infty)\to\mathbb{R}$.

α) Να βρείτε την μονοτονία της και την μέγιστη τιμή της.

(Μονάδες 6)

β) Αν $f\left(\frac{1}{4}\right)=\frac{1}{2}$, και $0<\alpha<\frac{1}{4}<\beta$, να βρείτε το πρόσημο του γινομένου $P=(2f(\alpha)-1)(2f(\beta)-1)$

(Μονάδες 10)

γ) Έστω ότι η συνάρτηση του προβλήματος είναι η $f(x)=1-\sqrt{x}, x\geq 0$. Να βρείτε τα κοινά σημεία της γραφικής της παράστασης με την ευθεία $y=2x$.

(Μονάδες 9)

ΛΥΣΗ

α) Από το σχήμα της εκφώνησης προκύπτει ότι η f είναι γνησίως φθίνουσα στο πεδίο ορισμού της. Επίσης, η μέγιστη τιμή της είναι ίση με 1 και επιτυγχάνεται όταν $x=0$.

β) Από την ανισότητα $\alpha<\frac{1}{4}$ και τη μονοτονία της f συμπεραίνουμε ότι $f(\alpha)>f\left(\frac{1}{4}\right)\Rightarrow f(\alpha)>\frac{1}{2}$, οπότε $2f(\alpha)-1>0$.

Επίσης, $\beta>\frac{1}{4}$, οπότε $f(\beta)<f\left(\frac{1}{4}\right)\Rightarrow f(\beta)<\frac{1}{2}$, απ' όπου προκύπτει ότι $2f(\beta)-1<0$.

Άρα, $P=(2f(\alpha)-1)(2f(\beta)-1)<0$.

γ) Οι τετμημένες των κοινών σημείων της γραφικής παράστασης C_f της f με την ευθεία, δίνονται από τη λύση της εξίσωσης $f(x)=2x$. Με $x\geq 0$ έχουμε:

$$f(x)=2x \Leftrightarrow 1-\sqrt{x}=2x \Leftrightarrow 2x+\sqrt{x}-1=0$$

Αν θέσουμε $\sqrt{x}=u$, τότε η εξίσωση γράφεται $2u^2+u-1=0$ και έχει λύσεις τους αριθμούς -1 και $\frac{1}{2}$. Έτσι έχουμε:

- $u=-1$: $\sqrt{x}=-1$ που είναι αδύνατη.
- $u=\frac{1}{2}$: $\sqrt{x}=\frac{1}{2}\Leftrightarrow x=\frac{1}{4}$

Άρα το μοναδικό κοινό σημείο της C_f με την ευθεία είναι το $A\left(\frac{1}{4},\frac{1}{2}\right)$.

Εναλλακτική λύση του ερωτήματος γ)

Παρατηρούμε ότι ο αριθμός $\frac{1}{4}$ είναι λύση της εξίσωσης $f(x)=2x$. Επιπλέον:

- Αν $x>\frac{1}{4}$, τότε $2x>\frac{1}{2}$ και $f(x)<\frac{1}{2}$, οπότε $f(x)\neq 2x$.
- Αν $0\leq x<\frac{1}{4}$, τότε $2x<\frac{1}{2}$ και $f(x)>\frac{1}{2}$, οπότε $f(x)\neq 2x$.

Επομένως η εξίσωση $f(x)=2x$ έχει μοναδική λύση την $x=\frac{1}{4}$ και το μοναδικό κοινό σημείο της C_f με την ευθεία είναι το $A\left(\frac{1}{4},\frac{1}{2}\right)$.

11. **4^o ΘΕΜΑ** #15066.

Θεωρούμε το πολυώνυμο $P(x)=2x^4-5x^3+4x^2-5x+2$.

α) Να αποδείξετε ότι:

i. Ο αριθμός 0 δεν είναι ρίζα του.

ii. Αν ο αριθμός ρ είναι ρίζα του, τότε και ο αριθμός $\frac{1}{\rho}$ είναι επίσης ρίζα του.

(Μονάδες 8)

β) Να βρείτε ένα θετικό ακέραιο αριθμό που να είναι ρίζα του.

(Μονάδες 5)

γ) Να λύσετε την εξίσωση $P(x)=0$.

(Μονάδες 7)

δ) Να λύσετε την ανίσωση $P(x)<0$.

(Μονάδες 5)

ΛΥΣΗ

α) i. Επειδή $P(0)=2\neq 0$, το πολυώνυμο δεν έχει λύση τον αριθμό 0.

ii. Αν ο αριθμός ρ είναι ρίζα του πολυωνύμου, τότε ισχύει $P(\rho)=0$ δηλαδή

$$2\rho^4-5\rho^3+4\rho^2-5\rho+2=0,\ (1).$$

Για να αποδείξουμε ότι ο αριθμός $\frac{1}{\rho}$ είναι επίσης ρίζα του, αρκεί να δείξουμε ότι $P\left(\frac{1}{\rho}\right)=0$.

Πραγματικά, είναι:

$$P\left(\frac{1}{\rho}\right)=\frac{2}{\rho^4}-\frac{5}{\rho^3}+\frac{4}{\rho^2}-\frac{5}{\rho}+2=\frac{1}{\rho^4}\left(2-5\rho+4\rho^2-5\rho^3+2\rho^4\right)=0$$

λόγω της (1).

β) Επειδή οι μοναδικοί θετικοί ακέραιοι αριθμοί που μπορεί να είναι ρίζες του είναι οι θετικοί διαιρέτες του 2, με $x=2$ έχουμε:

$$P(2)=2\cdot 16-5\cdot 8+4\cdot 4-5\cdot 2+2=50-50=0$$

οπότε ο αριθμός 2 είναι θετική ακέραια ρίζα του πολυωνύμου.

γ) Η εξίσωση $P(x)=0$ έχει ρίζα τον αριθμό 2 και λόγω του ερωτήματος α) έχει ρίζα και τον αριθμό $\frac{1}{2}$.

Έτσι, με τη βοήθεια του σχήματος Horner έχουμε:

2	-5	4	-5	2	2
	4	-2	4	-2	
2	-1	2	-1	0	

$$P(x)=(x-2)(2x^3-x^2+2x-1)$$

και αν επαναλάβουμε τη διαδικασία για το πολυώνυμο $2x^3-x^2+2x-1$ με το $\frac{1}{2}$

2	-1	2	-1	$\frac{1}{2}$
	1	0	1	
2	0	2	0	

συμπεραίνουμε ότι

$$P(x)=(x-2)\left(x-\frac{1}{2}\right)(2x^2+2)=(x-2)(2x-1)(x^2+1)$$

οπότε

$$P(x)=0 \Leftrightarrow x=2 \text{ ή } x=\frac{1}{2}.$$

δ) Επειδή για κάθε $x\in\mathbb{R}$ ισχύει $x^2+1>0$, το πρόσημο του πολυωνύμου είναι ίδιο με το πρόσημο του τριωνύμου $(x-2)(2x-1)$. Έτσι έχουμε τον παρακάτω πίνακα προσήμων.

x	$-\infty$		$\frac{1}{2}$		2		$+\infty$
$(x-2)(2x-1)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

Από τον πίνακα προκύπτει ότι λύση της ανίσωσης $P(x)<0$ είναι κάθε αριθμός του διαστήματος $\left(\frac{1}{2},\,2\right)$.

12. **4^o ΘΕΜΑ** #15250.

Δίνεται το πολυώνυμο $\mathrm{P}(x)=x^5-4x^3-x^2+\alpha x+\beta$ το οποίο διαιρούμενο με το x^2-4 δίνει υπόλοιπο $4x+1$.

α) Να κάνετε τη διαίρεση $\mathrm{P}(x):(x^2-4)$.

(Μονάδες 7)

β) Να βρείτε τις τιμές των α και β.

(Μονάδες 7)

γ) Έστω $\alpha=4$ και $\beta=5$. Αν το πηλίκο της διαίρεσης $\mathrm{P}(x):(x^2-4)$ είναι το $\pi(x)=x^3-1$, τότε:

i. να γράψετε την ταυτότητα της διαίρεσης $\mathrm{P}(x):(x^2-4)$.

(Μονάδες 4)

ii. να λύσετε την ανίσωση $\mathrm{P}(x)<4x+1$.

(Μονάδες 7)

ΛΥΣΗ

α) Η διαίρεση $\mathrm{P}(x):(x^2-4)$ φαίνεται παρακάτω

$$
\begin{array}{r|l}
x^5-4x^3-x^2+\alpha x+\beta & x^2-4 \\ \cline{2-2}
-x^5+4x^3 \qquad\qquad\quad & x^3-1 \\ \cline{1-1}
-x^2+\alpha x+\beta & \\
x^2 \qquad\; -4 & \\ \cline{1-1}
\alpha x+\beta-4 &
\end{array}
$$

β) Από το α) ερώτημα έχουμε ότι το υπόλοιπο της διαίρεσης $\mathrm{P}(x):(x^2-4)$ είναι το πολυώνυμο $\alpha x+\beta-4$. Όμως από την εκφώνηση δίνεται ότι είναι το πολυώνυμο $4x+1$. Συνεπώς τα πολυώνυμα $\alpha x+\beta-4$ και $4x+1$ πρέπει να είναι ίσα, δηλαδή $\alpha=4$ και $\beta=5$.

γ) Για $\alpha=4$ και $\beta=5$ έχουμε $\mathrm{P}(x)=x^5-4x^3-x^2+4x+5$.

i. Η ταυτότητα της διαίρεσης $\mathrm{P}(x):(x^2-4)$ είναι $\mathrm{P}(x)=(x^2-4)(x^3-1)+4x+1$.

ii. Αξιοποιώντας την ταυτότητα της διαίρεσης που βρήκαμε παραπάνω έχουμε $\mathrm{P}(x)<4x+1 \Leftrightarrow (x^2-4)(x^3-1)+4x+1<4x+1 \Leftrightarrow (x^2-4)(x-1)(x^2+x+1)<0$.

Το πρόσημο του πολυωνύμου $\Pi(x)=(x^2-4)(x-1)(x^2+x+1)$ φαίνεται στον παρακάτω πίνακα.

x	$-\infty$		-2		1		2		$+\infty$
x^2-4		+	0	-		-	0	+	
$x-1$		-		-	0	+		+	
x^2+x+1		+		+		+		+	
$\Pi(x)$		-	0	+	0	-	0	+	

Συνεπώς η ζητούμενη ανίσωση αληθεύει για κάθε $x\in(-\infty,-2)\cup(1,2)$.

4.4 ΤΟ ΘΕΩΡΗΜΑ BOLZANO

Το θεώρημα συμπεριλαμβάνεται στο νέο αναλυτικό πρόγραμμα του 2021/2. Ας αρχίσουμε από την προϊστορία του θεωρήματος.

Το θεώρημα δινόταν στην αρχή γραφικά χωρίς αυστηρή απόδειξη. Η πρώτη απόπειρα απόδειξης έγινε από τον Bolzano και από τότε φέρει το όνομά του.

Θεώρημα 4.4.1 *(Θεώρημα Bolzano για πολυώνυμα) Έστω η πολυωνυμική συνάρτηση:*

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0,\ a_i \in \mathbb{R},\ a_n \neq 0$$

Αν για δύο πραγματικούς αριθμούς α και β με $\alpha < \beta$ το γινόμενο

$$f(\alpha)f(\beta) < 0$$

τότε υπάρχει τουλάχιστον μια ρίζα της $f(x) = 0$ στο διάστημα $[\alpha, \beta]$.

Το θεώρημα είναι αντικείμενο της Ανάλυσης. Η απόδεξη όμως δεν είναι κατασκευαστική αλλά δίνει μια καλή εικόνα το πως αυτός ο μαθηματικός τομέας αντιλαμβάνεται, κάτω από κάποιες προϋποθέσεις, την ύπαρξη της ρίζας της εξίσωσης $f(x) = 0$. Μπορείτε να δείτε ότι το θεώρημα δεν προτείνει μια συστηματική μεθοδολογία προσδιορισμού των ριζών μιας εξίσωσης. Αντίθετα, το Θεώρημα ενδιάμεσων τιμών με το επιχείρημα της διχοτομίας διαστήματος, είναι σαφέστερο και έχει μια γεωμετρική σημασία με πλούσιο διδακτικό περιεχόμενο.

Η μέθοδος της διχοτόμησης διαστήματος είναι ακριβής γιατί είναι κατασκευαστική. Μας δίνει έναν αλγόριθμο (κακής πολυπλοκότητας εκ πρώτης όψεως) που μας επιτρέπει να κατασκευάσουμε δύο ακολουθίες (a_n) και (b_n) που συγκλίνουν στη λύση της εξίσωσης $f(x) = \eta$ με άγνωστο το x. Αυτή η λύση, έστω x_0, είναι τέτοια ώστε $a_n \leq x_0 \leq b_n$, $\forall n \in \mathbb{N}$, και $b_n - a_n = \dfrac{\beta - \alpha}{2^n}$. Έτσι λοιπόν

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad 0 \leq x_0 - a_n \leq \frac{\beta - \alpha}{2^n}$$

Συνεπώς μπορούμε να προσεγγίσουμε τη λύση x_0 από την ακολουθία (a_n) προσδιορίζοντας τον φυσικό n με οποιαδήποτε ακρίβεια θέλουμε εκ των προτέρων καθορισμένη από έναν θετικό πραγματικό αριθμό ε έτσι ώστε $\dfrac{\beta - \alpha}{2^n} \leq \varepsilon$.

Μέθοδοι προσέγγισης των πραγματικών ριζών εξισώσεων $f(x) = 0$ έχουν εισαχθεί σε αναλυτικά προγράμματα και αφορούν την επαναληπτική μέθοδο τη μέθοδο του Newton και τη μέθοδο της παρεμβολής. Έτσι, το θεώρημα Bolzano αποκτά νόημα μόνο όταν ενσωματωθεί σε μια διαδικασία συνεχούς προσέγγισης όπως για παράδειγμα στη μέθοδο του Newton που χρησιμοποιείται για να δώσει πρώτες εκτιμήσεις των ριζών. Σημειώνουμε εδώ ότι σήμερα χρησιμοποιούμε ακριβέστερες και ταχύτερες μεθόδους προσδιορισμού του αριθμού των πραγματικών ριζών πολυωνύμων όπως οι ακολουθίες Sturm - Habicht ή συνδιασμούς μεθοδολογιών.

Το θεώρημα Bolzano έχει επιστημολογικό ενδιαφέρον στη Γεωμετρία. Επίσης, παρεπιπτόντως στη Γεωμετρία μπορούμε να έχουμε μια σειρά ασκήσεων που θα ενισχύσουν μια πολύμορφη και αξιόπιστη αξιολόγηση του γνωστικού αντικειμένου και των συναφών δεξιοτήτων. Η τροχιά όμως αυτή που τονίζει τα γεωμετρικά χαρακτηριστικά του θεωρήματος, δεν υποστηρίζεται από κανένα Αναλυτικό Πρόγραμμα.

4.4.1 Το θεώρημα στα Στοιχεία του Ευκλείδη

Η πρώτη πρόταση των Στοιχείων, Πρόταση (Ι.1), αφορά μια κατασκευή που μοιάζει αυτονόητη. Ίσως μας εκπλήσσει η φαινομενική της αφέλεια αλλά είναι ενδιαφέρον αυτό που θέλει να πεί όσο και αυτό που δεν λέει.

Πρόταση 4.4.1 *(Πρόταση (Ι.1) των Στοιχείων) Με πλευρά δεδομένο ευθ. τμήμα να κατασκευασθεί ισόπλευρο τρίγωνο.*

Αν παρατηρήσετε τον συλλογισμό της κατασκευής θα προσέξατε ότι δεν υπάρχει αξίωμα, ή πρότερη πρόταση, που να εξασφαλίζει ότι η τομή δύο κύκλων υπάρχει! Γιατί ο Ευκλείδης δεν αισθάνθηκε την ανάγκη να πεί πότε τέμνονται δύο κύκλοι όπως έκανε στο 5ο αίτημα για τις ευθείες; Το θεώρησε δεδομένο;

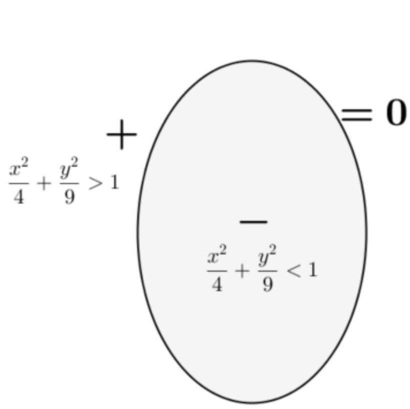
Υπάρχουν δύο διακριτά θέματα πάνω στο σημείο αυτό τα οποία ο Ευκλείδης ίσως δεν έδωσε σημασία:

Το πρώτο αφορά τη σχετική θέση καμπυλών ή τη σχέση της ενδιαμεσότητας, όπως θα την δούμε στην αξιωματική θεμελίωση του Hilbert και δεύτερο την συνέχεια μιας γραμμής ή μιας καμπύλης.

Γνωρίζουμε ότι δύο κύκλοι τέμνονται αν βρεθούν σε μια συγκεκριμμένη θέση μεταξύ τους. Αν οι κύκλοι δεν έχουν κοινά εσωτερικά σημεία τότε δεν τέμνονται, αν όμως υπάρχει ένα μέρος του ενός που έχει εσωτερικά κοινά σημεία με τον άλλον και ένα μέρος του έχει εξωτερικά με τον ίδιο κύκλο, τότε οι κύκλοι τέμνονται. Δηλαδή κατά κάποιο τρόπο οι κύκλοι τέμνονται αν *διασταυρώνονται*. Το τι σημαίνει ότι οι κύκλοι διασταυρώνονται ο Ευκλείδης το επιλύει παρακάτω στη κατασκευή τριγώνου όταν δίνονται τα τρία ευθ. τμήματα των πλευρών του, α, β και γ. Την έννοια αυτή θα την διευκρινήσει μετέπειτα ο Hilbert. Στο σημείο αυτό η αναφορά στο θεώρημα του Bolzano είναι εμφανής.

Το δεύτερο θέμα αφορά τη συνέχεια. Πρέπει να υποθέσουμε ότι υπάρχει κάτι για να τμηθεί. Σήμερα, λέμε ότι αυτό συμβαίνει επειδή οι καμπύλες είναι συνεχείς και η ύπαρξη του κοινού σημείου ακολουθεί το θεώρημα Bolzano.

Άρα, δεν αρκεί μόνο εν γένει η σχετική θέση δύο καμπυλών να είναι τέτοια ώστε οι καμπύλες να τέμνονται, αλλά πρέπει επιπλέον οι καμπύλες να είναι συνεχείς με την σύγχρονη έννοια της τοπολογίας. Αυτό ήταν εντελώς άγνωστο στην εποχή του Ευκλείδη. Για τον λόγο αυτό ο μεγάλος γεωμέτρης από καθαρή μαθηματική διαίσθηση αφήνει τη πρώτη πρόταση των Στοιχείων *ανοικτή* στο διάλογο τον οποίο φυσικά δεν μπορεί να τον προσδιορίσει.



Η γεωμετρική προσέγγιση του θεωρήματος του Bolzano μέσα από τα Στοιχεία του Ευκλείδη έχει πλούσιο διδακτικό υλικό που απαρτίζεται από έννοιες και κατασκευές γνωστές σε ένα μαθητή της Β Λυκείου. Επίσης κάθε καμπύλη στην Αναλυτική Γεωμετρία, για παράδειγμα μια έλλειψη, ορίζει περιοχές σημείων στο επίπεδο ανάλογα με το πρόσημο των συντεταγμένων των σημείων της περιοχής στο τύπο της καμπύλης, όπως φαίνεται στο σχήμα. Ο προσανατολισμός του επιπέδου σε περιοχές θετικές, μηδενικές και αρνητικές δείχνει την αντιστοιχία με το θεώρημα Bolzano.

4.4.2 Το θεώρημα στον προσδιορισμό του αριθμού των πραγματικών ριζών εξισώσεων

Αν θέλουμε να εφαρμόσουμε το θεώρημα για να προσδιορίσουμε τον αριθμό των ριζών μιας πολυωνυμικής εξίσωσης $p(x) = 0$, πρέπει να έχουμε υπόψη κάποιες ακραίες περιπτώσεις για τις οποίες η μέθοδος δεν είναι αποτελεσματική. Το πρώτο πράγμα που πρέπει να κάνουμε ώστε να είναι το θεώρημα αποτελεσματικό, είναι να απαλλάξουμε το πολυώνυμο από τις πολλαπλές ρίζες. Για τον λόγο αυτό πρέπει να δουλέψουμε όχι απευθείας με το πολυώνυμα αλλά με το πηλίκο της διαίρεσης

$$p(x) \div GCD\big(p(x), p'(x)\big)$$

Το crash test της μεθόδου αφορά, μεταξύ άλλων, δύο ιδιάζουσες περιπτώσεις: πολυώνυμα με απομακρυσμένες ρίζες και πολυώνυμα με ρίζες πυκνές.

Πολυώνυμα με απομακρυσμένες ρίζες

Έστω το πολυώνυμο:

$$p(x) := 360x^5 - \frac{6001704}{5}x^4 + \frac{57005893}{50}x^3 - \frac{39668427}{100}x^2 + \frac{3000047}{50}x - \frac{333333}{100}$$

Η εξίσωση $p(x) = 0$ χει 5 ρίζες με προσέγγιση 10κάτου:

$$0.1666666667,\ 0.2000000000,\ 0.2500000000,\ 0.3333333333,\ 3333.330000$$

Για να προσδιορίσουμε τον αριθμό των πραγματικών ριζών πρέπει να επιλέξουμε κατάλληλο διάστημα. Υπάρχουν 3 γνωστά θεωρήματα που δίνουν το εύρος του διαστήματος των ριζών ενός πολυωνύμου:

Θεώρημα 4.4.2 *(Cauchy, 1829) Έστω*[5] *ρ μία ρίζα του πολυωνύμου*

$$p(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_0,\ a_n \neq 0$$

τότϵ

$$|\rho| \leq 1 + \max\left(\left|\frac{a_{n-1}}{a_n}\right|, \left|\frac{a_{n-2}}{a_n}\right|, \ldots, \left|\frac{a_0}{a_n}\right|\right)$$

■

Τα άλλα δύο θεωρήματα (Cauchy, 1829 και Knuth, 1981) δίνουν καλύτερα όρια αλλά δεν είναι εκμεταλεύσιμα από εμάς.

Το όριο του Cauchy για το πολυώνυμο $p(x)$ είναι $|\rho| = 3335.3$. Άρα, πρέπει να αναζητήσουμε τις ρίζες στο διάστημα

$$(-3335.3, 3335.3)$$

[5] Για την απόδειξη του θεωρήματος, δείτε άσκηση 41 σελίδα 51.

Πολυώνυμα με ρίζες πυκνές

Πρόκειται για τα γνωστά πολυώνυμα Mignotte. Τα πολυώνυμα αυτά είναι της μορφής:

$$x^n - 2(bx-1)^2,\ b \in \mathbb{R}^*$$

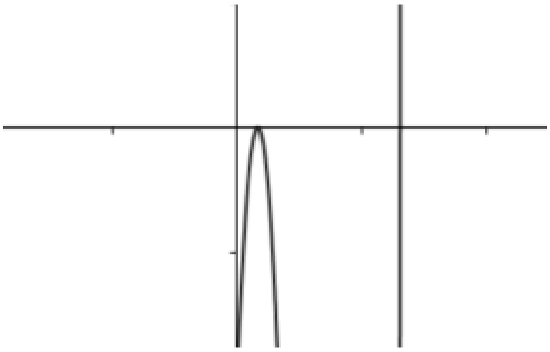
Ένα τέτοιο πολυώνυμο είναι το

$$p(x) = x^{17} - 2(6x-1)^2$$

με γράφημα που φαίνεται στο παρακάτω σχήμα. Το συγκεκριμένο πολυώνυμο έχει τρεις πραγματικές ρίζες που είναι οι εξής:

$$0.1666666380,\ 0.1666666953,\ 1.305918236$$

Όπως βλέπουμε οι δύο πρώτες ρίζες δεν διαχωρίζονται εύκολα, στο γράφημα φαίνεται σαν να έχει το πολυώνυμο διπλή ρίζα. Σε τέτοιες περιπτώσεις ο αριθμός των πραγματικών ριζών βρίσκεται με αλγορίθμους του Sturm ή Sturm - Habicht για τον διαχωρισμό των ριζών.



4.4.3 Το θεώρημα του Descartes

Θεώρημα 4.4.3 *(θεώρημα Descartes) Ο αριθμός των εναλλαγών των προσήμων των συντελεστών ενός πολυωνύμου δίνει ένα άνω φράγμα στο πλήθος των θετικών ριζών του πολυωνύμου.*

Για παράδειγμα:

1. Έστω το πολυώνυμο $p(x) = x^6 - 3x^5 - 6x^3 - x + 8$. Οι εναλλαγές των προσήμων είναι

$$\overbrace{+\ -}^{1}\ -\ \overbrace{-\ +}^{1} = 2$$

   Άρα, το πολυώνυμο **έχει το πολύ** 2 θετικές ρίζες.

2. Το πολυώνυμο $q(x) = x^8 + x^6 + 3x^5 + 2x^3 + 10x + 2$, δεν έχει καμία εναλλαγή προσήμου των συντελεστών του. Άρα, δεν έχει θετικές πραγματικές ρίζες, όπως άλλωστε το περιμέναμε.

Κεφάλαιο 5

ΕΚΘΕΤΙΚΗ & ΛΟΓΑΡΙΘΜΙΚΗ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗ

5.1 ΕΚΘΕΤΙΚΗ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗ

5.1.1 Ορίζοντας την εκθετική συνάρτηση

Ιστορικά, πρώτα έχουν εισαχθεί οι λογάρθμοι και μετά τους χρησιμοποιήσαμε για τον ορισμό της εκθετικής συνάρτησης a^x. Εμείς θα ακολουθήσουμε την αντίστροφη πορεία γιατί μας ενδιαφέρει η συναρτησιακή μορφή του λογαρίθμου και της εκθετικής. Πρώτα όμως ας δούμε λίγο τα ιστορικά βήματα που οδήγησαν στον ορισμό της εκθετικής και λογαριθμικής συνάρτησης.

Η εξέταση όλων των παλαιών αριθμητικών συστημάτων (Βαβυλωνιακό, αρχαίο Ελληνικό και Ρωμαϊκό), αποκαλύπτει ότι τα συστήματα αυτά ήταν ιδιαίτερα δύσχρηστα στην εκτέλεση των αλγορίθμων που υλοποιούν αριθμητικές πράξεις. Αν και το ινδο-αραβικό σύστημα ήταν το βέλτιστο δυνατό, στην καθημερινότητα των αστρονόμων αποδείχθηκε ανεπαρκές. Η δυσκολία επικεντρωνόταν στην εκτέλεση του πολλαπλασιασμού μεταξύ μεγάλων αριθμών. Αυτό οδήγησε σε μηχανικούς τρόπους εκτέλεσης των πράξεων. Αλλά με του μηχανικούς τρόπους υπολογισμούς η μόνη πράξη που τελικά κάνουμε είναι η πρόσθεση. Υπάρχουν και άλλα παραδείγματα που αναγάγουν τελικά τον πολλαπλασιασμό στην πρόσθεση. Πάρτε για παράδειγμα τις δύο παρακάτω ισότητες στην άλγεβρα και στην τριγωνομετρία:

$$x \cdot y = \left(\frac{x+y}{2}\right)^2 - \left(\frac{x-y}{2}\right)^2 \qquad \text{συν}\,(x) \cdot \text{συν}\,(y) = \frac{\text{συν}\,(x+y) + \text{συν}\,(x-y)}{2}$$

Το μεγάλο βήμα για την επικράτηση του λογαρίθμου έγινε για τον συσχετισμό της αριθμητικής προόδου και της γεωμετρικής. Το 1484, σε μια εργασία του Γάλλου Nicholas Cluquet εμφανίστηκε το παρακάτω παράδειγμα. Θα το μεταφέρουμε με τη σύγχρονη ορολογία.

Σαν γενίκευση μιας γεωμετρικής προόδου

Ας υποθέσουμε ότι έχουμε ένα φαινόμενο με τα εξής χαρακτηριστικά: οι στιγμές που εξελίσεται ακολουθούν μια αριθμητική ακολουθία ενώ το αποτέλεσμα ακολουθεί μια γεωμετρική. Για παράδειγμα: ένας πληθυσμός μικροοργανισμών ο οποίος διπλασιάζεται κάθε έτος. Ο χρόνος είναι η αριθμητική ακολουθία $1, 2, 3, 4, \ldots$ ενώ το αποτέλεσμα είναι όροι της γεωμετρικής $2, 4, 8, 16, \ldots$ αν η αρχική τιμή του δείγματος είναι 1. Ας βάλουμε σε έναν πίνακα τις τιμές:

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	...
1	2	4	8	16	32	64	128	256	512	1024	2048	4096	8192	16384	32768	...

Το ερώτημα είναι: μπορείτε να ανακαλύψτε σχέσεις μεταξύ των δύο αυτών γραμμών του πίνακα;

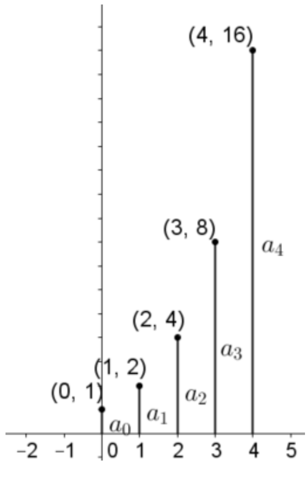
Το γινόμενο $8 \times 64 = 512$ βρίσκεται κάτω από το 9, το οποίο είναι το άθροισμα $3 + 6 = 9$ δηλαδή του αθροίσματος των αριθμών 3 και 6 που είναι πάνω απο τους 8 και 64 αντίστοιχα. Ομοίως, το $16 \times 256 = 4096$ είναι κάτω από το άθροισμα $4 + 8 = 12$.

Με τον ίδιο τρόπο η διαίρεση $4096 \div 128 = 32$ βρίσκεται κάτω από το 5, με $12 - 7 = 5$, το 4096 είναι κάτω από το 12 και το 128 κάτω από το 7. Ομοίως η $\sqrt[4]{4096} = 8$ που είναι κάτω από το 3. Το δε 3 είναι το πηλίκο της διαίρεσης $12 \div 4$.

Η αναγωγή αυτή των βασικών πράξεων σε απλούστερες περιέγραψε ο Stifel το 1544. Ονόμασε τους όρους της δεύτερης σειράς *εκθέτες* και είδε ότι με τη σημερινή γραφή $2^3 \times 2^5 = 2^8$.

Στο διπλανό σχήμα τα ευθύγραμμα τμήματα a_0, a_1, a_2, a_3 και a_4 αντιπροσωπεύουν τις τιμές του πληθυσμού κατά τα έτη 1, 2, 3, 4, κ.ο.κ. δηλαδή τη δεύτερη σειρά του πίνακα. Το αποτέλεσμα ακολουθεί γεωμετρική πρόοδο αφού οι λόγοι των ευθυγράμμων τμημάτων δύο διαδοχικών χρονικών περιόδων είναι ίσοι με 2:

$$\frac{a_1}{a_0} = \frac{a_2}{a_1} = \cdots = \frac{a_{n+1}}{a_n} = \cdots = 2$$



Μπορούμε επίσης να δούμε ότι οι λόγοι των τμημάτων a_i που διαφέρουν σταθερό διάστημα είναι ίσοι. Για παράδειγμα: $\dfrac{a_3}{a_1} = \dfrac{a_4}{a_2}$ γιατί:

$$\frac{a_3}{a_1} = \frac{2^3}{2} = 2^2, \quad \frac{a_4}{a_2} = \frac{2^4}{2^2} = 2^2$$

Γενικά λοιπόν: $\dfrac{a_{n+m}}{a_n} = 2^m$.

Το ερώτημα λοιπόν τίθεται ως εξής: Μπορούμε να κάνουμε το ίδιο για οποιοδήποτε ζεύγος αριθμών που πολλαπλασιάζουμε; Ισχύει κάτι αντίστοιχο για τις δυνάμεις του 3; Η απάντηση είναι καταφατική. Ο έλεγχος για τις δυνάμεις του 3 είναι επίσης απλός και ακολουθεί το προηγούμενο παράδειγμα. Γενικεύοντας μπορούμε να θεωρήσουμε τις δύο προόδους:

0	a	$2a$	$3a$	$4a$	$5a$	$6a$	$7a$	$8a$	$9a$	$10a$	$\dots$
1	t	t^2	t^3	t^4	t^5	t^6	t^7	t^8	t^9	t^{10}	$\dots$

Η πρώτη είναι αριθμητική με διαφορά $a > 0$ και η δεύτερη γεωμετρική με λόγο $t > 1$.

Τα απλά αυτά παραδείγματα θα είχαν πρακτική αξία αν η γεωμετρική πρόοδος ήταν πυκνή (να ήταν δηλαδή ένα συνεχές μέγεθος και όχι διακριτό), έτσι ώστε να συμπεριληθφούν και οι άρρητοι αριθμοί που εμφανίζονται στους τριγωνομετρικούς υπολογισμούς για παράδειγμα. Το πρόβλημα ήταν ζωτικής σημασίας για τους αστρονόμους για τον λόγο αυτό κατασκευάστηκαν πίνακες για πολυψήφιους αριθμούς. Τέτοιους πίνακες κατασκεύασαν οι Bürgi και Napier το 1614. Μεγάλη συμβολή είχαν οι πίνακες αυτοί στην ανακάλυψη του τρίτου νόμου της κίνησης των πλανητών του Kepler.

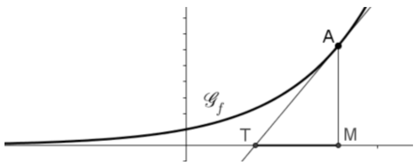
Οι όροι των δύο προόδων, στον παραπάνω πίνακα, είναι σε αντιστοιχία μεταξύ τους και μπορούμε να περιγράψουμε την αντιστοιχία αυτή από τη συνάρτηση $f(t^n) = na$. Τότε: $f(t^n t^m) = f(t^n) + f(t^m)$. Με την σημερινή ορολογία, υπάρχει συνάρτηση f έτσι ώστε $f(xy) = f(x) + f(y)$.

Θα είχαμε την οριστική λύση αν η γενίκευση γινόταν μέσα στους πραγματικούς αριθμούς, δηλαδή με συνεχή μεγέθη, και όχι διακριτά όπως κάναμε παραπάνω. Η γενίκευση θα ολοκληρωθεί με τον ορισμό του λογαρίθμου πάνω στους θετικούς πραγματικούς.

Με την οπτική αυτή, η εκθετική συνάρτηση είναι η αντίστροφη της λογαριθμικής συνάρτησης.

Σαν συνάρτηση με μήκος υποεφαπτομένης σταθερό

Ας υποθέσουμε ότι έχουμε το γράφημα μιας συνάρτησης f έστω $\mathscr{G}_f$. Επίσης, έστω $A = (a, f(a))$ ένα σημείο του γραφήματος και M η προβολή του πάνω στον οριζόντιο άξονα. Ας υποθέσουμε ότι με κάποιον τρόπο έχουμε φέρει την εφαπτομένη AT της καμπύλης στο σημείο A η οποία τέμνει τον οριζόντιο άξονα στο σημείο T. Τότε το ευθ. τμήμα TM ονομάζεται **υπο - εφαπτομένη** της καμπύλης στο σημείο A.



Το ερώτημα που έθεσε ο de Beaune $(1601 - 1652)$, στον Descartes είναι αν μπορεί να υπάρξει καμπύλη στην οποία οι υποεφαπτομένες των σημείων της καμπύλης είναι μεταξύ τους ίσες. Ένα χρόνο αργότερα ο Descartes έθεσε το πρόβλημα στην επιστημονική κοινότητα ως εξής: να βρεθεί μια καμπύλη της οποίας η υποεφαπτομένη σε κάθε σημείο είναι ίση με μια ποσότητα ξ. Το πρόβλημα το έλυσε ο Huygens το 1693, χρησιμοποιώντας την έλκουσα καμπύλη (κοινώς tractrix) και ο Leibnitz το 1684 στο Nova Methodus pro Maximis et Minimis.

Έστω f συνάρτηση με αυτά τα χαρακτηριστικά, τότε από στο τρίγωνο ATM έχουμε:

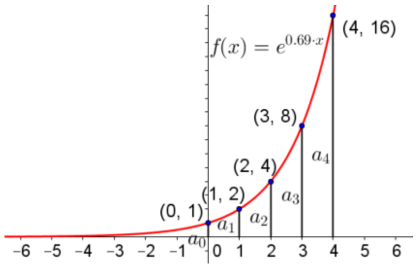
$$f'(a) = \frac{1}{\xi} f(a)$$

Το πρόβλημα λοιπόν έχει αναχθεί στη επίλυση μιας απλής διαφορικής εξίσωσης. Η δε λύση αυτής όπως θα δούμε στην επόμενη τάξη είναι:

$$f(x) = ce^{\frac{x}{\xi}},\ c \in \mathbb{R}$$

Πράγματι, αν ζητήσετε από το Geogebra να προσεγγίσει με εκθετική παλινδρόμηση με βάση το e τα σημεία $(1, a_1), (2, a_2), (3, a_3), (4, a_4)$ του προηγουμένου προβλήματος, θα σας δώσει τη συνάρτηση $f(x) = e^{0.69x}$.

Η συνάρτηση με αυτή την ιδιότητα, να έχει δηλαδή σταθερή υποεφαπτομένη, είναι η εκθετική συνάρτηση. Με την βοήθεια του ορίου μπορούμε σήμερα να ορίσουμε και με άλλους τρόπους την εκθετική συνάρτηση.



5.1.2 Ασκήσεις

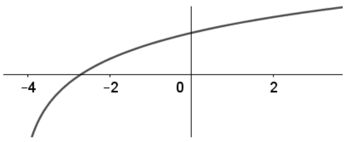
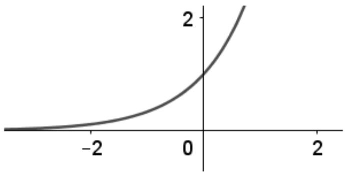
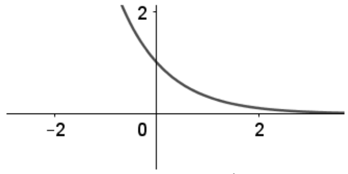
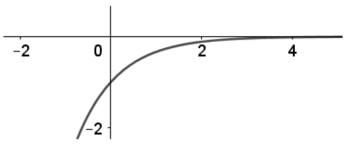
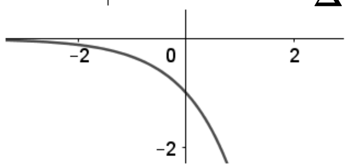
1. Το σύνολο τιμών της συνάρτησης $f(x) = 6^x$ είναι:

   Α. το δίαστημα $[0, +\infty)$ **Β.** το διάστημα $(-\infty, 0]$ **Γ.** το διάστημα $(-\infty, 0)$ **Δ.** το σύνολο $\mathbb{R}^*$ **Ε.** Τίποτα από τα προηγούμενα

2. Το σύνολο τιμών της συνάρτησης $f(x) = \left(\dfrac{1}{3}\right)^x$ είναι:

   Α. το δίαστημα $[0, +\infty)$ **Β.** το διάστημα $(-\infty, 0]$ **Γ.** το διάστημα $(-\infty, 0)$ **Δ.** το δίαστημα $(0, +\infty)$ **Ε.** το σύνολο $\mathbb{R}^*$

3. Η γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x) = -3^x$ είναι:

   Α.  **Β.**  **Γ.**  **Δ.**  **Ε.** 

4. Δίνεται η συνάρτηση με τύπο $f(x) = \left(\dfrac{1}{2}\right)^x$. Τότε ισχύει ότι:

   Α. $f(2) > f(3)$ **Β.** $f(2) < f(3)$ **Γ.** $f(2) \geq f(3)$ **Δ.** $f(2) = 2f(3)$ **Ε.** Τίποτα από τα προηγούμενα

5. Αν $2^{2^x} = 16$, τότε το x είναι:

   Α. 4 **Β.** 1 **Γ.** 2 **Δ.** -1 **Ε.** -2

6. Η εξίσωση $3^x + 2^x = 2$ έχει λύση τον αριθμό:

Α. -2 **Β.** -1 **Γ.** 1 **Δ.** 2 **Ε.** 0

7. Η ανίσωση $\left(\frac{1}{2}\right)^x < 2$ αληθεύει:

Α. Για $x \in (-\infty, -1)$ **Β.** Για $x \in (-\infty, -1]$ **Γ.** Για $x \in (-\infty, 0)$ **Δ.** Για $x \in (-1, +\infty)$ **Ε.** Για κάθε $x \in \mathbb{R}$
Σωστό το Δ. ■

8. Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x) = 3^x$ και $g(x) = 4^x$. Τότε ισχύει ότι:

Α. $f(4) = g(4)$ **Β.** $f(4) > g(4)$ **Γ.** $f(3) < g(3)$ **Δ.** $f\left(\frac{1}{3}\right) > g\left(\frac{1}{3}\right)$ **Ε.** $f\left(\frac{1}{3}\right) = g\left(\frac{1}{3}\right)$

9. Μεταξύ των αριθμών $2^{1/2}$, $3^{1/3}$, $8^{1/8}$ και $9^{1/9}$ ο μεγαλύτερος και ο αμέσως μικρότερος, αν αυτοί διαταχθούν κατά φθίνουσα σειρά, είναι:
Α. $3^{1/3},\ 2^{1/2}$ **Β.** $3^{1/3},\ 8^{1/8}$ **Γ.** $3^{1/3},\ 9^{1/9}$ **Δ.** $8^{1/8},\ 9^{1/9}$ **Ε.** τίποτα από τα παραπάνω

10. Αν $3^{2x} + 9 = 10(3^x)$, τότε η τιμή του $x^2 + 1$ είναι:
Α. μόνο 1 **Β.** μόνο 5 **Γ.** 1 ή 5 **Δ.** 2 **Ε.** 10

11. Ο αριθμός των πραγματικών του x που ικανοποιεί την εξίσωση

$$(2^{6x+3})(4^{3x+6}) = 8^{4x+5}$$

είναι:
Α. 0 **Β.** 1 **Γ.** 2 **Δ.** 3 **Ε.** περισσότερες από 3

12. Πόσες πραγματικές ρίζες έχει η εξίσωση:

$$3^{2x+2} - 3^{x+3} - 3^x + 3 = 0?$$

Α. 0 **Β.** 1 **Γ.** 2 **Δ.** 3 **Ε.** 4

13. Δύο πραγματικοί αριθμοί a και b ικανοποιούν τις εξισώσεις: $3^a = 81^{b+2}$ και $125^b = 5^{a-3}$. Ποιά είναι η τιμή του $a \cdot b$;
Α. -60 **Β.** -17 **Γ.** 9 **Δ.** 12 **Ε.** 60

14. Έστω 3 αριθμοί $x,\ y = x^x,\ z = x^{x^x}$ με $0.9 < x < 1.0$. Τότε η διάταξη των 3 αριθμών είναι:
Α. $x < z < y$ **Β.** $x < y < z$ **Γ.** $y < x < z$ **Δ.** $y < z < x$ **Ε.** $z < x < y$

15. Αν $5^x = 6^y = 30^7$, τότε η τιμή του κλάσματος $\frac{xy}{x+y}$ είναι:

Α. 5 **Β.** $\frac{1}{5}$ **Γ.** 7 **Δ.** $\frac{1}{7}$ **Ε.** Τίποτα από τα προηγούμενα

16. Αν η εξίσωση $2^x = 3^y = 12^z$ έχει μη - μηδενικές ρίζες, τότε η τιμή της παράστασης $\dfrac{z(x+2y)}{xy}$, είναι:
Α. 1 **Β.** 2 **Γ.** $\dfrac{1}{2}$ **Δ.** 3 **Ε.** $\dfrac{1}{3}$

17. Αν $0 < a < b < c < 1$ και $A = a^a b^b c^c$, $B = a^a b^c c^b$ και $C = a^b b^c c^a$. Τότε:
Α. $A < B < C$ **Β.** $B < A < C$ **Γ.** $C < A < B$ **Δ.** $C < B < A$ **Ε.** $C < A < B$

18. Αν $3^n = 5$, $4^m = 8$, τότε η παράσταση 9^{n+m} είναι ίση με:
Α. 425 **Β.** 525 **Γ.** 625 **Δ.** 725 **Ε.** 825

19. Η τιμή του x έτσι ώστε $\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^{x+1} = \left(1+\dfrac{1}{2022}\right)^{2022}$ μπορεί να είναι:
Α. -2021 **Β.** -2023 **Γ.** $\dfrac{1}{2022}$ **Δ.** 2021 **Ε.** 2023

20. Το άθροισμα των ριζών της
$$(x^2+5x+5)^{x^2-10x+21} = 1$$
είναι:
Α. 0 **Β.** 1 **Γ.** 2 **Δ.** 3 **Ε.** 4

21. Ένα ηλεκτρικό αυτοκίνητο κοστίζει 45 000 ευρώ. Εκτιμάται ότι κάθε έτος χάνει το 20% της αξίας της τιμής του προηγούμενου έτους. Η τιμή του αυτοκινήτου τον Απρίλιο του 8ου έτους κυκλοφορίας του θα είναι:
Α. 7549.75 **Β.** 9437.18 **Γ.** 6039.79 **Δ.** 4831.83 **Ε.** Τίποτα από τα προηγούμενα

22. Να λυθεί ως προς x η εξίσωση: $3 \cdot 2^{x-4} - 2^{x-1} = 5^{x-2} - 6 \cdot 5^{x-3}$.

23. Να λυθεί η εξίσωση: $(x^2-3x+2)^{x^2-2x} = 1$.

24. Δίνεται η συνάρτηση
$$f(x) = 6 \cdot 9^{\frac{1}{x}} - 13 \cdot 6^{\frac{1}{x}} + 6 \cdot 4^{\frac{1}{x}}$$
Να δείξετε ότι:

(α′) Η γραφική παράσταση της f δεν τέμνει τον άξονα yy'.

(β′) Η γραφική παράσταση της f τέμνει τον άξονα $x'x$ σε δύο σημεία.

25. Ο νόμος της εκθετικής μεταβολής είναι μια εκθετική συνάρτηση με βάση το $e \approx 2.718$ της μορφής
$$Q(t) = Q_0 e^{ct}$$
Ο νόμος εκφράζει τη μεταβολή μιας ποσότητας ενός φυσικού μεγέθους συναρτήσει του χρόνου t. Q_0 είναι η αρχική ποσότητα σε χρόνο $t = 0$, c είναι μια σταθερά μεταβολής που εξαρτάται

αποκλειστικά από το ρυθμό μεταβολής του σώματος. Αν $c > 0$ έχουμε αύξηση, αν $c < 0$ έχουμε ελάττωση ή απόσβεση της αρχικής τιμής Q_0.

Για την εκτέλεση ενός σπινθηρογραφήματος που θα ανιχνεύσει φλεγμονές και όγκους στο ανθρώπινο σώμα, χορηγείται το ραδιονουκλετίδιο ^{67}Ga, (γάλλιο 67), στον ανθρώπινο οργανισμό δε ποσότητα $25mSv$, (μιλισβλέρτ). Ο ανθρώπινος οργανισμός αποβάλλει το ισότοπο αυτό μετά το σπινθηρογράφημα. Η διάρκεια ημιζωής του ^{67}Ga είναι 3.26 ημέρες.

(α΄) Ποια είναι η χαρακτηριστική τιμή της σταθεράς c της εκθετικής μεταβολής που αφορά το ραδιονουκλετίδιο ^{67}Ga;

(β΄) Σε πόσες μέρες ο ανθρώπινος οργανισμός θα έχει αποβάλλει τη ποσότητα του ^{67}Ga που έχει χορηγηθεί στο ανθρώπινο σώμα;

26. Δίνεται η συνάρτηση με τύπο $f(x) = k\alpha^x$, $0 < \alpha \neq 1$ και $k \in \mathbb{R}$.

(α΄) Να βρείτε τους λόγους

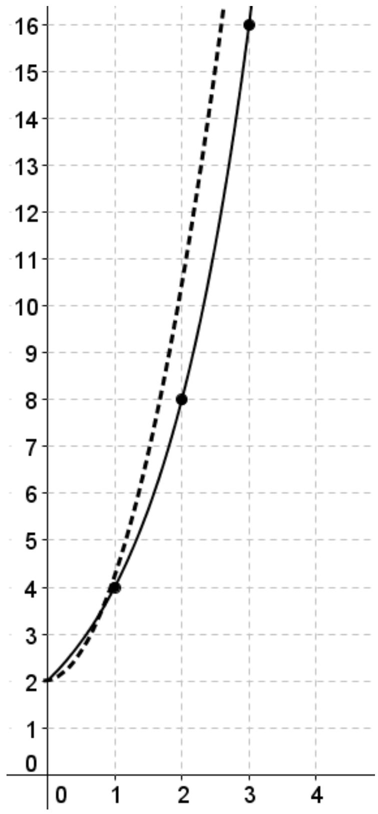
$$\frac{f(x+1)}{f(x)}, \qquad \frac{f(x+2)}{f(x+1)}, \qquad \frac{f(x+7)}{f(x+6)}$$

(β΄) Να βρείτε τους λόγους

$$\frac{f(x+3)}{f(x)}, \qquad \frac{f(x+6)}{f(x+3)}, \qquad \frac{f(x+16)}{f(x+13)}$$

(γ΄) Να αποδείξετε ότι ο λόγος των τιμών της $f(x)$ που αντιστοιχούν σε ζεύγη τιμών της μεταβλητής x που ισαπέχουν είναι σταθερές. (Ζεύγη που ισαπέχουν είναι τα $(x, x+3), (x+3, x+6), (x+12, x+15)$ κλπ)

(δ΄) Στο σχήμα δίνονται οι γραφικές παραστάσεις μιας εκθετικής συνάρτησης και μιας παραβολής.
Χρησιμοποιώντας το ερώτημα 26γ΄, να σχεδιάσετε τη γραφική παράσταση της εκθετικής συνάρτησης.



5.2 ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΑΠΟ ΤΡΑΠΕΖΑ ΘΕΜΑΤΩΝ - 2022

1. **4^o ΘΕΜΑ** #21444.

ΘΕΜΑ 4

Δίνονται οι συναρτήσεις $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ με τύπους $f(x) = 4^x$ και $g(x) = 2^x - \frac{1}{4}$.

α) Να αποδείξετε ότι οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων f και g έχουν ακριβώς ένα κοινό σημείο A, του οποίου να βρείτε τις συντεταγμένες.

(Μονάδες 9)

β) Να αποδείξετε ότι η γραφική παράσταση της συνάρτησης f βρίσκεται πάνω από τη γραφική παράσταση της g, με εξαίρεση το σημείο A.

(Μονάδες 9)

γ) Να παραστήσετε γραφικά τις συναρτήσεις f και g στο ίδιο σύστημα αξόνων.

(Μονάδες 7)

ΛΥΣΗ

α) Οι λύσεις τις εξίσωσης $f(x) = g(x)$ είναι οι τετμημένες των κοινών σημείων των γραφικών παραστάσεων των συναρτήσεων f και g. Έχουμε:

$f(x) = g(x) \Leftrightarrow$

$4^x = 2^x - \frac{1}{4} \Leftrightarrow$

$4 \cdot (2^x)^2 - 4 \cdot 2^x + 1 = 0 \overset{y=2^x}{\Leftrightarrow}$

$4y^2 - 4y + 1 = 0 \Leftrightarrow$

$(2y-1)^2 = 0 \Leftrightarrow$

$y = \frac{1}{2}$.

Άρα

$2^x = \frac{1}{2} \Leftrightarrow$

$2^x = 2^{-1} \Leftrightarrow$

$x = -1$.

Οπότε οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων f και g έχουν ακριβώς ένα κοινό σημείο το $A\left(-1,\frac{1}{4}\right)$, αφού $f(-1)=g(-1)=\frac{1}{4}$.

β) Θα δείξουμε ότι $f(x)>g(x)$ για κάθε $x\neq -1$. Έχουμε ισοδύναμα:

$$f(x)>g(x)\Leftrightarrow$$
$$4^x>2^x-\frac{1}{4}\Leftrightarrow$$
$$4\cdot\left(2^x\right)^2-4\cdot 2^x+1>0\overset{y=2^x}{\Leftrightarrow}$$
$$4y^2-4y+1>0\Leftrightarrow$$
$$(2y-1)^2>0.$$

που ισχύει για κάθε για κάθε πραγματικό αριθμό $y\neq\frac{1}{2}$, δηλαδή για κάθε πραγματικό αριθμό x για τον οποίο ισχύει:

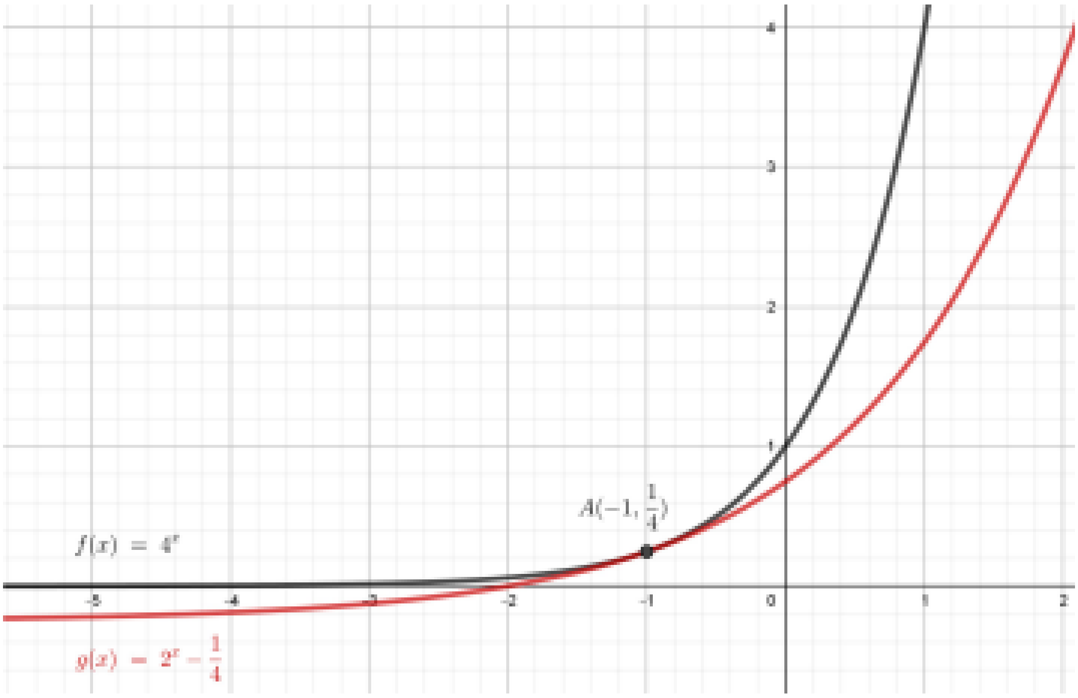
$$2^x\neq\frac{1}{2}\Leftrightarrow$$
$$2^x\neq 2^{-1}\Leftrightarrow$$
$$x\neq -1.$$

Άρα η γραφική παράσταση της συνάρτησης f βρίσκεται πάνω από τη γραφική παράσταση της g, με εξαίρεση το σημείο $A\left(-1,\frac{1}{4}\right)$.

γ) Στο παρακάτω σύστημα συντεταγμένων φαίνονται οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων f και g. Να σημειώσουμε ότι η γραφική παράσταση της g προκύπτει από κατακόρυφη μετατόπιση της γραφικής παράστασης της $y=2^x$ κατά $\frac{1}{4}$ μονάδες προς τα κάτω και με τη βοήθεια του παρακάτω πίνακα τιμών.

x	-2	-1	0	1
$f(x)=4^x$	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{4}$	1	4

x	-2	-1	0	1
$g(x)=2^x-\frac{1}{4}$	0	$\frac{1}{4}$	$\frac{3}{4}$	$\frac{7}{4}$



2. **4^o ΘΕΜΑ** #21471.

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \alpha \cdot 2^x + \beta$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$ και $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Η γραφική παράσταση της συνάρτησης f διέρχεται από τα σημεία $A(1,3)$ και $B(2,13)$.

α) Να βρείτε τους πραγματικούς αριθμούς α και β.

(Μονάδες 7)

Αν $\alpha = 5$ και $\beta = -7$,

β) Να βρείτε το κοινό σημείο της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f με τον άξονα $y'y$.

(Μονάδες 4)

γ) Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$.

(Μονάδες 7)

δ) Να λύσετε την ανίσωση $f(x) > 4^x - 3$.

(Μονάδες 7)

ΛΥΣΗ

α) Η γραφική παράσταση της συνάρτησης f διέρχεται από τα σημεία Α$(1,3)$ και Β$(2,13)$, οπότε:

$$\begin{cases} f(1)=3 \\ f(2)=13 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha\cdot 2^1+\beta=3 \\ \alpha\cdot 2^2+\beta=13 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2\alpha+\beta=3 \\ 4\alpha+\beta=13 \end{cases} \overset{(-)}{\Leftrightarrow} \begin{cases} 2\alpha=10 \\ 2\alpha+\beta=3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha=5 \\ \beta=-7. \end{cases}$$

β) Για $\alpha=5$ και $\beta=-7$ η συνάρτηση γίνεται $f(x)=5\cdot 2^x-7$ και για $x=0$ έχουμε $f(0)=5\cdot 2^0-7=5\cdot 1-7=-2$. Άρα η γραφική παράσταση της συνάρτησης f τέμνει τον άξονα $y'y$ στο σημείο $(0,-2)$.

γ) Παρατηρούμε ότι για $x_1,x_2\in\mathbb{R}$ με $x_1<x_2$,έχουμε

$$\begin{aligned} &2^{x_1}<2^{x_2} \Leftrightarrow \\ &5\cdot 2^{x_1}<5\cdot 2^{x_2} \Leftrightarrow \\ &5\cdot 2^{x_1}-7<5\cdot 2^{x_2}-7 \Leftrightarrow \\ &f(x_1)<f(x_2). \end{aligned}$$

Άρα η $f(x)=5\cdot 2^x-7$ είναι γνησίως αύξουσα συνάρτηση.

δ) Έχουμε

$$\begin{aligned} &f(x)>4^x-3 \Leftrightarrow \\ &5\cdot 2^x-7>\left(2^x\right)^2-3 \overset{2^x=y}{\Leftrightarrow} \\ &y^2-5y+4<0 \qquad (1). \end{aligned}$$

Το τριώνυμο y^2-5y+4 έχει ρίζες $y_1=4$, $y_2=1$ (διότι $1+4=5=S$ και $1\cdot 4=4=P$). Η ανίσωση (1) αληθεύει για $1<y<4$, δηλαδή:

$$1<2^x<4 \Leftrightarrow 2^0<2^x<2^2 \Leftrightarrow 0<x<2.$$

Τελικά η ανίσωση $f(x)>4^x-3$ αληθεύει για $x\in(0,2)$.

3. **4^o ΘΕΜΑ** #21448.

Όταν ένας ασθενής παίρνει μια δόση ενός φαρμάκου τη χρονική στιγμή $t=0$, τότε ο οργανισμός του το μεταβολίζει έτσι ώστε η ποσότητά του $f(t)$ (σε mg) να μειώνεται μετά από t ημέρες σύμφωνα με τη συνάρτηση

$$f(t)=q_0\cdot\alpha^t,\ t\geq 0,$$

όπου οι αριθμοί α, q_0 είναι κατάλληλες θετικές σταθερές.

α) Να εξηγήσετε τι παριστάνει η σταθερά q_0 στο πλαίσιο του προβλήματος και να αιτιολογήσετε γιατί ισχύει $0<\alpha<1$.

(Μονάδες 6)

β) Υποθέτουμε τώρα ότι μία ημέρα μετά τη λήψη του φαρμάκου, η ποσότητά του στον οργανισμό του ασθενούς έχει υποδιπλασιαστεί.

i. Να αποδείξετε ότι $\alpha=\frac{1}{2}$.

(Μονάδες 5)

ii. Να μεταφέρετε στην κόλλα σας και να συμπληρώσετε τον παρακάτω πίνακα τιμών της συνάρτησης f, εκφράζοντας τις τιμές $f(t)$ ως συνάρτηση της αρχικής τιμής q_0.

(Μονάδες 4)

t	0	1	2	3	4	5	6
$f(t)$	q_0	$\frac{q_0}{2}$					

γ) Υποθέτουμε τώρα ότι $\alpha=\frac{1}{2}$ και ότι η ποσότητα του φαρμάκου που παραμένει στον οργανισμό στο τέλος της $4^{ης}$ ημέρας είναι 25 mg.

i. Να υπολογίσετε την ποσότητα της δόσης που πήρε ο ασθενής.

(Μονάδες 5)

ii. Να σχεδιάσετε τη γραφική παράσταση της συνάρτησης f στο διάστημα $[0,6]$.

(Μονάδες 5)

ΛΥΣΗ

α) Στο πλαίσιο του προβλήματος η σταθερά q_0 παριστάνει τη δόση του φαρμάκου που πήρε ο ασθενής (την ποσότητα του φαρμάκου στον οργανισμό τη χρονική στιγμή $t=0$).

Η ποσότητα του φαρμάκου που παραμένει στον οργανισμό του ασθενούς μειώνεται όσο περνούν οι ημέρες, δηλαδή η εκθετική συνάρτηση $f(t)=q_0\cdot\alpha^t$ είναι φθίνουσα, το οποίο συμβαίνει όταν $0<\alpha<1$.

β)

i. Μία ημέρα μετά τη λήψη του φαρμάκου, η ποσότητά του στον οργανισμό του ασθενούς έχει υποδιπλασιαστεί, δηλαδή

$$f(1)=\frac{q_0}{2}\Leftrightarrow$$
$$q_0\cdot\alpha=\frac{q_0}{2}\Leftrightarrow$$
$$\alpha=\frac{1}{2}.$$

ii. Παρατηρούμε ότι:

$$f(0)=q_0\cdot\alpha^0=q_0,\quad f(1)=q_0\cdot\frac{1}{2}=\frac{q_0}{2},\quad f(2)=q_0\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^2=\frac{q_0}{4},\quad f(3)=q_0\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^3=\frac{q_0}{8},$$

$$f(4)=q_0\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^4=\frac{q_0}{16},\ f(5)=q_0\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^5=\frac{q_0}{32},\ f(6)=q_0\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^6=\frac{q_0}{64}.$$

Οπότε:

t	0	1	2	3	4	5	6
$f(t)$	q_0	$\frac{q_0}{2}$	$\frac{q_0}{4}$	$\frac{q_0}{8}$	$\frac{q_0}{16}$	$\frac{q_0}{32}$	$\frac{q_0}{64}$

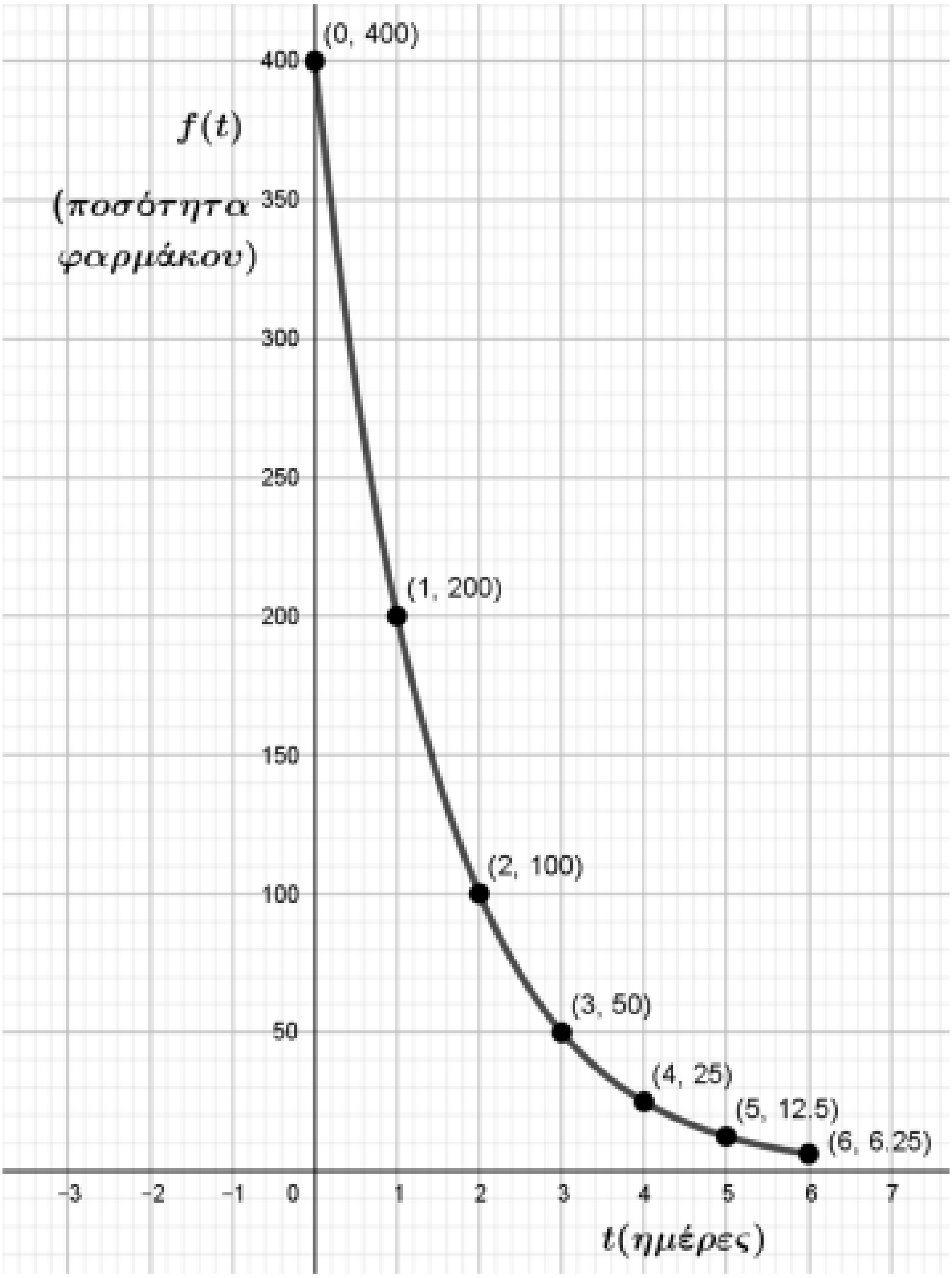
γ)

i. Έχουμε $f(4)=25\Leftrightarrow\frac{q_0}{16}=25\Leftrightarrow q_0=25\cdot16\Leftrightarrow q_0=400$ mg.

ii. Με τη βοήθεια του βii) ερωτήματος έχουμε τον παρακάτω πίνακα τιμών για τη συνάρτηση $f(t)=400\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^t$ στο διάστημα $[0,6]$:

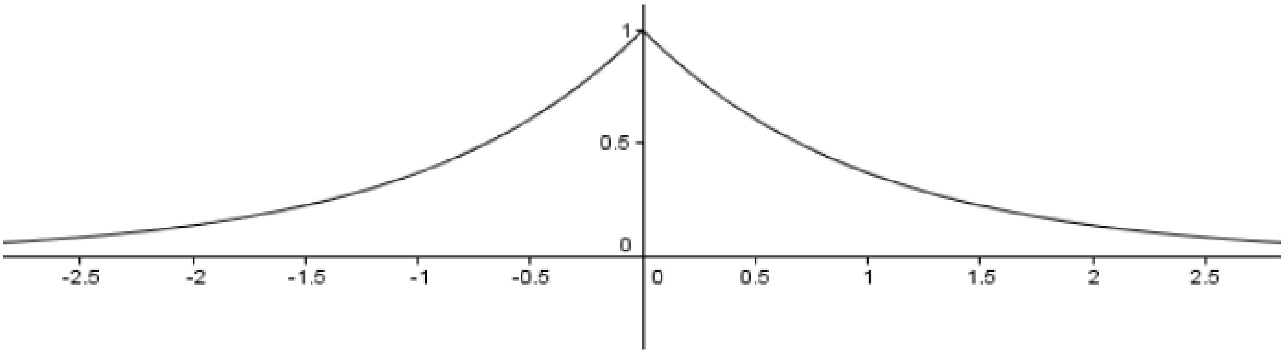
t	0	1	2	3	4	5	6
$f(t)$	400	200	100	50	25	12,5	6,25

Η γραφική παράσταση της f φαίνεται στο παρακάτω σύστημα συντεταγμένων.



4. **4^o ΘΕΜΑ** #15269.

Στο παρακάτω σχήμα δίνεται η γραφική παράσταση μιας συνάρτησης f διπλού τύπου.



α) Αν είναι γνωστό ότι η γραφική παράσταση αντιστοιχεί σε μια ακριβώς από τις παρακάτω συναρτήσεις να επιλέξετε ποιος είναι ο τύπος της συνάρτησης f.

$$\text{A. } f(x)=\begin{cases} e^{x}, & x<0 \\ e^{-x}, & x\geq 0 \end{cases} \qquad \text{B. } f(x)=\begin{cases} e^{-x}, & x<0 \\ e^{x}, & x\geq 0 \end{cases}$$

Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

(Μονάδες 8)

β) Να βρείτε τη μονοτονία και την μέγιστη τιμή της.

(Μονάδες 5)

γ) Να βρείτε, για τις διάφορες τιμές του α, το πλήθος των κοινών σημείων της γραφικής παράστασης C_f της f με την ευθεία $y=\alpha, \alpha\in\mathbb{R}$.

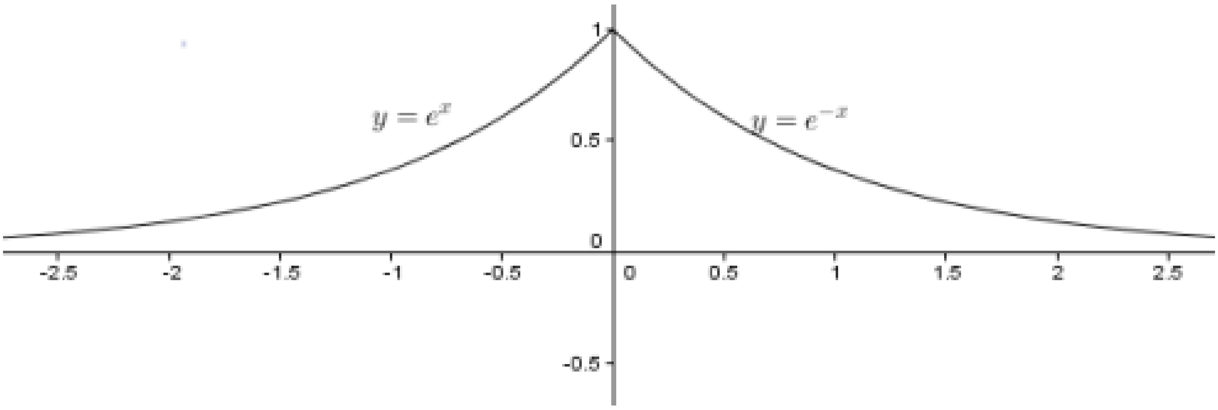
(Μονάδες 7)

δ) Να αιτιολογήσετε γιατί το μοναδικό κοινό σημείο της γραφικής παράστασης C_f της f με την παραβολή $y=x^2+1, x\in\mathbb{R}$ είναι το σημείο $(0,1)$.

(Μονάδες 5)

ΛΥΣΗ

α) Η γραφική παράσταση της f αποτελείται από την $y=e^x$ για $x<0$ και την $y=e^{-x}$ για $x\geq 0$ οπότε ο τύπος της είναι ο πρώτος από τους δοσμένους τύπους.

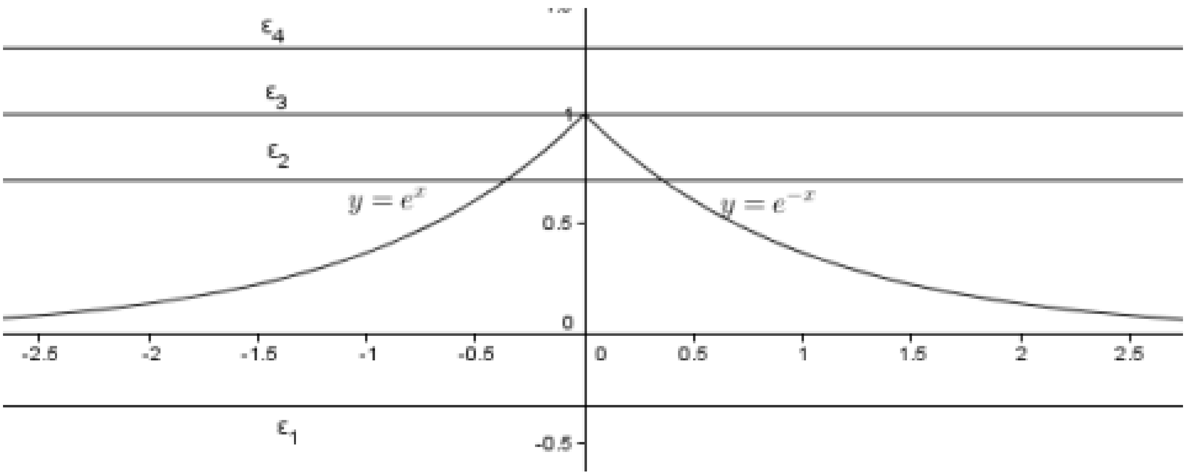


β) Από την παραπάνω γραφική παράσταση της f συμπεραίνουμε ότι αυτή είναι:

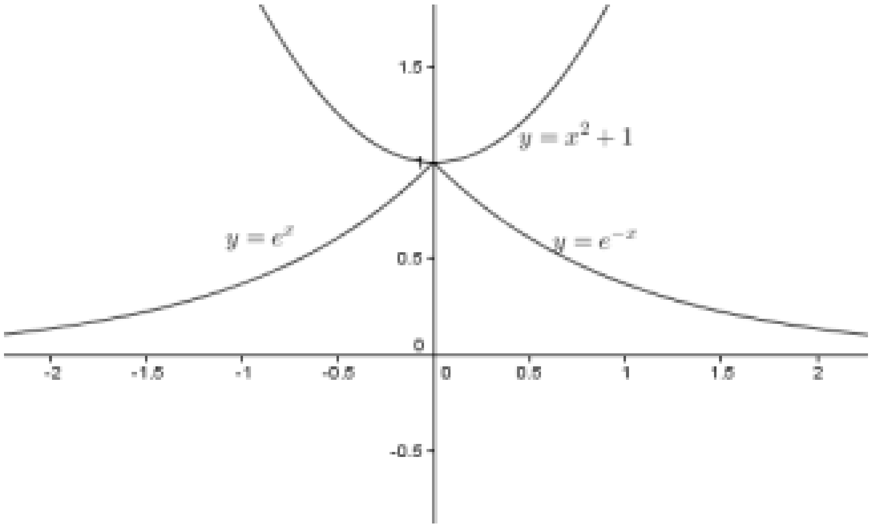
- γνησίως αύξουσα στο διάστημα $(-\infty, 0]$
- γνησίως φθίνουσα στο διάστημα $[0, +\infty)$ και
- παρουσιάζει ολικό μέγιστο για $x=0$, το $f(0)=1$

γ) Διακρίνουμε τις παρακάτω δυνατές περιπτώσεις:

- Αν $\alpha\leq 0$, (ευθεία ε_1) τότε η C_f και η ευθεία $y=\alpha$ δεν έχουν κοινό σημείο.
- Αν $0<\alpha<1$, (ευθεία ε_2) τότε η C_f και η ευθεία $y=\alpha$ έχουν ακριβώς δυο κοινά σημεία.
- Αν $\alpha=1$, (ευθεία ε_3) τότε η C_f και η ευθεία $y=\alpha$ έχουν ένα μόνο κοινό σημείο.
- Αν $\alpha>1$, (ευθεία ε_4) τότε η C_f και η ευθεία $y=\alpha$ δεν έχουν κοινό σημείο.



δ) Η παραβολή $y=x^2+1$ διέρχεται από το σημείο $(0,1)$ αφού για $x=0$ είναι $y=0^2+1=1$. Το σημείο $(0,1)$ είναι και σημείο της C_f, αφού $f(0)=1$. Με $x\neq 0$ έχουμε $x^2>0$, οπότε $y=x^2+1>1$ και $f(x)\leq 1$. Άρα η παραβολή και η C_f δεν έχουν άλλο κοινό σημείο, οπότε το μοναδικό κοινό σημείο τους είναι το $(0,1)$.



Σχόλιο

Στο πλαίσιο μιας γραφικής λύσης θα μπορούσαμε να σχεδιάσουμε την παραβολή και τη γραφική παράσταση της f και να διαπιστώσουμε ότι έχουν μοναδικό κοινό σημείο το $(0,1)$ όπως φαίνεται στο σχήμα.

5.3 ΛΟΓΑΡΙΘΜΙΚΗ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗ

1. Η τιμή του $10^{\log 8}$ είναι:
Α. 8 **Β.** 1 **Γ.** 10 **Δ.** $\log 8$ **Ε.** $\log_8 10$

2. Η τιμή της παράστασης: $\log_5 \dfrac{125\cdot 625}{25}$ είναι:
Α. 725 **Β.** 6 **Γ.** 3125 **Δ.** 5 **Ε.** τίποτα από τα παραπάνω

3. Αν $\log m = b - \log n$, $m, n > 0$, τότε:
Α. b/n **Β.** bn **Γ.** $10^b n$ **Δ.** $b - 10^n$ **Ε.** $10^b/n$

4. Η τιμή της παράστασης $\big(\log\big(5\log(100)\big)\big)^2$ είναι:
Α. $\log(50)$ **Β.** 25 **Γ.** 10 **Δ.** 2 **Ε.** 1

5. Αν $\log 2 = a$ και $\log 3 = b$ τότε $\ln(12)$ είναι ίσο με:
Α. $\dfrac{1+a}{1+b}$ **Β.** $\dfrac{1}{1+ab}$ **Γ.** $\dfrac{a+e}{1+ab}$ **Δ.** $\dfrac{2a+b}{\log e}$ **Ε.** $\dfrac{2a+b}{1+\log e}$

6. Αν $a = \log_8 225$ και $b = \log_2 15$, τότε:
Α. $a = \dfrac{b}{2}$ **Β.** $a = \dfrac{2b}{3}$ **Γ.** $a = b$ **Δ.** $b = \dfrac{a}{2}$ **Ε.** $a = \dfrac{3b}{2}$

7. Αν $y = \ln x$, ποια από τις παρακάτω προτάσεις **δεν είναι** αληθής:
Α. Αν $x = 1$ τότε $y = 0$ **Β.** Αν $x = e$ τότε $y = 1$ **Γ.** Αν $x = -1$ τότε το y δεν ορίζεται στους πραγματικούς αριθμούς **Δ.** Αν $0 < x < 1$ τότε το y είναι πάντα μικρότερο του 0 και ελαττώνεται απεριόριστα όταν το x τείνει στο 0 **Ε.** Κάποιες μόνο από τις παραπάνω προτάσεις είναι αληθής

8. Δοθέντος $\dfrac{\log(a)}{p} = \dfrac{\log(b)}{q} = \dfrac{\log(c)}{r} = \log(x)$, με $x \neq 1$, και $\dfrac{b^2}{ac} = x^y$, τότε y είναι ίσο με:
Α. $\dfrac{q^2}{p+r}$ **Β.** $\dfrac{p+r}{2q}$ **Γ.** $2q - p - r$ **Δ.** $2q - r$ **Ε.** $q^2 - pr - 1$

9. Αν $\log_a(b) = \log_b(a)$, $a \neq b$, $ab > 0$, $a, b \neq 1$, τότε ab είναι ίσο με:
Α. $\dfrac{1}{2}$ **Β.** 1 **Γ.** 2 **Δ.** 10 **Ε.** ένας αριθμός μεταξύ 2 και 10

10. Σας δίνουμε τις εξής πληροφορίες: $10^3 = 1000$, $10^4 = 10000$, $2^{10} = 1024$, $2^{11} = 2048$, $2^{12} = 4096$ και $2^{13} = 8192$. **Με μόνο αυτές τις πληροφορίες** να βρείτε σε ποιο διάστημα μπορεί να ανήκει ο αριθμός $\log(2)$:
Α. $\left(\dfrac{3}{10}, \dfrac{4}{11}\right)$ **Β.** $\left(\dfrac{3}{10}, \dfrac{4}{12}\right)$ **Γ.** $\left(\dfrac{3}{10}, \dfrac{4}{13}\right)$ **Δ.** $\left(\dfrac{3}{10}, \dfrac{40}{132}\right)$ **Ε.** $\left(\dfrac{3}{11}, \dfrac{40}{132}\right)$

<u>Απάντηση:</u> $10^3 < 2^{10} \Leftrightarrow 3 < 10\log(2) \Leftrightarrow \boxed{\dfrac{3}{10} < \log(2)}$.

$2^{13} = 8192 < 10000 = 10^4 \Leftrightarrow 13\log(2) < 4 \Leftrightarrow \boxed{\log(2) < \dfrac{4}{13}}$.

Άρα, $\log(2) \in \left(\frac{3}{10}, \frac{4}{13}\right)$, αφού:

$$\left(\frac{3}{10}, \frac{4}{13}\right) \subset \left(\frac{3}{10}, \frac{4}{11}\right), \ \left(\frac{3}{10}, \frac{4}{12}\right)$$

Επίσης, από τις δοθείσες συνθήκες δεν μπορούμε να εξάγουμε αν

$$\log(2) < \frac{40}{132} \Rightarrow 2^{132} < 10^{40}$$

Το τελευταίο δεν είναι γνωστό από τις πληροφορίες!
Σωστό το Γ. ■

11. Αν $\log(a^2 - 15a) = 2$ τότε η τιμή του a είναι:
Α. $\frac{15 \pm \sqrt{233}}{2}$ **Β.** $20, \ -5$ **Γ.** $\frac{15 \pm \sqrt{305}}{2}$ **Δ.** ± 20 **Ε.** τίποτα από τα προηγούμενα

12. Αν $\log(x^2 - 3x + 6) = 1$ τότε το x είναι:
Α. 10 ή 2 **Β.** 4 ή -2 **Γ.** 3 ή -1 **Δ.** 4 ή -1 **Ε.** τίποτα από τα προηγούμενα

.

13. Αν $a, b, x > 0$ και $a, b, x \neq 1$ με $a \neq b \neq x \neq 1$. Τότε:

$$4(\log_a x)^2 + 3(\log_b x)^2 = 8(\log_a x)(\log_b x)$$

(α′) Για όλες τις τιμές των a, b και x.
(β′) Αν και μόνο αν $a = b^2$.
(γ′) Αν και μόνο αν $a^2 = b$.
(δ′) Αν και μόνο αν $x = ab$.
(ε′) Κανένα από τα παραπάνω.

14. Αν $a > 1$ και $p = \frac{\log\big(\log(a)\big)}{\log(a)}$, τότε το a^p είναι ίσο με:
Α. 1 **Β.** 10 **Γ.** $\log_a(10)$ **Δ.** $\log(a)$ **Ε.** $a^{\log(a)}$

15. Το πεδίο ορισμού της συνάρτησης $f(x) = \log_{1/2}\Big(\log_2\big(\log_{1/2} x\big)\Big)$ είναι:
Α. $\{x : x > 0\}$ **Β.** $\{x : x > 1/2\}$ **Γ.** $\{x : 0 < x < 1\}$ **Δ.** $\{x : 0 < x < 1/2\}$ **Ε.** το μηδενικό σύνολο

16. $\log p + \log q = \log(p + q)$, $p, q > 0$, όταν:
Α. $p = q = 0$ **Β.** $p = \frac{q^2}{1 - p}$ **Γ.** $p = q = 1$ **Δ.** $p = \frac{q}{q - 1}$ **Ε.** $p = \frac{q}{q + 1}$

17. Αν $\log_6 x = 2.5$ η τιμή του x είναι:
Α. 90 **Β.** $36\sqrt{6}$ **Γ.** $6\sqrt[5]{6}$ **Δ.** $0,5$ **Ε.** τίποτα από τα προηγούμενα

18. Αν $\ln i = -\dfrac{R \cdot t}{L} + \ln I \Rightarrow i = I \cdot e^{\dfrac{R \cdot t}{L}}$. Υποθέστε ότι οι λογάριθμοι για τις δεδομένες μεταβλητές είναι καλά ορισμένοι.

19. Αν $\alpha > \beta > 0$ και $\alpha^2 + \beta^2 = 11\alpha\beta$, δείξτε ότι:

$$\ln \frac{\alpha - \beta}{3} = \frac{1}{2}\Big(\ln \alpha + \ln \beta\Big)$$

20. Για όλους τους θετικούς ακεραίους n ορίζουμε μια συνάρτηση $f(n) = \log_{2024} n^2$. Έστω $N = f(8) + f(11) + f(23)$. Ποιο από τα παρακάτω είναι αληθές;
Α. $N < 1$ **Β.** $N = 1$ **Γ.** $1 < N < 2$ **Δ.** $N > 2$ **Ε.** Τίποτα από τα προηγούμενα

21. Για όλους τους ακέραιους $n > 1$, ορίζουμε $a_n = (\log_n(2022))^{-1}$. Έστω $b = a_4 + a_5 + a_6 + a_7$ και $c = a_2 + a_3 + a_{24} + a_{35} + a_{337}$. Πόσο είναι το $b - c$;

Α. -1 **Β.** 2 **Γ.** 2022 **Δ.** $\dfrac{1}{2022}$ **Ε.** $\dfrac{1}{2021}$

22. Αν $a \geq b > 1$, ποια είναι η μεγαλύτερη πιθανή τιμή που μπορεί να πάρει η παράσταση:

$$\log_a \frac{a}{b} + \log_b \frac{b}{a}$$

Α. -2 **Β.** 0 **Γ.** 2 **Δ.** 3 **Ε.** 4

23. Υποθέστε ότι $4^{x_1} = 5$, $5^{x_2} = 6$, $6^{x_3} = 7$, ... , $127^{x_{124}} = 128$. Ποια είναι η τιμή της $x_1 x_2 \cdots x_{124}$;
Α. 2 **Β.** $\dfrac{5}{2}$ **Γ.** 3 **Δ.** $\dfrac{7}{2}$ **Ε.** 4

24. Αν $\log(xy^3) = 1$ και $\log(x^2 y) = 1$, ποιος είναι ο $\log(xy)$;
Α. $-\dfrac{1}{2}$ **Β.** 0 **Γ.** $\dfrac{1}{2}$ **Δ.** $\dfrac{3}{5}$ **Ε.** 1

25. Για κάποιες τιμές των a και b η εξίσωση

$$8x^3 + 4ax + 2bx + a = 0$$

έχει τρείς διακεκριμένες και θετικές ρίζες. Αν το άθροισμα των λογαρίθμων με βάση το 2 των ριζών είναι 5, η τιμή της παραμέτρου a είναι:
Α. -256 **Β.** -64 **Γ.** -8 **Δ.** 64 **Ε.** 256

26. Πόσα διαφορετικά διανύσματα (a, b, c, d), $a, b, c, d \in \mathbb{N}$, μπορεί να ικανοποιούν την εξίσωση

$$a \log 2 + b \log 3 + c \log 5 + d \log 7 = 2022$$

Α. 0 **Β.** 1 **Γ.** 2 **Δ.** 3 **Ε.** ’πειρα

27. Έστω S οι τιμές (x, y, z) των πραγματικών που ικανοποιούν τις

$$\log(x+y) = z \text{ και } \log(x^2+y^2) = z+1$$

Ας υποθέσουμε επίσης ότι υπάρχουν πραγματικοί αριθμοί a και b έτσι ώστε για κάθε $(x, y, z) \in S$ ισχύει ότι $x^3 + y^3 = a \cdot 10^{3z} + b \cdot 10^{2z}$. Ποια μπορεί να είναι η τιμή του $a+b$;
Α. $\frac{15}{2}$ **Β.** $\frac{29}{2}$ **Γ.** 15 **Δ.** $\frac{39}{2}$ **Ε.** 24

28. Οι θετικοί πραγματικοί a, b, c είναι διαδοχικοί όροι γεωμετρικής προόδου με $1 < a < b < c$ και ο ακέραιος $n > 1$, τότε $\log_a n$, $\log_b n$ και $\log_c n$ είναι:

(α΄) όροι γεωμετρικής προόδου,
(β΄) όροι αριθμητικής προόδου,
(γ΄) οι αντίστροφοι τους σχηματίζουν όρους αριθμητικής προόδου,
(δ΄) ο δεύτερος και ο τρίτος είναι $n-$ οστές δυνάμεις του πρώτου και δεύτερου αντίστοιχα,
(ε΄) τίποτα από τα προηγούμενα.

29. Ποιοι θετικοί x επαληθεύουν την

$$\Big(\log_3 x\Big)\Big(\log_x 5\Big) = \log_3 5$$

(α΄) Οι 3 και 5 μόνο.
(β΄) Μόνο οι 3,5 και 15.
(γ΄) Μόνο οι αριθμοί $3^n \cdot 5^m$, $n, m \in \mathbb{N}$.
(δ΄) Όλοι οι $x \in \mathbb{R}^+$ με $x \neq 1$.
(ε΄) Τιποτα από τα προηγούμενα.

30. Αν $y = (\log_2 3)(\log_3 4) \cdots (\log_n[n+1]) \cdots (\log_{31} 32)$, τότε:
Α. $4 < y < 5$ **Β.** $y = 5$ **Γ.** $5 < y < 6$ **Δ.** $y = 6$ **Ε.** $6 < y < 7$

31. Για όλα τα $x \in \mathbb{R}^+$ και $x \neq 1$ το $\frac{1}{\log(x)} + \frac{1}{\ln(x)}$ είναι ίσο με:
Α. $\frac{\ln(10x)}{\log(x)+\ln(x)}$ **Β.** $\log_x(e)$ **Γ.** $\log_x(10e)$ **Δ.** $\frac{10e}{\log(x)+\ln(x)}$ **Ε.** τίποτα από τα προηγούμενα

32. Η προσέγγιση χιλιοστού του $\log(2) \approx 0.301$ και του $\log(3) \approx 0.477$. Τότε μια καλή προσέγγιση του $\log_5(10)$ είναι:
Α. $\frac{8}{7}$ **Β.** $\frac{9}{7}$ **Γ.** $\frac{10}{7}$ **Δ.** $\frac{11}{7}$ **Ε.** $\frac{12}{7}$

33. Έστω x τέτοιο ώστε ημ (x), συν $(x) > 0$ και $\log(\text{ημ }(x)) = a$. Τότε $\log(\text{συν }(x))$ είναι ίσο με:
Α. $2\log\left(1 - 10^{a/2}\right)$ **Β.** $\sqrt{1-a^2}$ **Γ.** 10^{a^2} **Δ.** $\frac{1}{2}\log\left(1-10^{2a}\right)$ **Ε.** τίποτα από τα προηγούμενα

34. Αν $\ln(a) + \ln(b) \geq 6$, τότε η μικρότερη τιμή που μπορεί να πάρει το $a + b$ είναι:
Α. $2\sqrt{6}$ **Β.** 6 **Γ.** $e\sqrt{2}$ **Δ.** $2e^3$ **Ε.** $2e^2$

35. Να βρείτε τα κοινά σημεία των γραφημάτων των συναρτήσεων $f(x) = 2\log(x)$ και $g(x) = \log(2x)$.

36.
$$\log\frac{a}{b} + \log\frac{b}{c} + \log\frac{c}{d} - \log\frac{ay}{dx}$$
είναι ίσο με:
Α. $\log\frac{y}{x}$ **Β.** $\log\frac{x}{y}$ **Γ.** 1 **Δ.** 0 **Ε.** $\log\frac{a^2y}{d^2x}$

37. Αν x είναι θετικός πραγματικός και
$$\log(x) \geq \log(2) + \frac{1}{2}\log(x)$$
τότε:

(α΄) Το x δεν μπορεί να πάρει ούτε ελάχιστη ούτε μέγιστη τιμή.
(β΄) Η μέγιστη τιμή που μπορεί να πάρει το x είναι 1.
(γ΄) Η ελάχιστη τιμή που μπορεί να πάρει το x είναι 1.
(δ΄) Η μέγιστη τιμή που μπορεί να πάρει το x είναι 4.
(ε΄) Η ελάχιστη τιμή που μπορεί να πάρει το x είναι 4.

38. Να δείξετε την ισότητα:
$$\frac{7}{16}\log(3 + 2\sqrt{2}) - 4\log(\sqrt{2} + 1) = \frac{25}{8}\log(\sqrt{2} - 1)$$

39. Δείξτε ότι $x^{\log y} = y^{\log x}$. Υποθέστε ότι οι λογάριθμοι για τις δεδομένες μεταβλητές είναι καλά ορισμένοι.

40. Δείξτε ότι: $\log_\alpha \beta \cdot \log_\beta \gamma \cdot \log_\gamma \alpha = 1$ για κάθε $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}^+ - \{1\}$.

41. Αν ισχύει $\log_x y = \log_y z \cdot \log_z x$, για κάθε $x, y, z \in \mathbb{R}^+ - \{1\}$, τότε θα ισχύει: $x = y$ ή $x = \frac{1}{y}$.

42. Γνωρίζοντας ότι $\log 2 = \alpha$ και $\log 15 = \beta$, να υπολογισθούν συναρτήσει των α και β οι παραστάσεις:

(α΄) $\log\sqrt[5]{7,2}$
(β΄) $\log\sqrt[5]{\frac{5}{3}\sqrt[4]{6}}$

5.4 ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ

43. Αν $\log(2) \approx 0.3010$ και $\log(3) \approx 0.4771$ τότε η τιμή του x έτσι ώστε $3^{x+3} = 135$ είναι περίπου:
Α. 5 **Β.** 1.47 **Γ.** 1.67 **Δ.** 1.78 **Ε.** 1.63

44. Αν $(0.2)^x = 2$ και $\log(2) \approx 0.3010$, τότε η τιμή του x είναι περίπου:
Α. -10 **Β.** -0.5 **Γ.** -0.4 **Δ.** -0.2 **Ε.** 10

45. Αν $\log_k x \log_5 k = 3$ τότε το x είναι ίσο με:
Α. k^5 **Β.** $5k^3$ **Γ.** k^3 **Δ.** 243 **Ε.** 125

46. Αν $\log_{2x} 216 = x$, όπου $x \in \mathbb{R}$, τότε το x είναι:

(α′) Δεν είναι τέλειο τετράγωνο ή τέλειος κύβος.

(β′) Ούτε τέλειο τετράγωνο, ούτε τέλειος κύβος, ούτε ένα ακέραιο κλάσμα (κλάσμα δηλ. που ανάγεται σε ακέραιο αριθμό).

(γ′) Ένας άρρητος αριθμός.

(δ′) Ένα τέλειο τετράγωνο.

(ε′) Ένας τέλειος κύβος.

47. Οι ρίζες της εξίσωσης $x^{\log(x)} = \dfrac{x^3}{100}$ είναι:
Α. Μόνο το 10^{-1} **Β.** Μόνο το 10^{-2} **Γ.** Μόνο το 100 **Δ.** το 10 ή το 100 **Ε.** Το 1000 ή το 10000

48. Η εξίσωση $2^{2x} - 8 \cdot 2^x + 12 = 0$ ικανοποιείται από:
Α. $\log(3)$ **Β.** $\dfrac{\log(6)}{2}$ **Γ.** $1 + \log\dfrac{3}{2}$ **Δ.** $1 + \dfrac{\log(3)}{\log(2)}$ **Ε.** κανένα από τα προηγούμενα

49. Η ισότητα
$$\log(x+3) + \log(x-1) = \log(x^2 - 2x - 3)$$
ικανοποιείται από:

(α′) όλους τους πραγματικούς αριθμούς

(β′) κανένα πραγματικό αριθμό

(γ′) όλες τις τιμές του x εκτός για $x = 0$

(δ′) κανένα πραγματικο αριθμό εκτός για $x = 0$

(ε′) όλες οι τιμές του x εκτός $x = 1$

50. Το γινόμενο όλων των ριζών της εξίσωσης $x^{\log(x)} = 10$ είναι:
Α. 1 **Β.** -1 **Γ.** 10 **Δ.** 10^{-1} **Ε.** κανένα από τα προηγούμενα

51. Για ποιές τιμές του θ η εξίσωση $x^2 - 2(1 + \log\theta)x + 1 - (\log\theta)^2 = 0$.

52. Αν $\log_{b^2}(x) + \log_{x^2}(b) = 1$, με $b > 0$, $b \neq 1$ και $x \neq 1$. Τότε η τιμή του x που επαληθεύει την εξίσωση είναι:
Α. $\dfrac{1}{b^2}$ **Β.** $\dfrac{1}{b}$ **Γ.** b^2 **Δ.** b **Ε.** $\sqrt{b}$

53. Αν $x > 0$ και $(2x)^{\log(2)} - (3x)^{\log(3)} = 0$, τότε το x είναι ίσο με:
Α. $\dfrac{1}{216}$ **Β.** $\dfrac{1}{6}$ **Γ.** 1 **Δ.** 6 **Ε.** δεν μπορεί να προσδιοριστεί

Στο παρακάτω θέμα μπορεί να ζητηθεί: να βρείτε τις τιμές του ζεύγους (x, y) που επαληθεύει την εξίσωση.

54. Αν $|x^2 - x - \log(y)| = x^2 - x + \log(y)$ με $x, y \in \mathbb{R}$ τότε:
Α. $x = 0 \wedge y \in \mathbb{R}$ **Β.** $x \in \mathbb{R} \wedge y = 1$ **Γ.** $x = 0 \wedge y = 10$ **Δ.** $x(x-1)(y-1) = 0$ **Ε.** τίποτα από τα προηγούμενα

55. Αν $a^x = c^q = b$ και $c^y = a^z = d$ με $x, y, z, q \in \mathbb{R}^*$, τότε:
Α. $xy = qz$ **Β.** $\dfrac{x}{y} = \dfrac{q}{z}$ **Γ.** $x + y = q + z$ **Δ.** $x - y = q - z$ **Ε.** $x^y = q^z$

56. Αν το σύνολο των εξισώσεων

$$z^x = y^{2x},\ 2^z = 2 \cdot 4^x,\ x + y + z = 16$$

έχει ακέραιες λύσεις, τότε το (x, y, z) είναι ίσο με:
Α. (3,4,9) **Β.** $(9, -5, 12)$ **Γ.** $(12, -5, 9)$ **Δ.** $(4, 3, 9)$ **Ε.** $(4, 9, 3)$

57. Έστω η εξίσωση

$$x^2 - 2(1 + \ln\theta)x + 1 - \ln^2\theta = 0$$

όπου $x \in \mathbb{R}$ και $\theta > 0$. Να βρεθούν οι τιμές του θ για τις οποίες η εξίσωση έχει ρίζες

(α΄) πραγματικές

(β΄) ομόσημες

58. Αν $\log(x^2y^2) = \alpha$ και $\log x - \log y = \beta$ να εκφρασθούν οι $\log x$ και $\log y$ συναρτήσει των α και β. Υποθέστε ότι οι λογάριθμοι για τις δεδομένες μεταβλητές είναι καλά ορισμένοι.

59. Να επιλυθεί ως προς x η εξίσωση: $\sqrt{x^{\log\sqrt{x}}} = 10$.

60. Να λυθεί η εξίσωση: $\log(2^x + 2 \cdot 3^x) + \log 81 = x \cdot \log 3 + \log 178$.

61. Να λυθούν ως προς **y** οι εξισώσεις:

(α΄) $\ln(y + 1) + \ln(y - 1) = 2x + \ln(x)$.

(β΄) $\log(y + 1) = x^2 + \log(y - 1)$.

(γ′) $2\ln(y) = \ln(y+1) + x$.

62. Να λυθούν ως προς **x** οι εξισώσεις:

(α′) $\dfrac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}} = y$.

(β′) $y = e^x + e^{-x}$.

Κεφάλαιο 6

ΕΠΑΝΑΛΗΨΗ

6.1 ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1. Για $x > 0$ και $y > 0$ να δείξετε ότι ισχύει η ανίσωση $x^x \cdot y^y \geq x^y \cdot y^x$.

2. Δίνεται η συνάρτηση: $f(x) = \log(11x^2 - 7x + 10) - \log x^2 - 1$.

   (α′) Να βρεθούν τα σημεία τομής της γραφικής παράστασης της f με τον άξονα $x'x$ άξονα.

   (β′) Αν $A = (0, 4)$ και B, Γ είναι τα παραπάνω σημεία τομής με τον άξονα $x'x$ να βρεθεί το εμβαδόν του τριγώνου $AB\Gamma$.

3. Να επιλυθεί η εξίσωση ως προς x: $\alpha^{\beta^x} = \gamma$, αν $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}^+$ και $\alpha \neq 1$, $\beta \neq 1$.

4. Να επιλυθεί το σύστημα: $\begin{cases} x^{\log y+1} & = & y^{\log x+2} \\ y^{\sqrt{x+2}} & = & x^{y-2} \end{cases}$

5. Να βρεθούν οι τιμές που λαμβάνει ο θ, $\theta \in \mathbb{R}^+$, αν οι ρίζες της εξίσωσης

$$\log\Big[\log(x^2 + x\log\theta + 110)\Big] = 0$$

   αποτελούν λύση του συστήματος

$$\begin{cases} y^{\log z} + z^{\log y} & = & 20 \\ \log\sqrt{yz} & = & 1 \end{cases}$$

6. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = 3^x + x$.

   (α′) Να λύσετε την εξίσωση $3^{x^2-3x} + x^2 + 5 = 3^{3x-5} + 6x$.

   (β′) Να λύσετε την ανίσωση $3^{x^2-3x} + x^2 + 5 < 3^{3x-5} + 6x$.

7. Να λύσετε την εξίσωση:

$$\left(2+\sqrt{3}\right)^{x^2-2x+1}+\left(2-\sqrt{3}\right)^{x^2-2x-1}=\frac{4}{2-\sqrt{3}}$$

8. Αν α, β, γ πλευρές τριγώνου $AB\Gamma$, με $\alpha, \beta, \gamma \neq 1$ και

$$\frac{\alpha(\beta+\gamma-\alpha)}{\log\alpha}=\frac{\beta(\alpha+\gamma-\beta)}{\log\beta}=\frac{\gamma(\beta+\alpha-\gamma)}{\log\gamma} \qquad (1)$$

να αποδείξετε ότι: $\alpha^{\beta}\cdot\beta^{\alpha}=\gamma^{\beta}\cdot\beta^{\gamma}=\alpha^{\gamma}\cdot\gamma^{\alpha}$.

9. Δείξτε ότι για κάθε $x\in\mathbb{R}$ ισχύει $e^{\dfrac{5x^{20}+7x^{12}+4x^2}{3x^{14}+9x^{10}+7}} - \text{συν}\, x \geq 0$.

10. Αν $x, y > 0$ και $2^x \cdot 5^y = 7$ να αποδείξετε ότι:

$$(x+2)(y+1)\leq\frac{\log^2 140}{\log 4\log 25}$$

11. Να λυθεί η εξίσωση $10^{(x+1)(3x+4)}-2\cdot 10^{(x+1)(x+2)}=10^{1-x-x^2}$.

12. Να λυθεί στο $\mathbb{N}$ η εξίσωση:

$$2^{x^2+x-2}-2^{x^2-4}=992 \qquad (1)$$

13. Δίνεται το πολυώνυμο $p(x)=x^3-x^2(a+3)+4a^2-2a+3$. Έστω $\upsilon(\alpha)$ το υπόλοιπο της διαίρεσης $p(x)\div(x-\alpha)$.

   (α′) Να αποδείξετε ότι κάθε $\alpha\in\mathbb{R}$ η διαίρεση $p(x)\div(x+\alpha)$ δεν είναι τέλεια.

   (β′) Να βρείτε την τιμή του α έτσι ώστε το $\upsilon(\alpha)$ να γίνει ελάχιστο.

   (γ′) Για την τιμή του α που κάνει ελάχιστο το υπόλοιπο, να λύσετε την εξίσωση:

$$2^{x+\alpha}-9^{\frac{x}{a}}=9^{\frac{\alpha x}{2}} \qquad (6.1)$$

14. Έστω $a, b\in\mathbb{Z}$. Τότε το πολυώνυμο $(x-a)^2(x-b)^2+1$ δεν είναι γινόμενο δύο πολυωνύμων με ακέραιους συντελεστές.

15. Έστω $n\in\mathbb{N}^*$. Έστω το πολυώνυμο

$$p(x)=x^3-3nx^2+(3n^2-1)x-n(n^2-1) \qquad (6.2)$$

   (α′) Δείξτε ότι υπάρχουν δύο ακέραιοι p και q εξαρτώμενοι από το n έτσι ώστε

$$p(x)=(x-n)(x^2+px+q)$$

(β′) Δείξτε ότι το πολυώνυμο $p(x)$ αναλύεται σε τρεις πρωτοβάθμιους παράγοντες.

16. (Εφαρμογή παραγοντοποίησης του $x^n - a^n$) Έστω p πολυώνυμο βαθμού $n \geq 1$. Δείξτε ότι για κάθε $x \in \mathbb{R}$:

    (α′) το πολυώνυμο $p(x) - x$ είναι παράγοντας του $p\big(p(x)\big) - p(x)$.

    (β′) το πολυώνυμο $p(x) - x$ είναι παράγοντας του $p\big(p(x)\big) - x$.

17. Έστω η συνάρτηση $f(x) = \log(2 \cdot 25^x - 5 \cdot 4^x)$ και η ευθεία $(\varepsilon):\ y = x + \log 3$.

    (α′) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της $f(x)$.

    (β′) Να βρείτε τα κοινά σημεία της ευθείας (ε) και της συνάρτησης $f(x)$.

    (γ′) Να βρείτε τη σχετική θέση των σημείων $A = \left(\dfrac{3}{2}, f\left(\dfrac{3}{2}\right)\right)$ με το σημείο της ευθείας (ε) με τετμημένη $\dfrac{3}{2}$.

18. (α′) Να δείξετε ότι: $\alpha^{\ln \beta} = \beta^{\ln \alpha}$, για $a, b \in \mathbb{R}_{>0}$.

    (β′) Να λύσετε την ανίσωση $3^{2 \ln x} < 3 + 3x^{\ln 5}$.

    (γ′) Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = e^{\ln(x)} + x^{\ln(e^2)} - x$.
    Να λύσετε την εξίσωση: $f(\text{ημ}\ \theta) = 2\text{ημ}\ \theta$, $\theta \in \left[0, \dfrac{\pi}{2}\right)$.

    (δ′) Να λυθεί το σύστημα:

$$\begin{cases} (2x)^{\log(y)} + y^{\log(2x)} = 8x^2 \\ \dfrac{y}{4x^2} = y^{\log(2x)} \end{cases}$$

19. (Μια διπλή ρίζα) Έστω $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$. Δείξτε ότι το πολυώνυμο $p(x) = x^n - n(x-1) - 1$ είναι διαιρετό με $(x-1)^2$.

20. Έστω η συνάρτηση $f(x) = \text{ημ}\ (\ln x^2 - 1)$.

    (α′) Να βρείτε το πεδίο ορισμού.

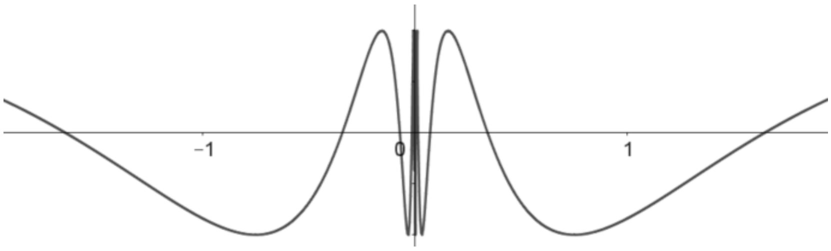
    (β′) Να βρεθεί το θ έτσι ώστε $f(\sqrt{e}) = 2^{\text{εφ}\ (\theta)}$.

    (γ′) Να λύσετε την εξίσωση $f(x) = 0$.

21. (Πολυώνυμο Wilkinson) Έστω πολυώνυμο $p(x)$ βαθμού 2023. Υποθέτουμε ότι για όλους τους φυσικούς n έτσι ώστε $0 \leq n \leq 2023$ ισχύει:

$$p(n) = \frac{n}{n+1}$$

    Για κάθε πραγματικό αριθμό x θέτουμε $q(x) = (x+1)p(x) - x$.



Σχήμα 6.1: Άσκηση 20.

(α΄) Ποιός είναι ο βαθμός του πολυωνύμου $q(x)$.

(β΄) Υπολογίστε για κάθε n τέτοιο ώστε $0 \leq n \leq 2023$, τη τιμή του $q(n)$.

(γ΄) Δείξτε ότι υπάρχει πραγματικός $a \neq 0$ τέτοιος ώστε

$$\forall x \in \mathbb{R},\ q(x) = ax(x-1)\cdots(x-2023)$$

Συμβολίζουμε το γινόμενο $1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \cdots \cdot 2023 = 2023!$.

(δ΄) Υπολογίστε το $p(2023)$ σαν συνάρτηση του a.

(ε΄) Να υπολογίσετε τις τιμές των $q(-1)$ και $p(2024)$.

22. Να λυθούν οι ανισώσεις:

$$\alpha)\ x < 11 - \log(x) \qquad \beta)\ 3^x + \log(x) \geq 3$$

23. Έστω $f(x) = x^3 + \log(x)$.

(α΄) Δείξτε ότι $f(x)$ είναι αύξουσα.

(β΄) Να λυθεί η ανίσωση:

$$(2x^2+1)^3 - (x^2+x+3)^3 \leq \log\frac{x^2+x+3}{2x^2+1} \tag{6.3}$$

24. Να συγκρίνετε τους $\log_2 3$ και $\log_3 5$.

25. Δίνεται το πολυώνυμο $p(x) = x^3 - (\alpha+3)x^2 + 8x - 2\alpha$, $\alpha \in \mathbb{R}$. Αν το υπόλοιπο της διαίρεσης $p(x) \div (x = 1)$ είναι ίσο με -18,

(α΄) Να βρείτε την τιμή του α,

(β΄) Για $\alpha = 2$

i. Να γράψετε την ταυτότητα της ευκλείδειας διαίρεσης του $p(x) \div (x^2+1)$.

ii. να λύσετε την $p(x) \geq 7x + 1$.

26. Δίνεται η παράσταση $A = \ln(x^2 - 6x + 9)$.

(α΄) Να βρεθούν οι τιμές του $x \in \mathbb{R}$ ώστε να ορίζεται η A.

(β΄) Να λυθεί η εξίσωση $A = 4 \cdot \ln^2 |x-3|$.

(γ΄) Να βρεθούν οι τιμές του $x \in \mathbb{R}$ ώστε

$$\left(\frac{1}{9}\right)^{\frac{1}{4}(A^2 - A\cdot\ln 4)} < \left(\frac{1}{3}\right)^{\frac{1}{2}(A\cdot\ln 9 - 4\cdot\ln 3\cdot\ln 2)}$$

27. Δίνεται η πολυωνυμική περιττή συνάρτηση $p(x)$. Αν $p(1) = 3$, να βρείτε το υπόλοιπο της διαίρεσης $p(x) \div (x^3 - x)$.

28. Να αποδείξετε ότι αν το πολυώνυμο $p(x) = \alpha x^3 + 3\beta x^2 + 3\gamma x + \delta$ έχει δύο μόνο ρίζες ίσες τότε, αυτές είναι ίσες με $\dfrac{\beta\gamma - \alpha\delta}{2(\alpha\gamma - \beta^2)}$.

29. $(\log_2 3)(\log_3 4)(\log_4 5)\cdots(\log_{31} 32) =?$.

30. Να λυθεί το σύστημα $\left\{\begin{array}{lcl} x^2 + 4^y & = & 5 \\ 4\sqrt[2y]{x(x+3)} & = & 4 + (x^2+3x)^{\frac{1}{y}} \end{array}\right.$.

31. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \ln(x^3 - 7x^2 + 16x - 12)$. Να βρεθούν:

(α΄) Το πεδίο ορισμού της f.

(β΄) Να δείξετε ότι η συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα στο πεδίο ορισμού της.

(γ΄) Να λυθεί η εξίσωση:

$$\ln(x^3 - 7x^2 + 16x - 12) = \ln(x^2 - 4) + \ln 5 + \ln\left(\frac{x-2}{x+2}\right)$$

(δ΄) Να λυθεί η ανίσωση

$$e^{f(6) - 2f(4)} - e^x > e^{x^2} + e^{x+1} + \ln e^2$$

(ε΄) Να λυθεί η ανίσωση

$$2e^{f(6) - 2f(4)} - e^x < e^{2x}$$

32. Δίνεται συνάρτηση με τύπο $f(x) = \left\{\begin{array}{lll} x^3 - \alpha x^2 - 5x + 6 & \text{αν} & x < 1 \\ x - 1 + \ln x & \text{αν} & x \geq 1 \end{array}\right.$.

(α΄) Αν είναι $f(1) = f(-2)$ να βρεθεί ο πραγματικός αριθμός α.

(β΄) Για $\alpha = 2$

i. Να δείξετε ότι $f(x) \geq 0$ για κάθε $x \geq 1$.

ii. Να λυθεί η εξίσωση $f(x) = 0$.
iii. Να λυθεί η ανίσωση $f(x) < 0$ για $x < 1$.
iv. Να λυθεί η εξίσωση $f\left(\left(\frac{1}{2}\right)^x\right) = -x \ln 2$ για $x \leq 0$.
v. Να λυθεί η εξίσωση $f(\text{συν}\, x) - \text{συν}\, x + 1 = 0$, για $x \in [0, \pi]$.

33. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \log\left(\sqrt{x^2+1} - x\right)$.

(α΄) Να βρεθεί το πεδίο ορισμού και το σύνολο τιμών της συνάρτησης.
(β΄) Να δείξετε ότι η συνάρτηση f είναι περιττή.
(γ΄) Να βρεθούν τα σημεία τομής της γραφικής παράστασης της συνάρτησης με την ευθεία $y = 2$.

34. Να λύθούν οι εξισώσεις:

(α΄) $x^{x^3} = (x^x)^3$
(β΄) $5^{x^3} = 3^{x^5}$

35. Να λυθεί η εξίσωση:

$$\frac{1}{(x-1)(x-2)} + \frac{1}{(x-2)(x-3)} + \frac{1}{(x-3)(x-4)} = 1$$

36. Ένα τετράγωνο $AB\Gamma\Delta$ έχει εμβαδόν 36 και η AB είναι παράλληλη στον άξονα $x'x$. Οι κορυφές A, B και Γ είναι στα γραφήματα των συναρτήσεων $y = \log_a x$, $y = 2\log_a x$ και $y = 3\log_a x$ αντίστοιχα. Ποιο είναι το a;
Α. $\sqrt[6]{3}$ **Β.** $\sqrt{3}$ **Γ.** $\sqrt[3]{6}$ **Δ.** $\sqrt{6}$ **Ε.** 6

37. Έστω: $f(x) = \log\frac{1+x}{1-x}$. Σχηματίζουμε μια νέα συνάρτηση $g(x)$ αντικαθιστώντας το x με

$$\frac{3x + x^2}{1 + 3x^2}$$

Η απλοποιημένη μορφή της $g(x)$ είναι:
Α. $-f(x)$ **Β.** $f(x)$ **Γ.** $3f(x)$ **Δ.** $f^2(x)$ **Ε.** $f^3(x) - f(x)$

38. Έστω συνάρτηση με πεδίο ορισμού το $\mathbb{R}$ και τέτοια ώστε

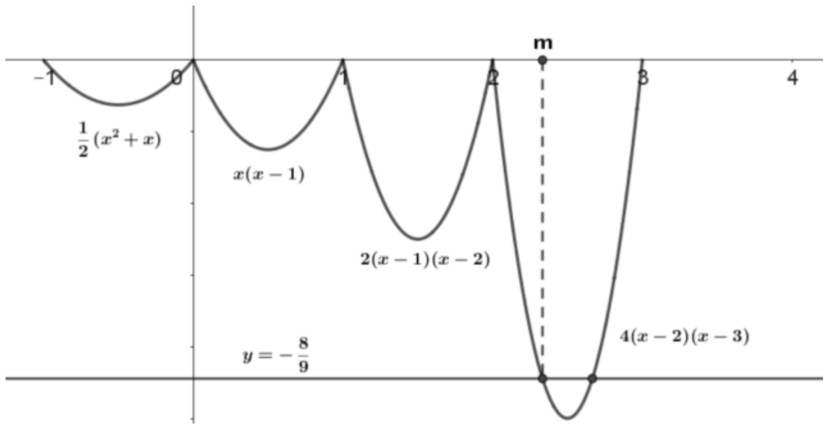
$$f(x+1) = 2f(x)$$

Για κάθε $x \in (0, 1]$, $f(x) = x(x-1)$. Επίσης, $x \in (-\infty, m]$ ικανοποιείται η ανίσωση $f(x) \geq -\frac{8}{9}$. Ποιά είναι η τιμή του m;
Α. $\frac{9}{4}$ **Β.** $\frac{7}{3}$ **Γ.** $\frac{5}{2}$ **Δ.** $\frac{8}{3}$ **Ε.** Τίποτα από τα προηγούμενα

Υπόδειξη: Η συνάρτηση συμπριφέρεται σαν ψευδο - περιοδική με *περίοδο* 1.
Δείξτε ότι:

- $\forall x \in (-1, 0],\ f(x) = 0.5(x+1)x$.
- $\forall x \in (1, 2],\ f(x) = 2(x-1)(x-2)$.
- $\forall x \in (2, 3],\ f(x) = 4(x-2)(x-3)$.

Τα γραφήματα των συναρτήσεων αυτών φαίνονται στο παρακάτω σχήμα:



Η ευθεία $y = -\dfrac{8}{9}$ τέμνει το γράφημα των συναρτήσεων για $x \geq 2$. Επομένως, η μικρότερη τιμή του m θα είναι η μικρότερη ρίζα της εξίσωσης

$$4(x-2)(x-3) = -\frac{8}{9} \Leftrightarrow x = \frac{8}{3} \vee \frac{7}{3}$$

Επομένως η μικρότερη τιμή του m είναι η $\dfrac{7}{3}$. Σωστό το Β. ■

6.2 ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΤΡΑΠΕΖΑΣ ΘΕΜΑΤΩΝ - 2022

1. **4^o ΘΕΜΑ** #15694.

Στην Αστρονομία, οι αστέρες ταξινομούνται ανάλογα με την λαμπρότητα τους με βάση την σχέση $m - M = 5 \cdot log\left(\frac{d}{10}\right)$, (I) όπου d η απόσταση του αστέρα από τον παρατηρητή, m είναι το φαινόμενο μέγεθός τους (το πόσο λαμπροί φαίνονται) και M το απόλυτο μέγεθός τους. Το απόλυτο μέγεθος ορίζεται να είναι το φαινόμενο μέγεθος σε απόσταση 10 parsec από τον παρατηρητή, όπου 1 parsec είναι η μονάδα μέτρησης της απόστασης d και ισούται με 3,26 έτη φωτός $= 30{,}9 \cdot 10^{12}\, Km$.

α) Για ποιες τιμές της απόστασης d το φαινόμενο μέγεθος ενός αστέρα είναι μικρότερο από το απόλυτο μέγεθός του;

(Μονάδες 7)

β) Ένας αστέρας έχει φαινόμενο μέγεθος $m = 1{,}157$ και βρίσκεται σε απόσταση $d = 100$ parsec από έναν παρατηρητή. Ποιο είναι το απόλυτο μέγεθος αυτού του αστέρα;

(Μονάδες 6)

γ) Να επιλύσετε την σχέση (I) ως προς d.

(Μονάδες 7)

δ) Ο αστέρας Betelgeuse έχει φαινόμενο μέγεθος 0,46 και απόλυτο μέγεθος $-5{,}14$. Ποια είναι η απόστασή του από τον παρατηρητή; Δίνεται ότι $\sqrt[25]{10^{53}} \cong 131$.

(Μονάδες 5)

ΛΥΣΗ

α) Θέλουμε να είναι $m - M < 0 \Leftrightarrow 5 \cdot log\left(\frac{d}{10}\right) < 0 \Leftrightarrow log\left(\frac{d}{10}\right) < 0 \Leftrightarrow log\left(\frac{d}{10}\right) < log1$ επομένως $\frac{d}{10} < 1 \Leftrightarrow d < 10$, αφού η συνάρτηση $f(x) = logx$ είναι γνησίως αύξουσα στο $(0, +\infty)$.

β) Έχουμε $M = m - 5 \cdot log\left(\frac{d}{10}\right) = 1{,}157 - 5 \cdot log\left(\frac{100}{10}\right) =$
$= 1{,}157 - 5 \cdot log10 = 1{,}157 - 5 = -3{,}843$.

γ) Είναι $log\left(\frac{d}{10}\right) = \frac{m-M}{5} \Leftrightarrow \frac{d}{10} = 10^{\frac{m-M}{5}}$, άρα $d = 10 \cdot 10^{\frac{m-M}{5}} = 10^{1+\frac{m-M}{5}} = 10^{\frac{5+m-M}{5}}$.

δ) Με χρήση της παραπάνω σχέσης, έχουμε

$d = 10^{\frac{5+0{,}46+5{,}14}{5}} = 10^{\frac{10{,}6}{5}} = 10^{\frac{53}{25}} = \sqrt[25]{10^{53}} \cong 131$ parsec.

2. **4^o ΘΕΜΑ** #21446.

Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\ln\left(e^x-2\right)$.

α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης f.

(Μονάδες 7)

β) Να λύσετε την εξίσωση $f(x)+x=3\ln 2$.

(Μονάδες 9)

γ) Να λύσετε την ανίσωση $f(x)+x\geq 3\ln 2$.

(Μονάδες 9)

ΛΥΣΗ

α) Η συνάρτηση ορίζεται για τους πραγματικούς αριθμούς x για τους οποίους ισχύει $e^x-2>0$

Δηλαδή: $e^x>2 \overset{\ln x\nearrow}{\Leftrightarrow} \ln e^x>\ln 2 \Leftrightarrow x>\ln 2$.

Άρα το πεδίο ορισμού της συνάρτησης f είναι $\mathrm{A}=\left(\ln 2,+\infty\right)$.

β) Έχουμε

$$\begin{aligned}
&f(x)+x=3\ln 2 \Leftrightarrow\\
&\ln\left(e^x-2\right)+x=\ln 2^3 \Leftrightarrow\\
&\ln\left(e^x-2\right)+\ln e^x=\ln 8 \Leftrightarrow\\
&\ln\left[\left(e^x-2\right)\cdot e^x\right]=\ln 8 \Leftrightarrow\\
&\left(e^x\right)^2-2e^x=8 \overset{e^x=y}{\Leftrightarrow}\\
&y^2-2y-8=0.
\end{aligned}$$

Η τελευταία είναι εξίσωση $2^{ου}$ βαθμού με διακρίνουσα $\Delta=(-2)^2-4\cdot 1\cdot(-8)=36>0$ και ρίζες $y=4$, $y=-2$. Άρα $e^x=4 \Leftrightarrow x=\ln 4$ (η εξίσωση $e^x=-2$ είναι αδύνατη, διότι $e^x>0$ για κάθε πραγματικό αριθμό x). Η λύση $x=\ln 4$ είναι δεκτή, διότι $\ln 4>\ln 2$.

Τελικά η εξίσωση $f(x)+x=3\ln 2$ έχει λύση $x=\ln 4$.

γ) Έχουμε

$$\begin{aligned}
&f(x)+x\geq 3\ln 2 \Leftrightarrow\\
&\ln\left(e^x-2\right)+x\geq \ln 2^3 \Leftrightarrow\\
&\ln\left(e^x-2\right)+\ln e^x\geq \ln 8 \Leftrightarrow\\
&\ln\left[\left(e^x-2\right)\cdot e^x\right]\geq \ln 8 \Leftrightarrow\\
&\left(e^x\right)^2-2e^x\geq 8 \overset{e^x=y}{\Leftrightarrow}\\
&y^2-2y-8\geq 0 \qquad (1).
\end{aligned}$$

Από το β) ερώτημα γνωρίζουμε ότι το τριώνυμο y^2-2y-8 έχει ρίζες $y=4$ και $y=-2$. Άρα η ανίσωση (1) αληθεύει για $y\le -2$ ή $y\ge 4$, δηλαδή $e^x\le -2$ (που είναι αδύνατη) ή $e^x\ge 4 \Leftrightarrow \ln e^x \ge \ln 4 \Leftrightarrow x\ge \ln 4$. Πρέπει και $x>\ln 2$, οπότε τελικά η ανίσωση $f(x)+x\ge 3\ln 2$ αληθεύει για $x\ge \ln 4$.

3. **4^o ΘΕΜΑ** #21445.

ΘΕΜΑ 4

Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\log\dfrac{4^x-1}{2^x+5}$.

α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης f .

(Μονάδες 7)

β) Να λύσετε την εξίσωση $f(x)=\log 3-\log 7$.

(Μονάδες 9)

γ) Να λύσετε την ανίσωση $f(x)>\log 3-\log 7$.

(Μονάδες 9)

ΛΥΣΗ

α) Πρέπει

$$\begin{aligned}&\frac{4^x-1}{2^x+5}>0 \overset{2^x+5>0}{\Leftrightarrow}\\ &4^x-1>0\Leftrightarrow\\ &4^x>1\Leftrightarrow\\ &4^x>4^0\Leftrightarrow\\ &x>0.\end{aligned}$$

Άρα το πεδίο ορισμού της συνάρτησης f είναι το $A=(0,+\infty)$.

β) Γνωρίζουμε ότι για $\alpha>0, \alpha\ne 1$ και $x_1,x_2>0$ ισχύει η ισοδυναμία: $\log_\alpha x_1=\log_\alpha x_2 \Leftrightarrow x_1=x_2$. Οπότε έχουμε:

$$\begin{aligned}&f(x)=\log 3-\log 7\Leftrightarrow\\ &\log\frac{4^x-1}{2^x+5}=\log\frac{3}{7}\Leftrightarrow\\ &\frac{4^x-1}{2^x+5}=\frac{3}{7}\Leftrightarrow\\ &7\cdot 4^x-7=3\cdot 2^x+15\Leftrightarrow\\ &7\cdot\left(2^x\right)^2-3\cdot 2^x-22=0 \overset{2^x=y}{\Leftrightarrow}\\ &7\cdot y^2-3\cdot y-22=0.\end{aligned}$$

Από το β) ερώτημα γνωρίζουμε ότι το τριώνυμο y^2-2y-8 έχει ρίζες $y=4$ και $y=-2$. Άρα η ανίσωση (1) αληθεύει για $y \le -2$ ή $y \ge 4$, δηλαδή $e^x \le -2$ (που είναι αδύνατη) ή $e^x \ge 4 \Leftrightarrow \ln e^x \ge \ln 4 \Leftrightarrow x \ge \ln 4$. Πρέπει και $x > \ln 2$, οπότε τελικά η ανίσωση $f(x)+x \ge 3\ln 2$ αληθεύει για $x \ge \ln 4$.

Από το β) ερώτημα γνωρίζουμε ότι το τριώνυμο y^2-2y-8 έχει ρίζες $y=4$ και $y=-2$. Άρα η ανίσωση (1) αληθεύει για $y \le -2$ ή $y \ge 4$, δηλαδή $e^x \le -2$ (που είναι αδύνατη) ή $e^x \ge 4 \Leftrightarrow \ln e^x \ge \ln 4 \Leftrightarrow x \ge \ln 4$. Πρέπει και $x > \ln 2$, οπότε τελικά η ανίσωση $f(x)+x \ge 3\ln 2$ αληθεύει για $x \ge \ln 4$.

4. **4^o ΘΕΜΑ** #15093.

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = log(10^x - 1)$.

α) Να αποδείξετε ότι το πεδίο ορισμού της συνάρτησης είναι το διάστημα $(0, +\infty)$.

(Μονάδες 5)

β) Να βρείτε το διάστημα στο οποίο η γραφική παράσταση της συνάρτησης f βρίσκεται πάνω από τον άξονα $x'x$.

(Μονάδες 7)

γ) Να αποδείξετε ότι $f(x) + x = log(10^{2x} - 10^x)$, $x > 0$.

(Μονάδες 7)

δ) Να βρείτε τις συντεταγμένες του μοναδικού κοινού σημείου της γραφικής παράστασης της f και της ευθείας $y = -x$.

(Μονάδες 6)

ΛΥΣΗ

α) Καθώς υπάρχουν λογάριθμοι μόνο θετικών αριθμών, απαιτούμε $10^x - 1 > 0$, άρα $10^x > 1 \Leftrightarrow 10^x > 10^0 \Leftrightarrow x > 0$, αφού η συνάρτηση $g(x) = 10^x$ είναι γνησίως αύξουσα στο R.

β) Πρέπει $f(x) > 0 \Leftrightarrow log(10^x - 1) > 0 \Leftrightarrow log(10^x - 1) > log1$ και καθώς η συνάρτηση $h(x) = logx$ είναι γνησίως αύξουσα στο $(0, +\infty)$ παίρνουμε $10^x - 1 > 1 \Leftrightarrow 10^x > 2$ σχέση που γράφεται $10^x > 10^{log2}$. Ώστε $x > log2$, δηλαδή $x \in (log2, +\infty)$.

γ) Έχουμε $f(x) + x = log(10^x - 1) + log10^x = log[10^x(10^x - 1)] = log(10^x \cdot 10^x - 10^x) = log(10^{2x} - 10^x)$.

δ) Πρέπει να λύσουμε την εξίσωση $f(x) = -x \Leftrightarrow f(x) + x = 0 \Leftrightarrow log(10^{2x} - 10^x) = 0$ άρα $10^{2x} - 10^x = 1 \Leftrightarrow (10^x)^2 - 10^x - 1 = 0$. Θέτοντας $10^x = y > 0$, παίρνουμε την δευτεροβάθμια εξίσωση $y^2 - y - 1 = 0$ με διακρίνουσα $\Delta = (-1)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-1) = 5$, οπότε $y = \frac{-(-1) \pm \sqrt{5}}{2} = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$. Έτσι $y = \frac{\sqrt{5}+1}{2}$, αφού $y > 0$.

Τελικά $10^x = \frac{\sqrt{5}+1}{2} \Leftrightarrow x = log\left(\frac{\sqrt{5}+1}{2}\right)$.

Άρα το ζητούμενο σημείο είναι το $\left(log\left(\frac{\sqrt{5}+1}{2}\right), -log\left(\frac{\sqrt{5}+1}{2}\right)\right)$.

5. **4^o ΘΕΜΑ** #16001.

Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x)=\sqrt{x\ln x}$ και $g(x)=\sqrt{\ln x}$.

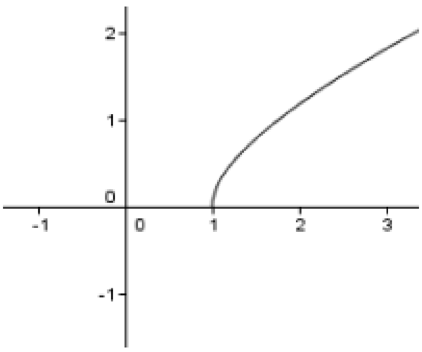
α) Να βρείτε τα πεδία ορισμού τους.

(Μονάδες 4)

β) Να αιτιολογήσετε γιατί η γραφική παράσταση της f είναι από τη γραφική παράσταση της g και πάνω.

(Μονάδες 5)

Στο διπλανό σχήμα δίνεται η γραφική παράσταση της f.



γ) i. Να βρείτε τη μονοτονία της.

(Μονάδες 4)

ii. Να συγκρίνετε τους αριθμούς $f\left(\frac{5}{3}\right)$ και $f\left(\frac{7}{5}\right)$.

(Μονάδες 5)

δ) Να σχεδιάσετε την ευθεία $y=1-x$ και να βρείτε γραφικά τη λύση της εξίσωσης $f(x)=1-x$.

(Μονάδες 7)

ΛΥΣΗ

α) Η συνάρτηση f ορίζεται μόνο όταν $x>0$ και $x\ln x\geq 0$, δηλαδή μόνο όταν $x\geq 1$, οπότε $A_f=[1,+\infty)$. Ομοίως η g ορίζεται μόνο όταν $x>0$ και $\ln x\geq 0$, δηλαδή μόνο όταν $x\geq 1$, οπότε $A_g=[1,+\infty)$.

β) Με $x\geq 1$ έχουμε:

$$f(x)-g(x)=\sqrt{x\ln x}-\sqrt{\ln x}=\left(\sqrt{x}-1\right)\sqrt{\ln x}\geq 0$$

αφού καθένας από τους όρους του γινομένου είναι μη αρνητικός. Επομένως, η γραφική παράσταση της f είναι από τη γραφική παράσταση της g και πάνω.

γ) i. Από τη γραφική παράσταση της f προκύπτει ότι η συνάρτηση είναι γνησίως αύξουσα στο πεδίο ορισμού της $A_f=[1,+\infty)$.

ii. Επειδή $\frac{5}{3}-\frac{7}{5}=\frac{25-21}{15}=\frac{4}{15}>0$, ισχύει $\frac{5}{3}>\frac{7}{5}$ και αφού η f είναι γνησίως αύξουσα συμπεραίνουμε ότι $f\left(\frac{5}{3}\right)>f\left(\frac{7}{5}\right)$.

δ) Η ευθεία $\varepsilon: y=1-x$ τέμνει τους άξονες x'x και y'y στα σημεία $(1,0)$ και $(0,1)$ αντίστοιχα όπως φαίνεται στο διπλανό σχήμα, απ' όπου προκύπτει ότι το μοναδικό κοινό σημείο της με την C_f είναι το $(1,0)$. Αυτό σημαίνει ότι η εξίσωση $f(x)=1-x$ έχει μοναδική ρίζα την $x=1$.