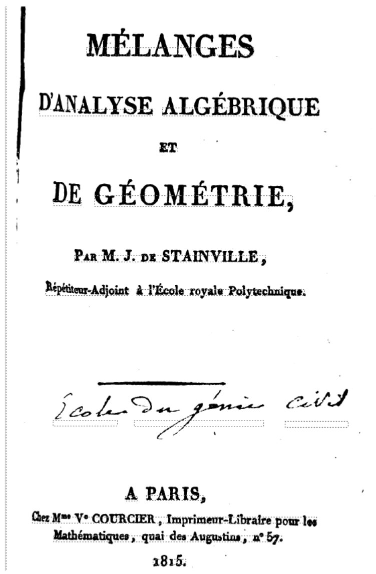
Η Απόδειξη Αρρητότητας του e από τον Joseph Fourier

Λυγάτσικας Ζήνων

2 Σεπτεμβρίου 2024

1 Εισαγωγή



MÉLANGES

D'ANALYSE ALGÉBRIQUE

ET

DE GÉOMÉTRIE,

PAR M. J. DE STAINVILLE,

Répétiteur-Adjoint à l'École royale Polytechnique.

École du génie civil

A PARIS,

Chez Mme Ve COURCIER, Imprimeur-Libraire pour les Mathématiques, quai des Augustins, n° 57.

1815.

Σχήμα 1: Το έργο του Stainville

Το 2023 παρουσιάστηκε μια απόδειξη του Fourier σχετικά με την αρρητότητα του υπερβατικού αριθμού e που δεν ήταν γνωστή η ύπαρξή της μέχρι τότε. Η πρώτη προσέγγιση από τον Fourier φαίνεται ότι έγινε στις 25 Δεκεμβρίου του 1795. Η απόδειξη βρέθηκε σε κάποιες σημειώσεις του Janot de Stainville[1] μαθητή της École Polytechnique. Σύμφωνα με μια παράγραφο του κειμένου ο Stainville αναφέρει ότι την απόδειξη αυτή του την έδωσε ο Louis Poinsot μαθητής τότε της École Polytechnique που παρακολούθησε τα μαθήματα του Fourier. Ο Fourier ήταν καθηγητής στη Σχολή από το 1809 έως το 1811.

Ο αριθμός του Euler, e, είναι ένας σημαντικός αριθμός στα μαθηματικά που εμφανίζεται σε πολλά περιβάλλοντα.

Για παράδειγμα, εδώ είναι δύο σημαντικές ιδιότητες του e. Πρώτον, η ακόλουθη απλή διαφορική εξίσωση πρώτης τάξης, $\dfrac{dy}{dx} = y$, με αρχική συνθήκη $y(0) = 1$, εφαρμόζεται σε πολλές καταστάσεις από την αύξηση του πληθυσμού έως τη ραδιενεργή απόσβεση. Η μόνη μη τετριμμένη λύση αυτής της εξίσωσης (θα αγνοήσουμε την τετριμμένη λύση $y = 0$) είναι η εκθετική συνάρτηση $y = Ae^x$.

[1] Janot de Stainville,1815, *Mélanges D' Analyse Algébrique et Géometrie*, ed. Courcier, Paris, p. 340-341.

Το e εμπλέκεται στον τύπο του Euler, ο οποίος είναι το θεμέλιο της μιγαδικής ανάλυσης (η μελέτη των μιγαδικών αριθμών):

$$e^{i\theta} = \text{συν}\ \theta + i\text{ημ}\ \theta$$

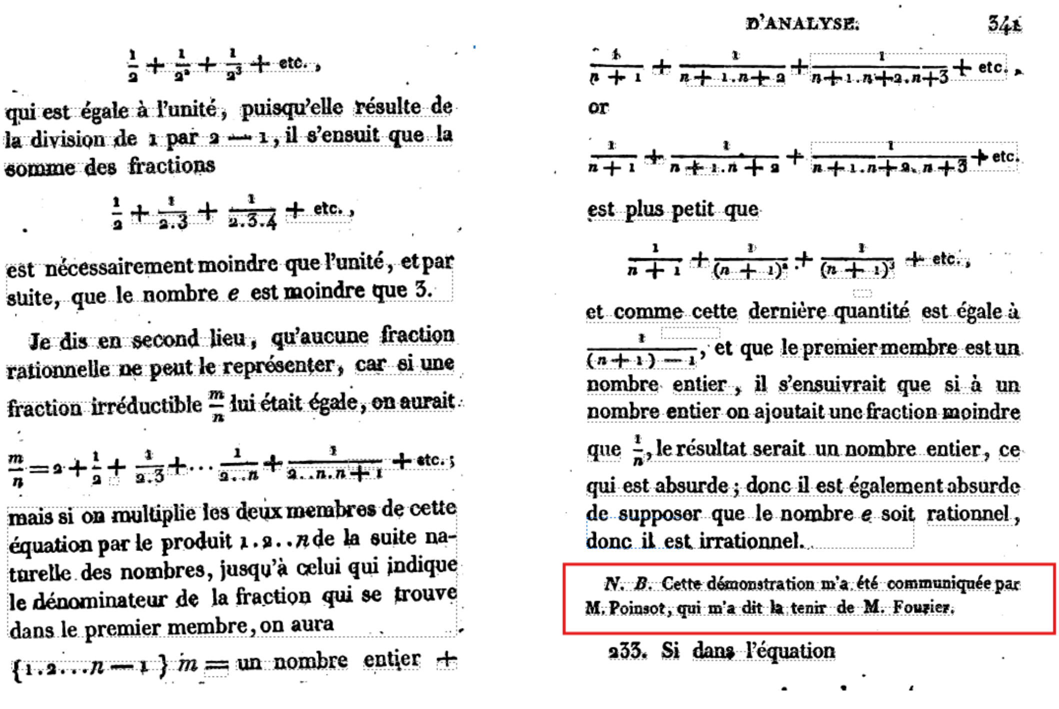
Αν αντικαταστήσουμε την τιμή π με το θ, παίρνουμε την ταυτότητα του Euler:

$$e^{i\pi} = -1$$

Αποδεικνύεται ότι το e είναι ένας άρρητος αριθμός και εδώ θα εξετάσουμε την έξυπνη απόδειξη του Fourier γι᾽ αυτό. Για την απόδειξη ο Stainville βασίζεται στο ανάπτυγμα μιας σειράς. Υπάρχει όμως μια διαφορετική απάντηση πιο διδακτική που βασίζεται στη μέθοδο των διαδοχικών προσεγγίσεων. Θα λέγαμε κάτι αντίστοιχο με τον υπολογισμό του ημ (1^o) από τον Al-Kashi ή την μεθοδολογία της απόδειξης ύπαρξης λύσης μιας διαφορικής εξίσωσης από τον Picard[2], Κεφάλαιο V.

2 Απόδειξη

2.1 Η Απόδειξη του Stainville



$\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^3}+$ etc.,

qui est égale à l'unité, puisqu'elle résulte de la division de 1 par 2 − 1, il s'ensuit que la somme des fractions

$\frac{1}{2}+\frac{1}{2.3}+\frac{1}{2.3.4}+$ etc.,

est nécessairement moindre que l'unité, et par suite, que le nombre e est moindre que 3.

Je dis en second lieu, qu'aucune fraction rationnelle ne peut le représenter, car si une fraction irréductible $\frac{m}{n}$ lui était égale, on aurait

$\frac{m}{n}=2+\frac{1}{2}+\frac{1}{2.3}+\cdots\frac{1}{2..n}+\frac{1}{2..n.n+1}+$ etc.;

mais si on multiplie les deux membres de cette équation par le produit $1.2..n$ de la suite naturelle des nombres, jusqu'à celui qui indique le dénominateur de la fraction qui se trouve dans le premier membre, on aura

$\{1.2...n-1\}\ m =$ un nombre entier +

D'ANALYSE. 341

$\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+1.n+2}+\frac{1}{n+1.n+2.n+3}+$ etc.,

or

$\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+1.n+2}+\frac{1}{n+1.n+2.n+3}+$ etc.

est plus petit que

$\frac{1}{n+1}+\frac{1}{(n+1)^2}+\frac{1}{(n+1)^3}+$ etc.,

et comme cette dernière quantité est égale à $\frac{1}{(n+1)-1}$, et que le premier membre est un nombre entier, il s'ensuivrait que si à un nombre entier on ajoutait une fraction moindre que $\frac{1}{n}$, le résultat serait un nombre entier, ce qui est absurde; donc il est également absurde de supposer que le nombre e soit rationnel, donc il est irrationnel.

N. B. Cette démonstration m'a été communiquée par M. Poinsot, qui m'a dit la tenir de M. Fourier.

233. Si dans l'équation

Σχήμα 2: Το κείμενο του Stainville

Στο Mélanges d' analyse algébrique et de Géométrie, ο Stainville χωρίζει την απόδειξη σε δύο μέρη. Το πρώτο μέρος είναι αφιερωμένο στο να δείξει ότι $2 < e < 3$ χρησιμοποιώντας το ανάπτυγμα του e:

$$e = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!} = 1 + 1 + \frac{1}{2!} + \cdots + \frac{1}{n!} + \ldots$$

[2]Traité d'analyse (1905, en 3 vol.), Éditions Gauthier-Villars (réédition Jacques Gabay, Sceaux, 1991).

Σημειώνει ότι ο αριθμός e είναι προφανώς μεγαλύτερος του 2 και στη συνέχεια φράσσεται προς τα πάνω από τα κλάσματα $\frac{1}{2^n}$, ως εξής:

$$e < 1 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \cdots + \frac{1}{2^n} + \cdots = 1 + 1 + 1 = 3$$

Πρόκειται για μια γεωμετρική σειρά με πρώτο όρο $\frac{1}{2}$ και λόγο $\frac{1}{2}$.

Στο δεύτερο μέρος δίνει την απόδειξη, με απαγωγή σε άτοπο, της αρρητότητας του e. Αν $e = \frac{m}{n}$, $m, n \in \mathbb{N}^*$, τότε:

$$e = \frac{m}{n} = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \cdots + \frac{1}{n!} + \ldots$$

Πολλαπλασιάζοντας τα δύο μέλη με $n!$, έχουμε:

$$(n-1)!m = n! + n! + \frac{n!}{2!} + \cdots + \frac{n!}{n!} + \frac{1}{n+1} + \frac{1}{(n+1)(n+2)} + \frac{1}{(n+1)(n+2)(n+3)} + \ldots \tag{1}$$

Συμβολίζω τους δύο ακεραίους

$$\begin{cases} A &= (n-1)!m \in \mathbb{Z}_{>0} \\ B &= n! + n! + \frac{n!}{2!} + \cdots + \frac{n!}{n!} \in \mathbb{Z}_{>0} \\ C &= \frac{1}{n+1} + \frac{1}{(n+1)(n+2)} + \frac{1}{(n+1)(n+2)(n+3)} + \ldots \end{cases}$$

Έχουμε λοιπόν

$$A = B + C$$

Όπως και προηγουμένως η παραπάνω σειρά φράσσεται από:

$$0 < C < \frac{1}{(n+1)} + \frac{1}{(n+1)^2} + \frac{1}{(n+1)^3} + \cdots = \frac{1}{n} < 1$$

Συμπεραίνει δε από το τελευταίο συμπέρασμα, ότι δηλαδή το C δεν είναι ακέραιος, ότι η ισότητα $A = B + C$ δεν είναι αληθής. Άρα, η υπόθεση ότι το e είναι ρητός είναι λάθος.

2.2 Μια άλλη απόδειξη

Παρακάτω θα δούμε μια άλλη απόδειξη που δείχνει καθαρά το πως δουλεύει η μέθοδος των διαδοχικών προσεγγίσεων. Όπως και ο Stainville, θα αποδείξουμε πρώτα απ΄όλα τη βασική ανίσωση:

$$1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \cdots + \frac{1}{n!} < e < 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \ldots \frac{1}{n!} + \frac{1}{n \cdot n!} \tag{2}$$

Είναι γνωστό ότι $e^1 - e^0 = \int_0^1 e^t dt$. Διαφορετικά:

$$\begin{aligned}
e = 1 + \int_0^1 e^t (t-1)' dt &= 1 + \left((t-1)e^t\right)\Big|_0^1 - \int_0^1 e^t (t-1) dt \\
&= 1 + 1 - \int_0^1 e^t \left(\frac{(t-1)^2}{2}\right)' dt \\
&= 1 + 1 - \left(\frac{(t-1)^2}{2} e^t\right)\Big|_0^1 + \int_0^1 e^t \left(\frac{(t-1)^2}{2!}\right) dt \\
&= 1 + 1 + \frac{1}{2!} + \int_0^1 e^t \left(\frac{(t-1)^2}{2!}\right) dt \\
&= 1 + 1 + \frac{1}{2!} - \int_0^1 e^t \left(\frac{(1-t)^3}{3!}\right)' dt \\
&= \dots \\
&= 1 + 1 + \frac{1}{2!} + \cdots + \frac{1}{n!} + \int_0^1 e^t \left(\frac{(1-t)^n}{n!}\right) dt \\
&= 1 + 1 + \frac{1}{2!} + \cdots + \frac{1}{n!} + \int_0^1 \left((1-t)e^t\right) \frac{(1-t)^{n-1}}{n!} dt \\
&\le 1 + 1 + \frac{1}{2!} + \cdots + \frac{1}{n!} + \int_0^1 \frac{(1-t)^{n-1}}{n!} dt \\
&= 1 + 1 + \frac{1}{2!} + \cdots + \frac{1}{n!} + \frac{1}{n \cdot n!}
\end{aligned}$$

Η ανισότητα συμβαίνει γιατί $0 \le (1-t)e^t \le 1$. Αυτό μπορεί να αποδειχθεί εύκολα αν θεωρήσετε συνάρτηση $f(t) = (1-t)e^t$, για $t \in [0,1]$. Επειδή $f'(t) = -te^t < 0$ η f είναι φθίνουσα. Άρα, $0 \le t \Rightarrow f(t) \le f(0) = 1$ και $t \le 1 \Rightarrow f(1) \le f(t) \Rightarrow 0 \le f(t)$.

Αν υποθέσουμε τώρα ότι το e είναι ρητός έτσι ώστε $e = \frac{a}{b}$, $a, b \in \mathbb{Z}_{>0}$, $b \ne 1$ και $(a,b) = 1$, τότε:

$$1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \cdots + \frac{1}{b!} < e = \frac{a}{b} < 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \cdots + \frac{1}{b!} + \frac{1}{b \cdot b!} \tag{3}$$

Πολλαπλασιάζουμε την (3) με $b!$ και έχουμε:

$$\underbrace{b! + b! + \frac{b!}{2!} + \cdots + \frac{b!}{b!}}_{A_b} < a \cdot (b-1)! < \underbrace{b! + b! + \frac{b!}{2!} + \cdots + \frac{b!}{b!}}_{A_b} + \frac{1}{b} \tag{4}$$

Ο αριθμός A_b είναι ακέραιος, επειδή είναι άθροισμα ακεραίων λαμβάνοντας υπόψη τον όρισμό του $b!$ και ότι κάθε παρανομαστής των επι μέρους κλασμάτων είναι παράγοντας του αριθμητή. Δηλαδή:

$$b! + b! + \frac{b!}{2!} + \cdots + \frac{b!}{(b-2)!} + \frac{b!}{(b-1)!} + \frac{b!}{b!} = 2b! + 1 \cdot 3 \cdots b + \cdots + (b-1)b + b + 1 \in \mathbb{Z}_{>0}$$

Επομένως:

$$A_b < a \cdot (b-1)! < A_b + \frac{1}{b} < A_b + 1$$

Το οποίο είναι αδύνατο αφού δεν υπάρχει ακέραιος μεταξύ δύο διαδοχικών ακεραίων. Επομένως, το e είναι άρρητος. ∎

2.3 Μια απόδειξη του Univ. Paris-Saclay

Η απόδειξη είχε δοθεί σε μάθημα στο Univ. Paris-Saclay το 2020.

Θεώρημα 2.1 *Μελετώντας το ολοκήρωμα $u_n = \displaystyle\int_0^1 x^n e^x dx$, να αποδείξτε ότι το e είναι άρρητος αριθμός.*

Απόδειξη: Στόχος είναι στην απόδειξη αυτή να εκφραστεί ο γενικός όρος u_n σαν ένας γραμμικός συνδυασμός της μορφής $a \cdot e + b$, $a, b \in \mathbb{Z}_{>0}$.

$$\begin{aligned}
u_0 &= \int_0^1 e^x dx = e - 1 \\
u_1 &= \int_0^1 xe^x dx = (xe^x)\Big|_0^1 - \int xe^x dx = e - (e-1) = 1 \\
u_2 &= \int_0^1 x^2e^x dx = (x^2e^x)\Big|_0^1 - 2\int xe^x dx = e - 2 \\
&= \dots \\
u_{n+1} &= \int_0^1 x^{n+1}e^x dx = (x^{n+1}e^x)\Big|_0^1 - (n+1)\int x^n e^x dx = e - (n+1)u_n
\end{aligned}$$

Βλέπουμε λοιπόν ότι $\forall n \in \mathbb{N},\ \exists a, b \in \mathbb{Z}$ έτσι ώστε $u_n = ae + b$.

Η ακολουθία u_n τείνει στο 0 για $n \to +\infty$. Πράγματι:

$$u_n = \int_0^1 x^n e^x dx \Rightarrow |u_n(x)| = \Big|\int_0^1 x^n e^x dx\Big| < \int_0^1 \big|x^n e^x\big| dx < e\int_0^1 x^n dx = \frac{e}{n+1}$$

Άρα, για $n \to +\infty$, $u_n \to 0$.

Ας υποθέσουμε τώρα ότι, e είναι ρητός της μορφής $\dfrac{p}{q}$, $p, q \in \mathbb{Z}_{>0}$. Τότε:

$$0 \le u_n = ae + b = a\frac{p}{q} + b = \frac{ap + bq}{q}$$

Με $ap + bq \in \mathbb{Z}_{>0}$ και $ap + bq \ge 1$. Επομένως:

$$u_n > \frac{1}{q}$$

με $u_n = 0$ για $n \to +\infty$, που είναι αντίφαση. Άρα, $e \in \mathbb{Q}_a$. ∎