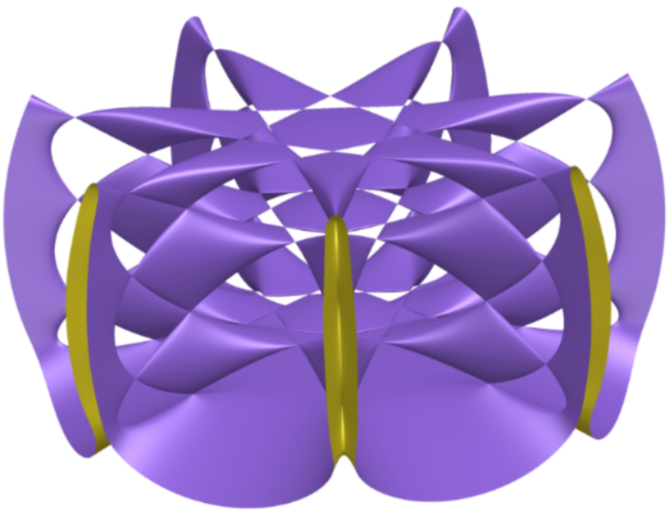
Επαναληπτικά Θέματα Μαθηματικών Γ προσανατολισμού



Λυγάτσικας Ζήνων
zligatsikas@gmail.com
http://blogs.sch.gr/zenonlig/
Σ.Ε. ΠΕ03 Α Αθήνας

1 Σεπτεμβρίου 2024

0.1 Εισαγωγή

Παρακάτω θα βρείτε μια επιλογή από ασκήσεις επανάληψης στα μαθηματικά προσανατολισμού της Γ Λυκείου που διδάχτηκαν τα τελευταία 10 χρόνια της θητείας μου στη Βαρβάκειο Σχολή. Είναι ασκήσεις από διαγωνισμούς άλλων χωρών με κάποια ιδιαίτερα χαρακτηριστικά. Διδάχτηκαν για αυτούς τους μαθητές μας που δεν είχαν πρόβλημα με την ύλη των πανελλαδικών εξετάσεων αλλά ενδιαφερόταν περισσότερο να αντεπεξέλθουν στα μαθηματικά κυρίως των Πολυτεχνικών Σχολών, τουλάχιστον του 1ου έτους.

Θα θέλαμε επίσης να σημειώσουμε ότι σε όλες τις χώρες το αντικείμενο που εξετάζετε στην Ελλάδα (αυτό που λέμε εμείς Ανάλυση δηλαδή), δεν είναι παρά ένα από τα πολλά διαφορετικά θέματα που εξετάζονται, χωρίς ιδιαίτερη αξιολογική βαρύτητα. Πουθενά δεν θα συναντήσετε 4 θέματα Ανάλυσης σε ένα διαγώνισμα!

Λυγάτσικας Ζήνων
Σύμβουλος Εκπαίδευσης ΠΕ03
Α Αθήνας

0.2 Ασκήσεις

0.2.1 Βαρβάκειο

1. Να βρεθεί η εξίσωση της εφαπτομένης έτσι ώστε για καθε ζεύγος συναρτήσεων f και g ορισμένες σε διάστημα που περιέχει το 0 και παραγωγίσιμες στο 0, οι τρείς καμπύλες των συναρτήσεων

$$y - f(x) = 0 \qquad y - g(x) = 0 \qquad y - \frac{1}{2}f(x)g(x) = 0$$

να δέχονται μια κοινή εφαπτομένη στο σημείο με τετμημένη 0.

2. Αποδείξτε ότι κάθε συνεχής συνάρτηση $f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{Q}$ είναι αναγκαστικά σταθερή.

3. Έστω συνάρτηση

$$f(x) = 1 + \alpha_1 \text{συν}\ (x) + \alpha_2 \text{συν}\ (2x) \tag{1}$$

όπου α_1, α_2 είναι πραγματικές σταθερές. Ποιά συνθήκη πρέπει να ικανοποιεί η παράμετρος α_1 έτσι ώστε $\forall x \in \mathbb{R}$, $f(x) \geq 0$;[1]

4. Να βρεθούν όλες οι πραγματικές συναρτήσεις που ικανοποιούν τις δύο συνθήκες :
   (α′) Για κάθε x και y ισχύει: $f(x+y) \leq f(x) + f(y)$.
   (β′) Το όριο $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{f(x)}{x} = 1$.

5. Να βρεθεί πολυώνυμο πρώτου βαθμού τέτοιο ώστε η μεγαλύτερη τιμή που μπορεί να πάρει η παράσταση

$$\left|\sqrt{1+x} - p(x)\right|$$

όταν $x \in [0,3]$ να είναι η μικρότερη δυνατή.
Μπορείτε να κάνετε το ίδιο με πολυώνυμο δευτέρου βαθμού ή μεγαλυτέρου;

6. Δίνεται[2] η συνάρτηση $f(x) = e^x + ax^2 - x$.
   (α′) Όταν $a = 1$ να βρείτε την μονοτονία της f.
   (β′) Όταν για $x \geq 0$ έχουμε $f(x) \geq \dfrac{1}{2}x^3 + 1$, να προσδιορίσετε τις τιμές της παραμέτρου a.

7. Δίνεται[3] η συνάρτηση $f(x) = x^2 - ax + 4\ln x - 3x\ln x$.
   (α′) Αν $a = 3$, εξετάστε τη μονοτονία της f στο διάστημα $(0, e)$.
   (β′) Αν για $x \geq e$ έχουμε $f(x) + 8 \leq -\dfrac{1}{2}(\ln x)^2$, να προσδιορίσετε τις τιμές της παραμέτρου a.

[1] Μπορείτε να γενικεύσετε το ερώτημα για την συνάρτηση

$$f(x) = 1 + \alpha_1 \text{συν}\ (x) + \cdots + \alpha_n \text{συν}\ (nx)$$

Πρόκειται για μια ήπια μορφή της σειράς Fourier

$$f(x) = 1 + \sum_{k=1}^{\infty} \Big(a_k \text{συν}\ (kx) + b_k \text{ημ}\ (kx) \Big)$$

[2] Ο προσδιορισμός της τιμής μιας παραμέτρου σε μια συνάρτηση ώστε να ικανοποιεί μια ανισοτική σχέση απαιτεί μια ιδιαίτερη μεθοδολογική προσέγγιση. Σχετικές ασκήσεις σπανίως συναντάτε στην ελληνική βιβλιογραφία, αντίθετα με αυτές άλλων χωρών, πόσο περισσότερο σε θέματα εισαγωγικών εξετάσεων. Το πρόβλημα συνδέεται με προβλήματα βελτιστοποίησης. Να δώσετε 4 τουλάχιστον αποδείξεις: διαχωρίζοντα·ς την μεταβλητή και ταξινομώντας τη παράμετρο a.

[3] Όπως η προηγούμενη άσκηση.

0.2.2 Διαγωνισμοί άλλων χωρών Κίνα, Αγγλία, Γαλλία, Ρουμανία, ...

8. Θεωρήστε το τόξο AB της καμπύλης $f(x) = |\text{ημ}\ x|$ στο διάστημα $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$. Γιατί δεν υπάρχει χορδή παράλληλη στο τόξο AB; Ποιές από τις συνθήκες του θεωρήματος του Rolle δεν ικανοποιούνται;

9. Δείξτε ότι στο διάστημα $[-1, 2]$ δεν μπορεί να εφαρμοστεί το Θεώρημα της Μέσης τιμής για τις συναρτήσεις $f(x) = \frac{4}{x}$ και $g(x) = 1 - \sqrt[3]{x^2}$. Να κάνετε τα γραφήματα των συναρτήσεων.

10. Έστω η συνάρτηση $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ με $f(x) = \text{συν}\ (x) - 1 + \frac{x^2}{2}$.

    (α′) Υπολογίστε το όριο $\lim\limits_{x\to 0} \frac{f(x)}{x^4}$.

    (β′) Να βρεθεί f' και f''.

    (γ′) Δείξτε ότι $f'(x) > 0, \forall x \in (0, +\infty)$ και $f'(x) < 0, \forall x \in (-\infty, 0)$.

    (δ′) Δείξτε ότι $\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) \geq 0$.

    (ε′) Για την συνάρτηση $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, με $g(x) = \text{συν}\ (x)$, δείξτε ότι το εμβαδόν της επίπεδης επιφάνειας που βρίσκεται ανάμεσα από το γράφημε της συνάρτησης, το άξονα Ox και τις ευθείες $x = 0,\ x = 1$ είναι μεγαλύτερο από $\frac{5}{6}$.

11. Έστω δύο συναρτήσεις

$$\begin{cases} f(x) &= e^x - ax \\ g(x) &= ax - \ln(x) \end{cases}$$

οι οποίες έχουν το ίδιο ελάχιστο.

   (α′) Να βρεθεί η παράμετρος a.

   (β′) Να αποδείξετε ότι υπάρχει μια ευθεία $y = b$ τέτοια ώστε να έχει τρία σημεία τομής συνολικά με τα γραφήματα των συναρτήσεων f και g. Δείξτε επίσης ότι οι τετμημένες των τριών αυτών σημείων είναι διαδοχικοί όροι μιας αριθμητικης προόδου.

12. Υπάρχουν 4 συμπεράσματα για τη συνάρτηση $f(x) = \text{ημ}\ |x| + |\text{ημ}\ x|$.

    1. $f(x)$ είναι άρτια συνάρτηση.
    2. $f(x)$ είναι γνησίως αύξουσα στο διάστημα $\left(\frac{\pi}{2}, \pi\right)$.
    3. Η $f(x)$ έχει 4 ρίζες στο διάστημα $(-\pi, \pi)$.
    4. Η $f(x)$ έχει μέγιστη τιμή το 2.

    Ποιο συμπεράσμα από τα παρακάτω μπορεί να είναι αληθές;
    Α. 1,2 και 4 **Β.** 2 και 4 **Γ.** 1 και 4 **Δ.** 1 και 3

13. Έστω $f(x)$ και $g(x)$ είναι δύο περιοδικές συναρτήσεις ορισμένες στο $\mathbb{R}$. Η περίοδος της $f(x)$ είναι 4, η περίοδος της $g(x)$ είναι 2 και η συνάρτηση f είναι περιττή συνάρτηση. Όταν $x \in (0, 2]$,

$$f(x) = \sqrt{1 - (x-1)^2} \text{ και } g(x) = \begin{cases} k(x+2) & , \quad 0 < x \leq 1 \\ -\frac{1}{2} & , \quad 1 < x \leq 2 \end{cases} \quad \text{όπου } k \in \mathbb{R}_{>0}$$

Αν η εξίσωση $f(x) = g(x)$ στο διάστημα $(0, 9]$ έχει 8 διαφορετικές πραγματικές ρίζες, να βρείτε την τιμή της παραμέτρου k.

14. Δίδεται η συνάρτηση $f(x) = \begin{cases} -x^2 - 2ax - a & , \quad x < 0 \\ e^x + \ln(x+1) & , \quad x \geq 0 \end{cases}$ η οποία συνάρτηση είναι αυστηρώς αύξουσα στους πραγματικούς αριθμούς. Σε ποιο διάστημα πρέπει να ανήκει η παράμετρος a:
    Α. $(-\infty, 0]$ **Β.** $[-1, 0]$ **Γ.** $[-1, 1]$ **Δ.** $[0, +\infty)$

15. Η εξίσωση μιας καμπύλης είναι τέτοια ώστε $\dfrac{dx}{dy} = 6x^2 - 30x + 6a,\ a \in \mathbb{R}_{>0}$. Η καμπύλη έχει σαν κρίσιμο σημείο[4] το $(a, -15)$.

    (α΄) Να βρείτε τη τιμή της παραμέτρου a.

    (β΄) Να χαρακτηρίστε το κρίσιμο σημείο.

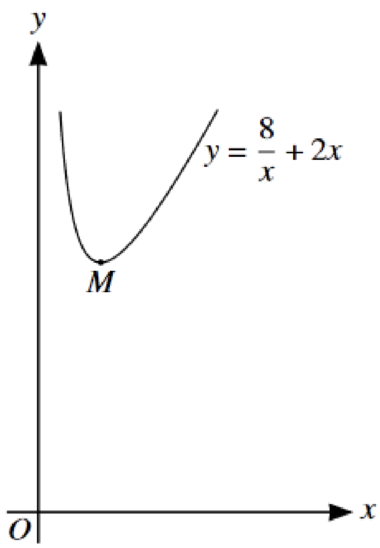
    (γ΄) Να βρείτε την εξίσωση της καμπύλης.

    (δ΄) Να βρείτε τις συντεταγμένες κάθε κρίσιμου σημείου της καμπύλης.

16. Δίδονται οι συναρτήσεις $\begin{cases} f : x \to 10 - 3x & ,\quad x \in \mathbb{R} \\ g : X \to \dfrac{10}{3-2x} & ,\quad x \in \mathbb{R} - \{3/2\} \end{cases}$. Να λυθεί η εξίσωση

$$(f \circ f)(x) = (g \circ f)(x)$$

17. Το διάγραμμα δείχνει το γράφημα $\mathscr{G}_f$ της συνάρτησης $f(x) = \dfrac{8}{x} + 2x$, για $x > 0$ και το ελάχιστο M της συνάρτησης.



    (α΄) Να βρείτε τα: $\dfrac{dy}{dx}$, $\dfrac{d^2y}{dx^2}$ και $\displaystyle\int y^2 dy$.

    (β΄) Να βρεθούν οι συντεταγμένες του M και να χαρακτηρίσετε τη φύση του κρίσιμπου σημείου για $x < 0$.

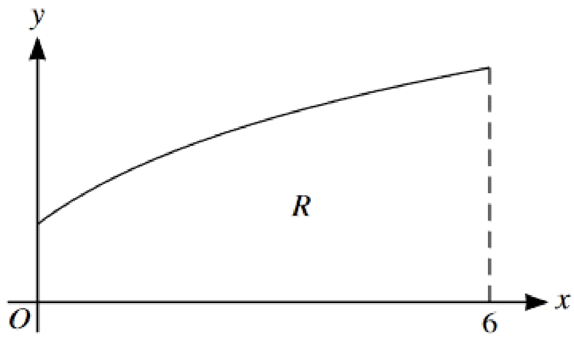
    (γ΄) Βρείτε τον όγκο εκ περισροφής της φραγμένης επιφάνειας από την καμπύλη $\mathscr{G}_f$ τις ευθείες $x = 1$ και $x - 2$, όταν περιστρέφεται γύρω από τον άξονα Ox κατά 360^o.

18. (α΄) Να υπολογίσετε το $\displaystyle\int \frac{4 + e^x}{2e^{2x}} dx$.

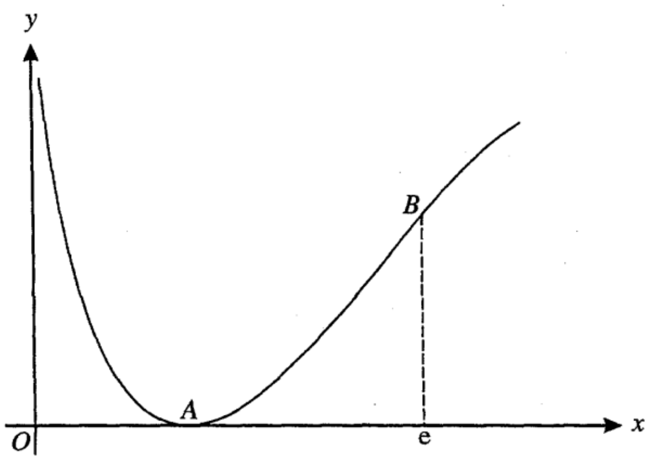
    (β΄) Χωρίς να κάνετε υπολογισμούς να βρεθεί το $\displaystyle\int_2^{10} \frac{1}{2x+5} dx$, να δώσετε μια απάντηση της μορφής $\ln k$.

    (γ΄) Το διάγραμμα δείχνει την καμπύλη $y = \log_{10}(x + 2)$, για $0 \geq x \geq 6$. Η επιφάνεια R είναι φραγμένη από τα διαγράμματα και τις ευθείες $x = 0,\ x = 6$ και $y = 0$. Να βρείτε το εμβαδόν με προσέγγιση 1 δεκάτου.

[4] Συνήθως οι μαθητές ζητάνε να προσδιορίσουν την τιμή του a μέσα από την $\dfrac{dy}{dx} = -15$.



19. Η συνάρτηση f είναι ορισμένη στο $\mathbb{R}_{>0}$ με $f(x) = \left(\ln x\right)^2$. Το διάγραμμα δείχνει το γράφημα της f.



Το ελάχιστο είναι το σημείο A του γραφήματος. Έστω B το σημείο με τετμημένη e.

(α′) Βρείτε τις συντεταγμένες του σημείου A.

(β′) Δείξτε ότι $f''(x) = 0$ στο σημείο B.

(γ′) Χρησιμοποιήστε τη μέθοδο της αντικατάστασης $x = e^4$ για να δείξτε ότι το εμβαδόν της επιφάνειας που φράσσεται από τον άξονα Ox, την ευθεία $x = e$ και το σημείο A, δίνεται από το ολοκλήρωμα

$$\int_0^1 u^2 e^u du$$

(δ′) Να βρείτε την ακριβή τιμή του εμβαδού της παραπάνω επιφάνειας.

20. Έστω f συνάρτηση ορισμένη στο $I = (-\infty, 1]$ με $f(x) = 2x\sqrt{1-x}$ και $\mathcal{C}_f$ η αντίστοιχη καμπύλη. Έστω (T) η εφαπτόμενη της $\mathcal{C}_f$ στο σημείο με $x = 0$.
Δείξτε ότι:

(α′) $\forall x < 1,\ f'(x) = \dfrac{2-3x}{\sqrt{1-x}}$;

(β′) $\forall x \in I,\ f(x) \leq \dfrac{4\sqrt{3}}{9}$;

(γ′) $(T)\ :\ y = 2x$;

(δ′) Η καμπύλη $\mathcal{C}_f$ βρίσκεται πάνω απο την (T) ;

21. Έστω $f(x)$ και $g(x)$ συναρτήσεις ορισμένες στο $I = (-1, +\infty)$ με:

$$\begin{cases} f(x) &= \ln(x+1) + e^{-x} \\ g(x) &= e^{x} - (x+1) \end{cases}$$

Τότε,

(α΄) Η g είναι θετική στο I ;

(β΄) $\forall x \in I$: $f'(x) = \dfrac{e^{-x}}{x+1} g(x)$;

(γ΄) Η f είναι μία συνάρτηση 1-1 του I στο $(0, \infty)$;

(δ΄) Υπάρχει ένα μόνο $a \in I$ τέτοιο ώστε $f(a) = 0$;

22. Έστω f ορισμένη στο $\mathbb{R}$ με $f(x) = (-x+3)e^{x}$. Έστω $\mathscr{G}_f$ η αντίστοιχη καμπύλη. Τότε :

    (α΄) $\forall x > 0$: $f(x) \geq -x+3$;

    (β΄) Η $y = 0$ είναι ασύπτωτη της $\mathscr{G}_f$;

    (γ΄) Η f δέχεται ένα μοναδικό ακρότατο ;

    (δ΄) $\forall m \in \mathbb{R}$ με $m \neq e^2$, η $f(x) = m$ δέχεται ή το 0 ή το 2 σαν λύση ;

23. Έστω $f(x) = \ln(e^{2x} - e^{x} + 1)$. Έστω $\mathscr{G}_f$ η αντίστοιχη καμπύλη. Τότε :

    (α΄) $D_f = \mathbb{R}^{+}$;

    (β΄) $\forall x \in D_f \cdot f(x) = 2x + \ln(1 - e^{-x} + e^{-2x})$;

    (γ΄) Η $\mathscr{G}_f$ δέχεται την $y = 2x$ σαν ασύμπτωτο στο $+\infty$;

    (δ΄) Η $\mathscr{G}_f$ δέχεται μοναδική εφαπτομένη παράλληλη στον άξονα $x'x$;

24. Έστω $f : \mathbb{R}^{*} \to \mathbb{R}$ με $f(x) = x\text{ημ}\,\dfrac{2}{x}$.

    (α΄) $f(\dfrac{4}{\pi}) = -\dfrac{4}{\pi}$;

    (β΄) $f(x) = 0$ αν και μόνον αν υπάρχει $k \in \mathbb{Z}$: $x = \dfrac{1}{k\pi}$;

    (γ΄) $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = 1$;

    (δ΄) $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 2$;

25. $\forall a, b \in \mathbb{R}^{*}$, ορίζω στο $(0, +\infty)$ την $f_{ab}(x) = ax + b + \dfrac{\ln x}{x}$. Έστω $\mathscr{G}_{ab}$ το γράφημα αυτής της καμπυλης. Τότε:

    (α΄) $\forall (a, b)$ η $y = ax + b$ είναι ασύπτωτος στην $\mathscr{G}_{ab}$;

    (β΄) $\forall (a, b)$: $\lim\limits_{x \to 0} f_{ab}(x) = b$;

    (γ΄) Υπάρχει ένα ζεύγος (a, b) έτσι ώστε η $\mathscr{G}_{ab}$ να διέρχεται απο το $A(1, 1)$;

    (δ΄) Δεν υπάρχει (a, b) έσι ώστε η $\mathscr{G}_{ab}$ να περνά απο το $A(1, 0)$ και να δέχεται στο B μια εφαπτομένη παράλληλη στην $y = 2x$;

26. Η καμπύλη $f(x) = (x+a)e^{x}$ έχει δύο εφαπτόμενες που διέρχονται από το $(0, 0)$. Ποια είναι η τιμή της a;

27. Έστω $n \in \mathbb{N}$ και $I_n = \displaystyle\int_0^1 (1 + x^n) \ln(1+x) dx$. Τότε:

    (α΄) $\forall x \in [0, 1]$: $0 \leq \ln(1+x) \leq \ln 2$;

    (β΄) $\forall x \in \mathbb{N}^{*}$: $0 \leq I_n \leq 2 \ln 2$;

    (γ΄) $(I_n)_{n \in \mathbb{N}^{*}}$ είναι φθίνουσα ;

28. Έστω F συνάρτηση με $D_F = \mathbb{R}$ και $F(x) = \displaystyle\int_1^x t e^{1-t^2} dt$. Τότε:

(α΄) $F(x)$ είναι θετική $\forall x > 0$;

(β΄) $\forall x \in \mathbb{R}$: $F(x) = \frac{1}{2}(e^{1-x^2} - 1)$;

(γ΄) $\forall x \in \mathbb{R}$: $F'(x) = xe^{1-x^2} - 1$;

(δ΄) $\lim_{x\to+\infty} F(x) = +\infty$

29. Έστω $f(x) = -1 - e^x$ στο $\mathbb{R}$. Τότε:

(α΄) $\forall x \leq -1$, $\frac{-1}{e} \leq f'(x) \leq 0$;

(β΄) Η εξίσωση $f(x) = x$ δέχεται δύο λύσεις στο $\mathbb{R}$;

30. Έστω f μια συνάρτηση ορισμένη στο $[0,1]$. Έστω επίσης οι παρακάτω προτάσεις:

A: η f δεν είναι παραγωγίσιμη στο $(0,1)$.

B: $\forall x \in [0,1]$, $f(x) \neq x$.

Γ: $f(0) = 0$ και $f(1) = 1$.

(α΄) Η A σημαίνει ότι: $\forall x_0 \in (0,1)$, $f(x)$ δεν είναι παραγωγίσιμη στο x_0;

(β΄) Η B σημαίνει ότι: $\forall x \in [0,1]$, $f(x) > x$ ή $f(x) < x$;

(γ΄) Η Γ σημαίνει ότι: $f(x)$ είναι αύξουσα στο $[0,1]$;

(δ΄) Η άρνηση της B είναι: $\forall x \in [0,1]$, $f(x) = x$;

(ε΄) Η άρνηση της Γ είναι: $f(0) \neq 0$ και $f(1) \neq 1$;

31. (α΄) $\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x+2} - \sqrt{x+1}\right) = 1$;

(β΄) $\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2+1} - x\right) = 1$;

(γ΄) $\lim_{x\to-\infty}\left(\sqrt{x^2+2x+2} + x\right) = 1$;

(δ΄) $\lim_{x\to-\infty}\left(\frac{\sqrt{x^2+1}+x}{x}\right) = 1$;

32. $\forall x \in [2, +\infty]$,

(α΄) $\int_0^x \left(\text{συν}^2 t - \text{ημ}^2 t\right) dt = \frac{1}{2}\text{ημ}\, 2x$;

(β΄) $\int_0^x 2\text{συν}^2 t\, dt = x - \frac{1}{2}\text{ημ}\, 2x$;

(γ΄) $\int_0^x (t^2-1)e^{2t} dt = \frac{1}{4}\Big((2x^2 - 2x - 1)e^{2x} + 1\Big)$;

(δ΄) $\int_1^x \left(\frac{\ln t}{t}\right) dt = x\ln x - x + 1$;

(ε΄) $\int_0^x \left(\frac{t}{\sqrt{t^2+1}}\right) dt = \sqrt{x^2+1} - 1$;

33. Έστω συνάρτηση $f(x) = \ln(e^{2x} - e^x + 1)$. Τότε:

(α΄) Το πεδίο ορισμού D_f της $f(x)$ είναι το $\mathbb{R}^+$;

(β΄) $\forall x \in D_f$: $f(x) = 2x + \ln(1 - e^{-x} + e^{-2x})$;

(γ΄) Το γράφημα C_f δέχεται ασύμπτωτη την ευθεία $2x = y$ στο $+\infty$;

(δ΄) Η C_f δέχεται μια μόνο εφαπτομένη παράλληλη στον Ox ;

34. Έστω μια συνάρτηση f ορισμένη και δύο φορές παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$. Έστω $\mathcal{C}_f$ η αντίστοιχη καμπύλη και (T) η εφαπτομένη της $\mathcal{C}_f$ στο $D(0, f(0))$. Έστω $g(x)$ συνάρτηση στο $\mathbb{R}$ με $g(x) = f(x) - f(0) - xf'(0)$.

    (α') Η $\mathcal{C}_f$ είναι πάνω απο την (T) στο $[-1, 1]$ αν και μόνο αν $\forall x \in [-1, 1]$ $g(x) \geq 0$;

    (β') Αν $g'(x)$ είναι γνησίως αύξουσα στο $[-1, 1]$, τότε η $\mathcal{C}_f$ είναι πάνω απο την (T) στο $[-1, 1]$;

    (γ') Αν $g'(x)$ είναι γνησίως φθίνουσα στο $[-1, 1]$, τότε η $\mathcal{C}_f$ είναι κάτω απο την (T) στο $[-1, 1]$;

    (δ') Αν $g''(x)$ είναι θετική στο $[-1, 1]$, τότε η $\mathcal{C}_f$ είναι πάνω απο την (T) στο $[-1, 1]$;

    (ε') Αν $g''(x)$ είναι αρνητική στο $[-1, 1]$, τότε η $\mathcal{C}_f$ είναι κάτω απο την (T) στο $[-1, 1]$;

35. Έστω F μια συνάρτηση ορισμένη στο $I = [0, +\infty)$ με $F = \displaystyle\int_0^x e^{-t}\sqrt{t}dt$.

    (α') Η F είναι θετική και αυστηρώς αύξουσα ;

    (β') $t \geq 0$, $\sqrt{t} \leq t + \dfrac{1}{4}$;

    (γ') $\displaystyle\int_0^x \Big(t + \frac{1}{4}\Big)e^{-t}dt = \frac{5}{4} - \Big(x + \frac{5}{4}\Big)e^{-x}$;

    (δ') $\forall x \in I$, $F(x) \leq \dfrac{5}{4}$;

36. Έστω $x > 0$ Θέτω $f(x) = \displaystyle\int_1^x \Big(\frac{\ln(2t)}{t^2}\Big)dt$.

    (α') $x > 0$: $F'(x) = \dfrac{\ln(2x)}{x^2} - ln2$;

    (β') $x \in \Big(\dfrac{1}{2}, 1\Big)$: $F(x) < 0$;

    (γ') $x > 0$: $F(x) = -\dfrac{\ln(2x)}{x} - \dfrac{1}{x} + \ln 2 - 1$;

    (δ') $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} F(x) = \ln 2 + 1$;

37. Έστω $f(x)$ μία συνάρτηση ορισμένη και παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R} - \{1\}$ με τον εξής πίνακα μεταβολών:

x	$-\infty$		1		3		$+\infty$
		$+\infty$	$\Vert$		4		
$f(x)$		$\nearrow$	$\Vert$	$\nearrow$		$\searrow$	
	0		$\Vert$	$-\infty$			1

    (α') $\forall x \in \mathbb{R}$ η $f(x) = a$ δέχεται το πολύ μια ρίζα ;

    (β') $\forall a \in (-\infty, 0)$ η $f(x) = a$ δέχεται ακριβώς μια ρίζα ;

    (γ') Η καμπύλη $\mathcal{C}_f$ δέχεται δύο οριζόντιες ασυμπτώτους ;

    (δ') Η $f'(x) = 0$ δέχεται μια το πολύ ρίζα ;

    (ε') $\forall x \in (3, +\infty)$, $f'(x) < 0$;

38. Έστω $f(x)$ ορισμένη στο $\mathbb{R} - \{0\}$ με $f(x) = x^2 + 1 - 2\ln|x|$. Τότε:

    (α') Η $f(x)$ είναι άρτια ;

    (β') $\forall x \in (-\infty, 0)$, $f'(x) = 2x + \dfrac{2}{x}$;

    (γ') $f(x)$ $\downarrow$ στο $(-\infty, -1)$;

    (δ') Η $f(x)$ έχει τοπικό ελάχιστο για $x = 1$;

    (ε') $\displaystyle\lim_{x\to 0^-} f(x) = -\infty$;

39. Έστω $f(x)$ μια συνάρτηση ορισμένη στο $\mathbb{R}$ με $f(x) = x + 1 + \sqrt{x^2 + x + 1}$. Τότε:

(α′) Η $f(x)$ είναι $\uparrow$ στο $[-\frac{1}{2}, +\infty)$;

(β′) $\forall x \in (-\infty, -\frac{1}{2})$, $f'(x) \geq 0$;

(γ′) Η $y = 2x + 1$ είναι ασύμπτωτος της $\mathcal{C}_f$ στο $+\infty$;

(δ′) Η ευθεία $y = 0$ είναι ασύμπτωτος της $\mathcal{C}_f$ στο $-\infty$;

(ε′) Η ευθεία $y = \frac{1}{2}$ είναι ασύμπτωτος της $\mathcal{C}_f$ στο $-\infty$;

40. (α′) Αν $f(x) = \dfrac{e^{-x}}{1 + e^{-x}}$, βρείτε την παράγουσα $F(x)$ της $f(x)$ η οποία παίρνει την τιμή $-\ln 2$ για $x = 0$.

(β′) i. Υπολογίστε το $A = \displaystyle\int_0^1 f(x)dx$.

ii. Βρείτε $c \in \mathbb{R}$ έτσι ώστε $A = \ln c$.

(γ′) Θέτω $\forall z \in \mathbb{R}^*$, $u_z = \displaystyle\int_{\frac{1}{z}}^{1+\frac{1}{z}} f(x)dx$. Δείξτε ότι $\displaystyle\lim_{z \to +\infty} u_z = A$.

(δ′) i. Έστω $a, b \in \mathbb{R}$ με $a < b$. Δείξτε ότι $f(b) \leq f(x) \leq f(a)$, $\forall x \in [a, b]$.

ii. *** Ποιά τιμή πρέπει να δώσω στα a και b έτσι ώστε:

$$\frac{1}{n} f\Big(\frac{k+1}{n}\Big) \leq \int_a^b f(x)dx \leq \frac{1}{n} f\Big(\frac{k}{n}\Big), \quad k \in \mathbb{Z}, \quad n \in \mathbb{Z}^*.$$

41. Έστω M σημείο του καρτεσιανού επιπέδου, $\forall x \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ η θέση του $M(t)$ δίνεται απο τις συντεταγμένες $(x(t), y(t))$ που ορίζονται ως εξής:

$$\begin{cases} x(t) &= \dfrac{1}{\text{συν}\, t} \\ y(t) &= \text{εφ}\, t \end{cases}$$

$M(t)$ γράφει μια καμπύλη που την σημειώνουμε με $\mathscr{G}$.

(α′) i. Αποδείξτε ότι η $\mathscr{G}$ είναι συμμετρική ως προς Ox.

ii. Βρείτε το πιο μικρό διάστημα I έτσι ώστε να μπορείτε να μελετήσετε τη $\mathscr{G}$.

(β′) i. Βρείτε τις $x'(t)$ και $y'(t)$.

ii. Δώστε τον πίνακα μεταβολής των $x(t)$ και $y(t)$. Ποιά είναι τα όρια των $x(t)$ και $y(t)$, στα όρια του διαστήματος I του ερωτήματος 41(α′)ii.

(γ′) *** Δώστε τις συντεταγμένες του $M(0)$ και βρείτε την εφαπτομένη της $\mathscr{G}$ στο $M(0)$.

(δ′) i. $\forall x \in I$, υπολογίστε $y^2(t) - x^2(t)$.

ii. Γράψτε για κάθε $t \in I$ το $y(t)$ σαν συνάρτηση του $x(t)$.

(ε′) i. Δείξτε ότι $\displaystyle\lim_{x \to +\infty} (\sqrt{x^2 - 1} - x) = 0$

ii. Βρείτε το $\displaystyle\lim_{t \to \frac{\pi}{2}} (y(t) - x(t))$

iii. Αν $\mathscr{G}^+$ το τμήμα της $\mathscr{G}$ που βρίσκεται στο πρώτο τεταρτημόριο, τι συμπεραίνεται για την θέση του σχετικά με την $y = x$;

42. Έστω $F(x)$ μια συνάρτηση ορισμένη στο $\mathbb{R}$ και $F(0) = 0$. Η παράγωγος αυτής είναι $F'(x) = \dfrac{1}{x^2 + 1}$, $\forall x \in \mathbb{R}$. Υποθέτουμε ότι μία τέτοια συνάρτηση υπάρχει και ότι δεν επιθυμούμε να δώσουμε ακριβή μορφή στη $F(x)$. Έστω $\mathscr{G}$ η καμπύλη της F στο ορθοκανονικό σύστημα.

(α′) Έστω $G(x)$ ορισμένη στο $\mathbb{R}$ με $G(x) = F(x) + F(-x)$.

i. Δείξτε οτι η $G(x)$ είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$. Υπολογίστε την $G(x)$.

ii. Υπολογίστε την $G(0)$ και συμπεραίνατε ότι η $F(x)$ είναι περιττή.

(β′) Έστω $H(x)$ ορισμένη στο $(0, +\infty)$ και $H(x) = F(x) + F(\frac{1}{x})$.

i. Δείξτε ότι η $H(x)$ είναι παραγωγίσιμη στο $(0,+\infty)$ και υπολογίστε το $H'(x)$.
ii. Δείξτε ότι, $\forall x \in (0,+\infty)$, $H(x) = 2F(1)$.
iii. Δείξτε ότι, $\lim\limits_{x\to+\infty} F(x) = 2F(1)$.
iv. Βρείτε μια ασύπτωτο της μορφής $y = ax$ του γραφήματος $\mathscr{G}$;

(γ′) i. Αποδείξτε ότι για $x \in [0,1]$, $\frac{1}{2} \leq F'(x) \leq 1$. Δείξτε επίσης ότι: $\frac{1}{2} \leq F(1) - F(0) \leq 1$. Δώστε με προσέγγιση μια τιμή της $F(1)$·
ii. Έστω T μια συνάρτηση στο $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ με $T(x) = F(\text{εφ } x) - x$. Δείξτε ότι η T είναι μια σταθερή συνάρτηση στο $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$. Βρείτε ακριβώς την $F(1)$.

(δ′) Γράψτε τον πίνακα μεταβολής της $F(x)$ στο $\mathbb{R}$. Χαράξτε την καμπύλη $\mathscr{G}$ τις ασυμπτώτους και τις εφαπτομένες στα σημεία με $x = -1,\ 0$ και 1.

43. (α′) Έστω f ορισμένη στο $(0,+\infty)$ με $f(x) = \ln(\sqrt{x+1} - 1)$.
i. Υπολογίστε τα όρια της f στο 0 και $+\infty$.
ii. Μελετήστε τη μεταβολή της f στο $(0,+\infty)$.
iii. Έστω $\mathscr{G}_f$ το γράφημα της f. Υπολογίστε το $f(3)$. Αν $A(3, f(3))$ και $B\left(\frac{5}{4}, f(\frac{5}{4})\right)$, αναπαραστήστε στο ορθοκανονικό σύστημα: την $\mathscr{G}_f$, τα σημεία A, B, R (η προβολή του B στον άξονα $x'x$) και H (η προβολή του B στον άξονα $y'y$).

(β′) Έστω z ο μιγαδικός με εικόνα $M(x,y)$. Έστω $h(z) = iz$. Αν $z' = x' + iy'$ η εικόνα του z μέσω της h:
i. εκφράστε τα x, y συναρτήσει των x', y', καθώς και τα x', y' συναρτήσει των x, y.
ii. βρείτε τις συντεταγμένες των A', B', R' που είναι οι εικόνες των A, B, R μέσω της h.

(γ′) Έστω $g(x) = e^{-2x} + 2e^{-x}$ και $\mathscr{G}_g$ το γράφημα της καμπύλης της συνάρτησης $g(x)$.
i. Δείξτε ότι αν $M \in \mathscr{G}_f$ τότε $h(M) = M' \in \mathscr{G}_g$.
ii. Χαράξτε στο ίδιο γράφημα με την $\mathscr{G}_f$ τα σημεία A', B', R' και $\mathscr{G}_g$. (Δεν είναι απαραίτητη η μελέτη της $g(x)$.)

(δ′) i. Υπολογίστε το $\int_0^{\ln 2} g(x)dx$. Εκφράστε γεωμετρικά αυτό το ολοκλήρωμα.
ii. Έστω $(\mathcal{D})$ το εμβαδόν του τομέα $\mathcal{D}$ του ορθοκανονικού συστήματος που περιέχεται μεταξύ των AO, OH, HB και της $\mathcal{C}$ με άκρα τα B και A. Βρείτε το $(\mathcal{D})$.
iii. Έστω $I = \int_{\frac{5}{4}}^{3} \ln(\sqrt{1+x} - 1)dx$. Βρείτε τη σχέση μεταξύ των $(\mathcal{D})$ και I και υπολογίστε το I.

44. (α′) Μελετήστε τη συνάρτηση $f(x) = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$. Χαράξτε στο ορθοκανονικό σύστημα το γράφημα $\mathscr{G}_f$ της $f(x)$.

(β′) Έστω $F(x) = \int_0^x f(t)dt$.
i. Αποδείξτε ότι η $F(x)$ είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$.
ii. Μελετήστε τη μεταβολή της $F(x)$ στο $\mathbb{R}$.
iii. Δείξτε ότι $\int_{-x}^{0} f(t)dt = \int_0^x f(t)dt$ και στη συνέχεια ότι η $F(x)$ είναι περιττή.
iv. Βρείτε την εφαπτομένη της καμπύλης $\mathscr{G}_f$ στο $(0,0)$.

(γ′) i. Αποδείξτε ότι: $\forall x \in \mathbb{R}^+$, $\frac{1}{\sqrt{1+x^2}} \geq \frac{1}{1+x}$.
ii. Βρείτε το πρόσημο της $H(x) = F(x) - \ln(x+1)$ στο $(0,+\infty)$ και αποδείξτε ότι $F(x) \geq \ln(x+1)$.
iii. Ποιό είναι το όριο της $F(x)$ για $x \to +\infty$.

(δ′) Έχοντας υπ΄ όψιν τα αποτελέσματα των ερωτημάτων 2 και 3, παραστήστε γραφικά την $F(x)$.

45. Έστω $f(x)$ συνάρτηση ορισμένη στο $[0,+\infty)$ με

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{\ln(x^2+1)}{x} & \text{αν} \quad x>0 \\ 0 & \text{αν} \quad x=0 \end{cases}$$

Έστω $\mathscr{G}_f$ το αντίστοιχο γράφημα.

(α′) i. Βρείτε το $\lim_{x\to 0}\dfrac{f(x)-f(0)}{x}$. Στη συνέχεια βρείτε την εφαπτομένη T_0 της $\mathscr{G}_f$ στο σημείο 0.

ii. Δείξτε ότι $\lim_{x\to 0} f(x)=0$ και ότι $\lim_{x\to+\infty} f(x)=0$.

(β′) i. Έστω $g(x)=\dfrac{2x^2}{x^2+1}-\ln(x^2+1)$ για $x>0$. Μελετήστε την $g(x)$.

ii. Δείξτε ότι η $g(x)=0$ δέχεται μια μόνο ρίζα a στο $[1,+\infty)$.

iii. Υπολογίστε το $f'(x)$ και δώστε τη σχέση μεταξύ $f'(x)$ και $g(x)$.

iv. Αποδείξτε ότι $f(a)=\dfrac{2a}{a^2+1}$, όπου a η ρίζα της $g(x)=0$.

v. Δώστε τον πίνακα μεταβολής της f και χαράξτε την $\mathcal{C}_f$.

(γ′) Έστω $F(x)$ στο $[1,+\infty)$ με $F(x)=\displaystyle\int_1^x f(t)dt$.

i. Δείξτε ότι $\forall x\in[1,+\infty)$, $\ln(x^2)<\ln(x^2+1)$. Βρείτε $A\in\mathbb{R}$ με $x>1$ και $A\dfrac{\ln x}{x}<\dfrac{\ln(x^2+1)}{x}$.

ii. $\forall x\geq 1$ υπολογίστε το $I(x)=\displaystyle\int_1^x \frac{\ln t}{t}dt$.

iii. A′. Βρείτε μια συνάρτηση $\phi(x)$, χρησιμοποιώντας τα προηγούμενα ερωτήματα, τέτοια ώστε $\forall x\geq 1$: $\phi(x)<F(x)$.

B′. Βρείτε το όριο της $F(x)$ για $x\to+\infty$.

iv. Βρείτε την $F'(x)$ και δώστε τον πίνακα μεταβολής $F(x)$.

46. Ο σκοπός είναι να υπολογίσουμε το ολοκλήρωμα $K=\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}}(\text{συν } j)\ln(\text{συν } j)dj$.

(α′) Έστω $f:(-1,1)\to\mathbb{R}$ ορισμένη απο την $f(x)=\dfrac{x^2}{1-x^2}$. Βρείτε a, b, g έτσι ώστε $\forall x\in(-1,1)$ $f(x)=a+\dfrac{b}{1-x}+\dfrac{g}{1+x}$.

(β′) $\forall x\in(-1,1)$, έστω $F(x)=\displaystyle\int_0^x f(u)du$. Να βρεθούν:

i. το $F(x)$,

ii. το $F'(x)$ συναρτήσει του $f(x)$.

(γ′) Έστω $j\in(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2})$, $g(x)=F(\text{ημ } j)$. Υπολογίστε το $g'(j)$.

(δ′) Βρείτε το $I=\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\text{ημ }^2 j}{\text{συν } j}dj$.

(ε′) Υπολογίστε το K με τη βοήθεια του I.

47. Έστω $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$, με $f(x)=\dfrac{\ln x+xe}{x^2}$. Έστω $\mathscr{G}_f$ η αντίστοιχη καμπύλη.

(α′) Έστω $g:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$ με $g(x)=-2\ln x-xe+1$.

i. Βρείτε τα όρια της g στα άκρα του πεδίου ορισμού της.

ii. Δείξτε ότι στο $[0.5,1]$ η $g(x)=0$ δέχεται μόνο μία λύση ξ.

iii. Σχηματίστε τον πίνακα μεταβολών της $g(x)$ όταν $x\in(0,+\infty)$ και χαράξτε την καμπύλη της συνάρτησης.

(β′) i. Βρείτε τα άρια της $f(x)$ στα άκρα του πεδίου ορισμού της.

ii. Επαληθεύστε ότι $f'(x) = \dfrac{g(x)}{x^3}$.

iii. Σχηματίστε τον πίνακα μεταβολής της $f(x)$ στο $(0, +\infty)$ και χαράξτε την $\mathscr{G}_f$.

iv. Δείξτε ότι η μεγίστη τιμή της $f(x)$ είναι $\dfrac{1+\xi e}{2\xi^2}$.

(γ′) Έστω $I_x = \displaystyle\int_{e^x}^{e^{x+1}} \Big(\frac{\ln t}{t^2}\Big)dt$ και $A_x = \displaystyle\int_{e^x}^{e^{x+1}} f(t)dt,\ \forall x \in \mathbb{R}$.

i. Δείξτε ότι $I_x = \dfrac{x+1}{e^x} - \dfrac{x+2}{e^{x+1}}$.

ii. Δείξτε ότι $A_x = I_x + e$.

iii. Υπολογίστε το I_0 και A_0.

iv. Δώστε τη γεωμετρική σημασία του A_0.

v. Βρείτε το όριο της A_x για $x \to +\infty$.

48. (α′) Έστω $\phi(x) = ae^x + be^{-x}$, $a,\ b \in \mathbb{R}$.

i. Δείξτε ότι $\phi''(x) - \phi(x) = 0$ (**E**)

ii. Να βρεθούν τα a και b έτσι ώστε η $\mathscr{G}_\phi$ να περνά απο το $(\ln 2, \frac{3}{4})$ και να έχει η εφαπτόμενη κλίση στο σημείο αυτό ίση με $\frac{5}{4}$.

(β′) Έστω $\phi(x) = \dfrac{1}{2}(e^x - e^{-x})$.

i. Έστω $\mu \in \mathbb{R}$, δείξτε ότι η $\phi(x) = \mu$ είναι ισοδύναμη με την $e^{2x} - 2\mu e^x - 1$. Εξετάστε αν η $\phi(x) = \mu$ έχει μοναδική ρίζα στο $\mathbb{R}$. Βρείτε τη ρίζα αυτή συναρτήσει της μ.

ii. Βρείτε τα $\lim\limits_{-\infty} \phi(x)$ και $\lim\limits_{+\infty} \phi(x)$.

iii. Υπολογίστε την $\phi'(x)$ και δώστε τον πίνακα μεταβολής της.

iv. Α′. Βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης (τ) της $\mathscr{G}_\phi$ στο $x = 0$.

Β′. Μελετήστε τη μεταβολή της $d(x) = \phi(x) - x$ και βρείτε τη θέση της $\mathscr{G}_\phi$ ως προς την (τ).

Γ′. Χαράξτε την $\mathscr{G}_\phi$ και (τ).

v. Έστω Δ το σύνολο των σημείων M στο γράφημα $\mathscr{G}_\phi$ του οποίου οι συντεταγμένες ικανοποιούν τις συνθήκες:

$$\begin{cases} 0 & \leq & x & \leq & 1 \\ x & \leq & y & \leq & \phi(x) \end{cases}$$

Υπολογίστε το εμβαδόν του Δ.

(γ′) Έστω $f(x) = \displaystyle\int_0^x (x-t)f(t)dt = x$ (**H**)

i. Δείξτε ότι η $f(x)$ διέρχεται απο την αρχή των αξόνων.

ii. Δείξτε ότι η εφαπτομένη της $f(x)$ στο $(0,0)$ είναι η $y = x$.

iii. Δείξτε ότι η $f(x)$ επαληθεύει την (**E**).

iv. Δείξτε ότι η $\phi(x) = \dfrac{1}{2}(e^x - e^{-x})$, επαληθεύει την (**H**).

49. Με $M(z)$ συμβολίζουμε την εικόνα του z στο μιγαδικό επίπεδο. Έστω $A(2+i)$ και $B(2i)$ σημεία του επιπέδου.

(α′) Αν f ένας μετασχηματισμός του σημείου $M(z)$ στο $M'(z)$ έτσι ώστε: $z' = (1+2i)z - 4 - 2i$. Τότε:

i. βρείτε την εικόνα των σημείων A και B μέσω του f,

ii. δείξτε ότι ο f δέχεται ένα σταθερό σημείο $M(\omega)$ και προσδιορίστε τον μιγαδικό ω.

(β′) Έστω $v = 1 - 2i$. Δείξτε ότι αν z' είναι η εικόνα του z μέσω του f, τότε για κάθε $z \in \mathbb{C}$, $z' - z = -2i(\omega - v)$.

(γ′) Βρείτε το λόγο $\dfrac{MM'}{M\Omega}$, για κάθε $M(z)$, $z \in \mathbb{C}$, καθώς και την γωνία $(\widehat{M\Omega, MM'})$.

(δ′) Εξάγεται, βάσει του προηγούμενου ερωτήματος, μια γεωμετρική κατασκευή του M', αν είναι γνωστή η θέση του M.

50. Έστω f ένας μετασχηματισμός στο $\mathbb{C}$ έτσι ώστε $f(z) = \dfrac{2-iz}{1-z}$, $\forall z \neq 1$. Έστω $A = (1,0)$ το σημείο 1 και $B = (0,-2)$ το σημείο $-2i$.

   (α') Έστω $z = x + iy$, $x, y \in \mathbb{R}$. Γράψτε την αλγεβρική μορφή της f (ή την f συναρτήσει των x και y). Βρείτε το σύνολο των εικόνων M του z έτσι ώστε $f(z) \in \mathbb{R}$.

   (β') Έστω $z' = f(z)$.

   i. Επαληθεύστε ότι το i δεν είναι εικόνα μέσω της f κανενός $z \in \mathbb{C}$. Για $z \neq i$ εκφράστε το z συναρτήσει του z'.

   ii. Αν Γ και Δ οι εικόνες των μιγαδικών 2 και i, M η εικόνα του z, $(z \neq 1)$, και M' του $z' = f(z)$, $(z' \neq i)$, δείξτε ότι $OM = \dfrac{M'\Gamma}{M'\Delta}$.

   iii. Αν το M διαγράφει την περιφέρεια κέντρου O και ακτίνας 1, η εικόνα του M' μεσω της f, ανήκει σε μία ευθεία σταθερή.

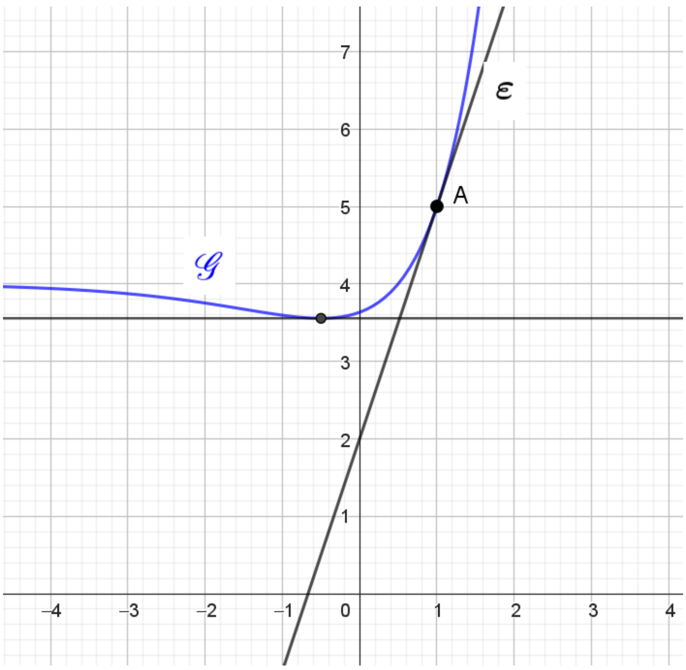
   iv. Δείξτε ότι αν το M είναι σημείο του $x'x$ διαφορετικό του O και Δ, τότε M' ανήκει στη $\Gamma\Delta$.

51. Θεωρώ στο μιγαδικό επίπεδο τους $z_A = -1$ και $z_B = 3i$ με εικόνες αντίστοιχα A και B. Έστω f μία απεικόνιση έτσι ώστε $\forall z \in \mathbb{C}$ με $z \neq 1$: $f(z) = i\left(\dfrac{z-3i}{z+1}\right)$.

   (α') Έστω $z_\Gamma = 2 - i$ με εικόνα Γ. Δείξτε ότι υπάρχει ένα μόνο σημείο Δ με $f(\Delta) = \Gamma$.

   (β') Καθορίστε τη φύση του τριγώνου $AB\Gamma$.

52. Έστω η συνάρτηση f ορισμένη επάνω στο $\mathbb{R}$ από σχέση $f(x) = (ax+b)e^{x-1} + c$, όπου $a, b, c \in \mathbb{R}$.
Στο σχήμα βλέπουμε τη καμπύλη $\mathscr{G}$ της συνάρτησης f. Η καμπύλη διέρχεται από το σημείο $A(1,5)$ και δέχεται την ευθεία ε σαν εφαπτομένη στο σημείο A. Το σημείο $B(0,2)$ είναι σημείο της ευθείας ε. Στο σημείο με τετμημένη $-\dfrac{1}{2}$ είναι παράλληλη στον οριζόντιο άξονα.



Σχήμα 1: Η συνάρτηση f.

   (α') i. Να βρεθεί ο συντελεστής διεύθυνσης της ευθείας ε.

   ii. Να βρεθεί η τιμή $f'(1)$

   (β') Δείξτε ότι $\forall x \in \mathbb{R}$, $f'(x) = (ax + a + b)e^{x-1}$.

(γ′) Δείξτε ότι οι παράμετροι a, b, c ικανοποιούν το σύστημα:

$$\begin{cases} a+b+c &= 5 \\ a+2b &= 0 \\ 2a+b &= 3 \end{cases}$$

Να βρεθούν οι τιμές των a, b, c.

Για τη συνέχεια υποθέστε ότι $\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = (2x-1)e^{x-1} + 4$.

(δ′) i. Να βρεθεί το $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$.

ii. Επαληθεύστε ότι $\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = \dfrac{2}{3}xe^x - \dfrac{1}{e}e^x + 4$. Υπολογίστε το όριο $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$.

iii. Να κάνετε το γράφημα της f.

(ε′) i. Να βρείτε $f'(x)$.

ii. Να κάνετε τον πίνακα προσήμων της $f(x)$.

iii. Δείξτε ότι η εξίσωση $f(x) = 6$ δέχεται μια μοναδική ρίζα στο διάστημα $[1, 2]$.

(ϛ′) i. Έστω η συνάρτηση $F(x) = (2x-3)e^{x-1} + 4x$. Δείξτε ότι η F είναι αρχική της f.

ii. Έστω Δ το μέρος του επιπέδου ανάμεσα από την $\mathscr{G}$ τον άξονα $x'x$ και τις ευθείες $x = 0$ και $x = 1$. Να βρεθεί το Δ.

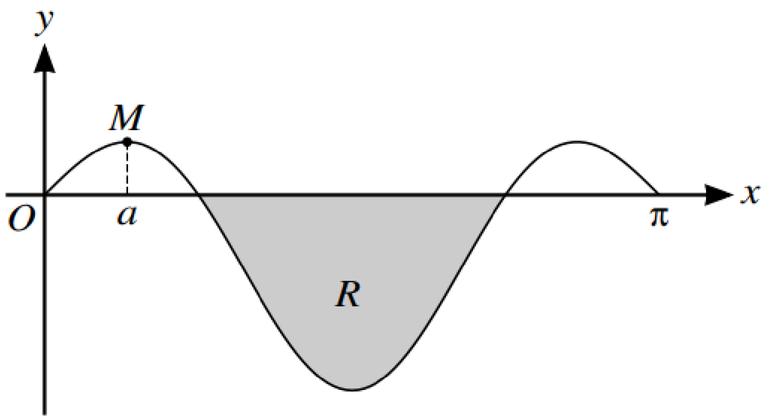
53. Το πεδίο ορισμού της συνάρτησης $f(x)$ είναι οι πραγματικοί αριθμοί και ικανοποιεί τη συνθήκη $f(x+1) = 2f(x)$. Για $x \in (0, 1]$, $f(x) = x(x-1)$. Για τιμές $x \in (-\infty, m]$, $f(x) \geq -\dfrac{8}{9}$. Η τιμή της παραμέτρου m είναι:

Α. 9/4 **Β.** 7/3 **Γ.** 5/2 **Δ.** 8/3

0.3 Θέματα 2023/24 - από άλλες χώρες

54. Έστω η συνάρτηση $f(x) = \begin{cases} -x^2 - 2ax - a, & x < 0 \\ e^x + \ln(x+1), & x \geq 0 \end{cases}$. Η συνάρτηση αυτή είναι αύξουσα στους πραγματικούς αριθμούς. Να βρεθεί η τιμή της παραμέτρου a:
Α. $(-\infty, 0]$ **Β.** $[-1, 0]$ **Γ.** $-1, 1]$ **Δ.** $[0, +\infty)$

55. Το διάγραμμα δείχνει τη καμπύλη $y = \text{ημ}\, x \cdot \text{συν}\,(2x)$ για $0 \leq x \leq \pi$, και ένα τοπικό μέγιστο M, όταν $x = a$. Η σκιασμένη επιφάνεια R είναι μεταξύ του οριζόντιου άξονα και της καμπύλης της συνάρτησης.



(α΄) Να βρείτε την τιμή της παραμέτρου a με 2 δεκαδικά ψηφία.

(β΄) Να βρείτε το εμβαδόν της επιφάνειας R.

56. Δύο συναρτήσεις είναι ορισμένες ως εξής:

$$\begin{array}{rcll} f(x) & = & (x+a)^2 - a & \text{για} \quad x \leq -a \\ g(x) & = & 2x - 1 \text{ για} & x\mathbb{R} \end{array}$$

όπου $a \in \mathbb{R}_{>0}$.

(α΄) Δώστε[5] τον τύπο της $f^{-1}(x)$.

(β΄) i. Ποιο είναι το πεδίο ορισμού της f^{-1}.
ii. Ποιο είναι το πεδίο τιμών της f^{-1}.

(γ΄) Για $a = \dfrac{7}{2}$, να λυθεί η εξίσωση $(g \circ f)(x) = 0$.

57. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = 1 + \dfrac{3}{x-2}$ για $x > 2$.

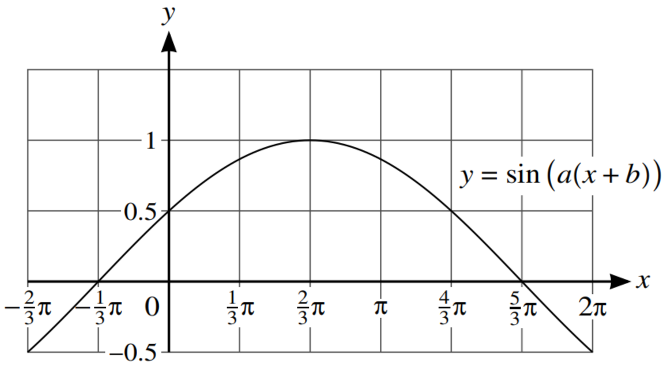
(α΄) Βρείτε το πεδίο τιμών της f.

(β΄) Βρείτε τον τύπο της f^{-1} και το πεδίο ορισμού της.

(γ΄) Η γραμμική συνάρτηση g ορίζεται από τον τύπο $g(x) = 2x - 2$ για $x > 0$. Βρείτε τον τύπο της $(g \circ f)(x)$.

58. Το παρακάτω διάγραμμα δείχνει μέρος του γραφήματος της συνάρτησης $y = \text{ημ}\,\big(a(x+b)\big)$, όπου a και b είναι θετικές σταθερές.

[5] Προσοχή στις τιμές τις παραμέτρου a και στην επιλογή του μέρους της συνάρτησης που θα μπορέσει να αντιστραφεί. Για την εύρεση του τύπου μπορείτε να αλλάξετε τις μεταβλητές στον τύπο της f δηλαδή: $y := x$ και $x := y$.



(α′) Καθορίστε την τιμή της παραμέτρου a και μιας πιθανής τιμής της παραμέτρου b.

(β′) Μία άλλη συνάρτηση με εξίσωση $y = f(x)$ έχει ένα μοναδικό κρίσιμο σημείο (p, q), όπου p και q είναι σταθερές. Το γράφημα της συνάρτησης μετασχηματίζεται στην καμπύλη της εξίσωσης

$$y = -3f\left(\frac{1}{4}(x+8)\right)$$

Για την νέα αυτή μετασχηματισθείσα καμπύλη να βρεθεί το κρίσιμο σημείο σαν συναρτήσεις των p και q.

59. **Μέρος Α: Μελέτη συνάρτησης f**

Η συνάρτηση f είναι ορισμένη στο $(0, +\infty)$ με τύπο $f(x) = x - 2 + \frac{1}{2}\ln x$. Δεχόμαστε ότι η συνάρτηση f είναι δύο φορές παραγωγίσιμη.

(α′) i. Υπολογίστε το όριο $\lim_{x\to+\infty} f(x)$.

ii. Υπολογίστε τη πρώτη παράγωγο: f'.

iii. Μελετήστε τη μεταβολή της f' στο $(0, +\infty)$.

iv. Μελετήστε τη κυρτότητα της f στο $(0, +\infty)$.

(β′) i. Δείξτε ότι η εξίσωση $f(x) = 0$ δέχεται μια μοναδική ρίζα, ας την συμβολίσουμε με ξ, στο διάστημα $[1, 2]$.

ii. Να βρείτε το πρόσημο της f στο διάστημα $(0, +\infty)$.

iii. Δείξτε ότι $\ln(\xi) = 2(2 - \xi)$.

60. **Μέρος Β: Μελέτη συνάρτησης g**

Η συνάρτηση g είναι ορισμένη στο $(0, 1]$ με τύπο $g(x) = -\frac{7}{8}x^2 + x - \frac{1}{4}x^2\ln(x)$. Δεχόμαστε ότι η g είναι παραγωγίσιμη στο $(0, 1]$.

(α′) Υπολογίστε την $g'(x)$ για $x \in (0, 1]$ και δείξτε ότι ισχύει η ισότητα $g'(x) = xf\left(\frac{1}{x}\right)$.

(β′) i. Δείξτε ότι $\forall x \in \left(0, \frac{1}{\xi}\right)$, έχουμε $f\left(\frac{1}{x}\right) > 0$.

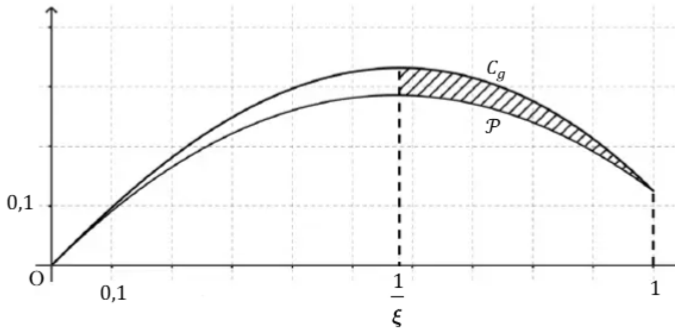
ii. Ας υποθέσουμε ότι ο πίνακας μεταβολών της $f\left(\frac{1}{x}\right)$ είναι:

x	0	$\frac{1}{\xi}$	1
πρόσημο $f\left(\frac{1}{x}\right)$	$+$	0	$-$

Χρησιμοποιώντας τον προηγούμενο πίνακα να κάνετε τον πίνακα μεταβολών της g στο διάστημα $(0, 1]$. Εικόνες και όρια δεν ζητούνται.

61. **Μέρος Γ: Υπολογισμός εμβαδού**
Στο παρακάτω σχήμα βλέπουμε:

- Τη καμπύλη $\mathscr{C}_g$ που είναι το γράφημα της g.
- Την παραβολή $\mathscr{P}$ που είναι το γράφημα της $y = -\dfrac{7}{8}x^2 + x$ στο διάστημα $(0, 1]$.



Θέλουμε να υπολογίσουμε το εμβαδόν $\mathscr{A}$ του γραμμοσκιασμένου τμήματος μεταξύ των $\mathscr{C}_g$ και $\mathscr{P}$ και των ευθειών $x = \dfrac{1}{\xi}$ και $x = 1$. Υπενθυμίζουμε ότι $\ln(\xi) = 2(2 - \xi)$.

(α΄) i. Επαληθεύστε τη θέση των καμπυλών $\mathscr{C}_g$ και $\mathscr{P}$ στο διάστημα $(0, 1]$.

ii. Δείξτε την ισότητα:

$$\int_{\frac{1}{\xi}}^{1} x^2 \ln x dx = \frac{-\xi^3 - 6\xi + 13}{9\xi^3}$$

(β΄) Δώστε το εμβαδόν $\mathscr{A}$ συναρτήσει της ρίζας ξ.