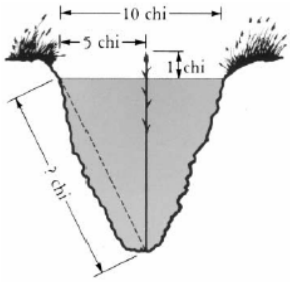
Το Θεώρημα του Πυθαγόρα vs Θεώρημα Gou-Gu

Λυγάτσικας Ζήνων

2 Σεπτεμβρίου 2024

1 Εισαγωγή

Το Jiu Zhang Suan Shu παρουσιάζει μια σειρά προβλημάτων (264 τον αριθμό) σε μορφή ερωτήσεων - απαντήσεων. Τα πρώτα 8 κεφάλαια αφορούν προβλήματα, τοπογραφίας, εμπορικά, φορολογικοί συντελεστές κλπ. Το τελευταίο κεφάλαιο είναι αφιερωμένο στο πιο διάσημο πρόβλημα: το θεώρημα Gou-Gu ή το γνωστό μας Θεώρημα του Πυθαγόρα.



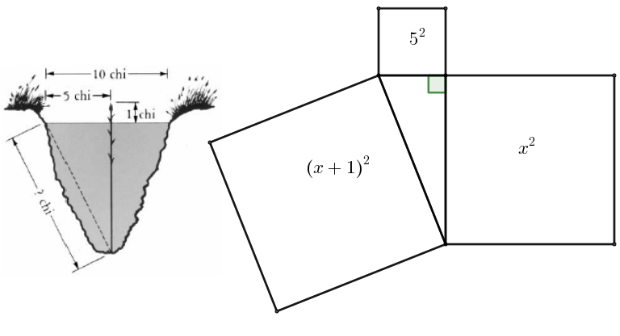
Ένα από τα προβλήματα του κεφαλαίου είναι μια παραλλαγή ενός από τα παλαιότερα μαθηματικά προβλήματα της Κίνας.

> Στη μέση μιας λίμνης με διάμετρο 10 chi[1], ένα καλάμι φυτρώνει ένα chi πάνω από την επιφάνεια του νερού. Όταν τραβήξουμε το καλάμι προς την άκρη της λίμνης το καλάμι φτάνει ακριβώς στην επιφάνεια του νερού. Πόσο μακρύ είναι το καλάμι;

Είναι ένα πρόβλημα του οποίου η λύση είναι εφαρμογή του θεωρήματος Gou-Gu.

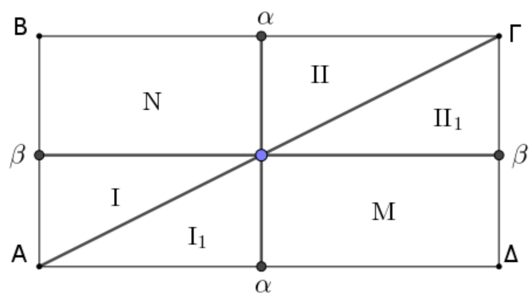
2 Το Θεώρημα Gou-Gu

Οι αρχικές εξηγήσεις του θεωρήματος έχουν χαθεί. Εδώ θα ανακατασκευάσουμε τη γενική συλλογιστική από διάφορα κείμενα.



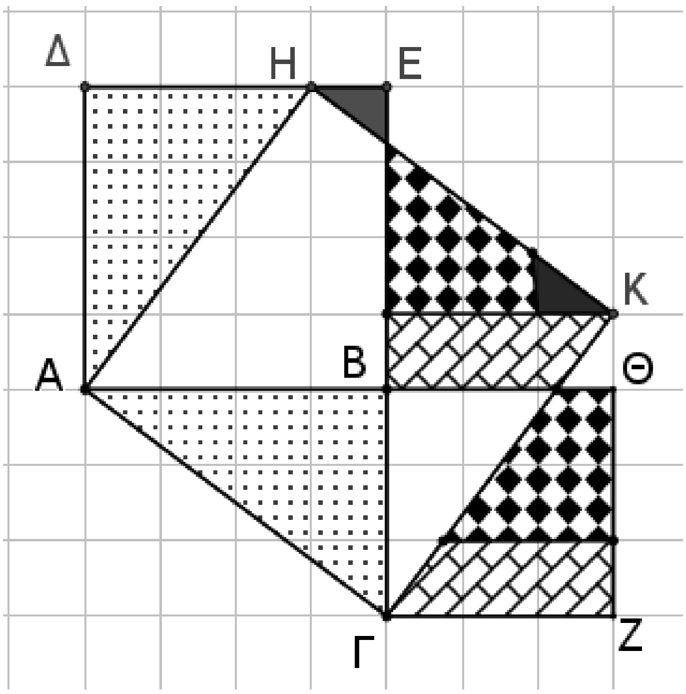
[1] 1 chi είναι 1 πόδι.

Η απόδειξη του θεωρήματος βασίζεται στη μετακίνηση κομματιών που θεωρήθηκε σαν μια μέθοδος αξίωμα από τους αρχαίους Κινέζους μαθηματικούς, φέρει δε το όνομα Out-In. Υπάρχει δε ένα σχετικό παράδειγμα που δείχνει τις ικανότητες αυτό του αξιώματος. Δίνεται ένα ορθογώνιο ΑΒΓΔ με δύο τμήματα αα και ββ που τέμνονται πάνω στη διαγώνιό του ΑΓ. Στο παρακάτω σχήμα θέλουμε να δείξουμε ότι N=M.



Γνωρίζουμε ότι κάθε διαγώνιος χωρίζει το ορθογώνιο σε δύο ισεμβαδικά τρίγωνα. Αφού οι ευθείες αα και ββ τέμνονται στη διαγώνιο, τα I και I_1, και II και II_1 είναι ανα δύο ισεμβαδικά. Άρα, αφαιρώντας τα δύο ίσα τμήματα I και I_1 κάτω από την οριζόντια γραμμή ββ και τα δύο ίσα τμήματα II και II_1 πάνω από την οριζόντια γραμμή ββ, τα εμβαδά των δύο μικρών ορθογωνίων είναι ίσα.

Αυτό βοηθάει να εξηγήσουμε το σχόλιο του Lui Hui για το θεώρημα Gou-Gu.



Εφαρμόζωντας την αρχή Out-In στο σχήμα το άθροισμα των των δύο πλευρών του τριγώνου ΑΒΓ είναι ίσο με το εμβαδών του τετραγώνου με πλευρά τη ΑΓ. Σύμφωνα με το αξίωμα, αν μετακινήσουμε τα κομμάτια των τετραγώνων ΑΔΕΒ και ΒΓΖΘ στο εσωτερικό του ΑΓΚΗ βλέπουμε ότι γεμίζουν ακριβώς το τετράγωνο ΑΓΚΗ. Εφ΄όσον αυτά τα εμβαδά είναι στο σύνολό τους ίσα με το εμβαδόν της υποτείνουσας ΑΓ, το άθροισμα των τετραγώνων των δύο καθέτων πλευρών είναι ίσο με το τετράγωνο της υποτείνουσας.

Τα πρώτα έργα που καταδεικνύουν την ιδέα της απόδειξης του θεωρήματος, χρονολογούνται από το 1000 πχ. Τα ιστορικά στοιχεία δείχνουν ότι το μεγαλύτερο μέρος του υλικού είναι μεταγενέστερο περίπου τον 2ο αιώνα π.χ.