Προβλήματα Διαφοροποιημένης Διδασκαλίας στο Γυμνάσιο

Λυγάτσικας Ζήνων
Σχολικός Σύμβουλος ΠΕ03 Α Αθήνας

24 Ιουλίου 2024

24 Ιουλίου 2024 Λυγάτσικας Ζ.

ΠΡΟΛΟΓΟΣ

Το πρόβλημα γράφτηκε για τους Μαθητές του Γυμνασίου και να διευκολύνει τους καθηγητές.

Λυγάτσικας Ζήνων
email: *zligatsikas@gmail.com*
Μαθηματικός
Αθήνα, 24 Ιουλίου 2024

Περιεχόμενα

Κεφάλαιο 1

Α Γυμνασίου

1. (Εξίσωση $1^{ου}$ βαθμού) Μια οικογένεια δύο ενηλίκων και τριών παιδιών πλήρωσε 70 ευρώ για να δεί τη παράσταση ενός τσίρκου.
   Ένα groupe από έντεκα ενηλίκους και εννέα παιδιά πλήρωσε 256.50 ευρώ για την ίδια παράσταση. Η τιμή του εισητηρίου για τα παιδιά είναι ανεξάρτητη του αριθμού των ατόμων και είναι 12 ευρώ ανα άτομο. Η τιμή του εισητηρίου για τους ενήλικες δεν είναι σταθερή, μειώνεται όταν ο αριθμός των ατόμων είναι πάνω από δέκα.

   Απαντήστε στις παρακάτω ερωτήσεις:

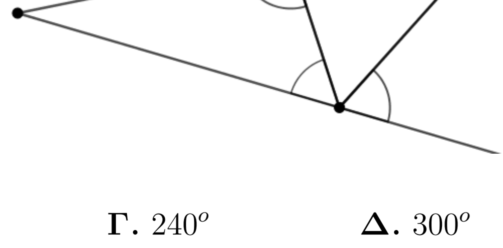
   (α΄) Οι ενήλικες που πληρώσαν ολόκληρη τη τιμή εισητηρίου, ανήκουν:
   1. στην οικογένεια με 2 ενήλικες και 3 παιδιά 2. στην ομάδα με 11 ενήλικες και 9 παιδιά
   Σημειώστε την απάντησή σας.

   (β΄) Υπολογίστε τη τιμή του εισητηρίου (χωρίς την έκπτωση) ενός ενήλικα.

   (γ΄) Οι ενήλικες που πληρώσαν μειωμένη τιμή εισητηρίου, ανήκουν
   1. στην οικογένεια με 2 ενήλικες και 3 παιδιά 2. στην ομάδα με 11 ενήλικες και 9 παιδιά
   Σημειώστε την απάντησή σας.

   (δ΄) Βρείτε το ποσό που πληρώσαν ανα άτομο, οι ενήλικες με το μειωμένο εισητήριο.

2. (Άθροισμα γωνιών τριγώνου) Στο παρακάτω σχήμα βλέπετε **ένα ισόπλευρο** τρίγωνο που έχει δύο κορυφές του πάνω στις πλευρές μιας γωνίας. Τότε, το άθροισμα των σημειωμένων γωνιών είναι:



Α. 120^o **Β.** 180^o **Γ.** 240^o **Δ.** 300^o **Ε.** 360^o

3. Οι διαδοχικοί φυσικοί αριθμοί είναι αριθμοί που διαφέρουν μεταξύ τους κατά μια μονάδα, αν διαταχθούν κατα αύξουσα σειρά. Για παράδειγμα, οι αριθμοί $35, 36, 34, 37$ είναι διαδοχικοί φυσικοί αριθμοί γιατί, αν τεθούν κατα αύξουσα σειρά $34 < 35 < 36 < 37$ τότε, $37 - 36 = 1$, $36 - 35 = 1$, $35 - 34 = 1$.

   Τρείς διαδοχικοί **άρτιοι** φυσικοί αριθμοί έχουν άθροισμα 2022. Να τους βρείτε.

4. Ας υποθέσουμε ότι δουλεύετε τον μήνα Αύγουστο σε μια εταιρεία και ο μισθός είναι ανάλογος των ωρών εργασίας. Τη Δευτέρα δουλέψατε 8 ώρες και πήρατε 60 ευρώ. Συμπληρώστε τον παρακάτω πίνακα:

   - Ποιός είναι ο μισθός σας για 5 ώρες εργασίας;
   - Πόσες ώρες πρέπει να εργασθείτε για να κερδίσετε 900 ευρώ;

Αριθμός Ωρών	8	5	
Μισθός	60		900

5. Ποιος από τους παρακακάτω αριθμούς δεν είναι ίσος ή ισοδύναμος με το $\frac{21}{8}$:

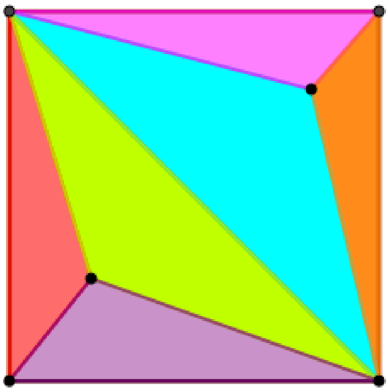
   Α. $2\frac{5}{8}$ **Β.** $\frac{168}{64}$ **Γ.** 2.625 **Δ.** $2\frac{20}{32}$ **Ε.** $\frac{189}{81}$

6. Αν $\frac{3}{2} = 1.5$, τότε $\frac{0.03}{0.2} = ?$

   Α. 1.5 **Β.** 0.15 **Γ.** 0.015 **Δ.** 0.0015 **Ε.** 0.00015

7. Είναι δυνατόν να χωρίσουμε ένα τετράγωνο σε αμβλυγώνια τρίγωνα;

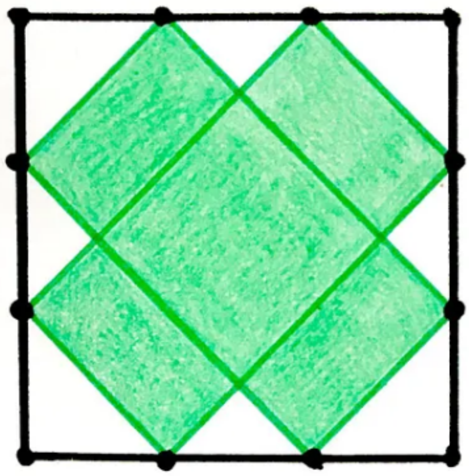
   Υπόδειξη: Η απάντηση είναι ναι. Το σχήμα το αποδεικνύει: Αυτό που ενδεχομένως έχει σημασία



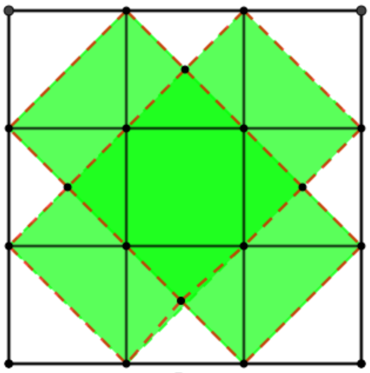
Σχήμα 1.1: Χωρισμός σε αμβλυγώνια τρίγωνα

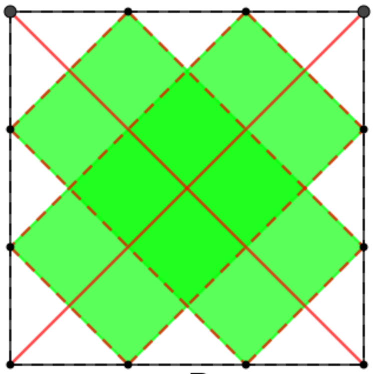
είναι να δούμε το πως σκέφτηκε κάποιος να το κάνει αυτό. Μια ιδέα είναι εργαστούμε με το μισό τετράγωνο και λόγω συμμετρίας να το επεκτείνουμε και στο υπόλοιπο. Σημειώστε ότι το ChatGPT δίνει ότι αυτό δεν είναι εφικτό. ∎

8. Ποιο μέρος του τετραγώνου είναι σκιασμένο;



Υπόδειξη:





Υπάρχουν τουλάχιστον 2 στρατηγικές για να υπολογίσουμε το ποσοστό των 2 πράσσινων ορθογωνίων.

Διαμέριση στο Σχήμα Α
Αν χωρίσουμε το τετράγωνο σε 9 μικρότερα ορθογώνια, τότε έχουμε:

- ένα τετράγωνο στο κέντρο που είναι το $\frac{1}{9}$ του τετραγώνου.
- τέσσερα τμήματα (στις κορυφές) που είναι το καθένα το $\frac{1}{2}$ του $\frac{1}{9}$ ή το $\frac{1}{18}$ του τετραγώνου.
- τέσσερα τμήματα που είναι το καθένα τα $\frac{3}{4}$ του $\frac{1}{9}$ ή το $\frac{3}{36} = \frac{1}{12}$ του τετραγώνου.

Άρα, τελικά έχουμε

$$\frac{1}{9} + 4 \cdot \frac{1}{18} + 4 \cdot \frac{1}{12} = \frac{1}{9} + \frac{2}{9} + \frac{1}{3} = \frac{2}{3}$$

Επομένως, η σκιασμένη περιοχή είναι τα $\frac{2}{3}$ του τετραγώνου.

Διαμέριση στο Σχήμα Β

Χωρίζουμε το τετράγωνο φέροντας τις 2 διαγώνιες. Τότε κάθε μέρος είναι το $\dfrac{1}{4}$ του τετραγώνου.

Κάθε μέρος περιέχει μια πράσινη περιοχή που είναι τα $\dfrac{6}{9}$ του ή το $\dfrac{1}{4} \cdot \dfrac{6}{9} = \dfrac{1}{6}$ του τετραγώνου. Τελικά, η πράσινη σκιασμένη περιοχή είναι

$$4 \cdot \frac{1}{6} = \frac{2}{3}$$

Επομένως, η σκιασμένη περιοχή είναι τα $\dfrac{2}{3}$ του τετραγώνου.

$\blacksquare$

Κεφάλαιο 2

Β Γυμνασίου

1. Αν το x αυξηθεί κατα 25%, τότε το x^2 αυξάνεται κατά:
   Α. $6\frac{1}{4}$ **Β.** 25% **Γ.** 50% **Δ.** $56\frac{1}{4}\%$ **Ε.** $156\frac{1}{4}\%$

2. (Γραφικές παραστάσεις Στατιστική) Ρωτήσαμε 105 άτομα για την αγαπημένη τους δραστηριότητα τον ελεύθερο χρόνο. Οι απαντήσεις φαίνονται στον παρακάτω πίνακα:

Δραστηριότητα	Σπόρ	Σινεμά	Τηλεόραση	Μαστορέματα
Αριθμός ατόμων	35	15	25	30

   Ο στόχος μας είναι να κατασκευάσουμε ένα ραβδόγραμμα του δείγματος. Απαντήστε στις παρακάτω ερωτήσεις:

   (α΄) Ποιό είναι το χαρακτηριστικό της δειγματοληψίας;

   (β΄) Το ύψος των ορθογωνίων στο ραβδόγραμμα είναι ανάλογο:
   1. της συχνότητας 2. στις τιμές του χαρακτηριστικού

   (γ΄) Περιγράψτε την κατακευή του αντίστοιχου ραβδογράμματος.

3. (Ορισμός Συνάρτησης) Ποιές απεικονήσεις του συνόλου $A = \{1, 2, 3\}$ μέσα στο σύνολο $B = \{1, 4, 9\}$ είναι συναρτήσεις:

   1. $1 \to 1,\ 2 \to 4,\ 3 \to 9$
   2. $1 \to 9,\ 2 \to 1,\ 3 \to 1$
   3. $1 \to 4,\ 1 \to 9,\ 2 \to 4$
   4. $1 \to 1,\ 2 \to 1,\ 3 \to 1$
   5. $1 \to 1,\ 1 \to 4,\ 1 \to 9$

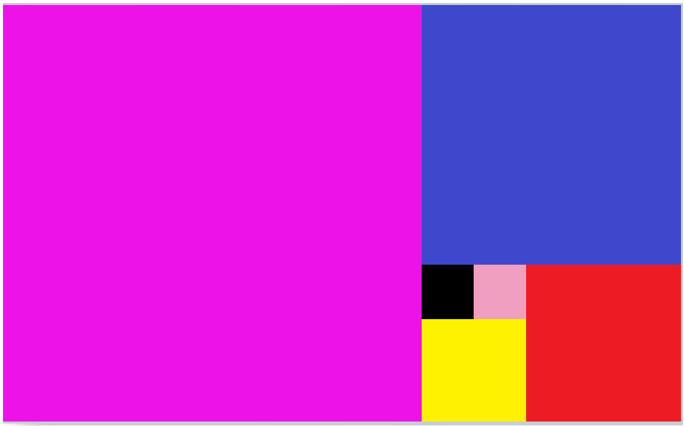
4. (Ορισμός Συνάρτησης) Δικαιολογείστε την αρνητική ή θετική απάντησή σας στο ερώτημα:

   Είναι τα σημεία του καρτεσιανού επιπεδου $\left(\frac{m}{n}, \frac{m}{n} + 1\right)$, με $m, n \in \mathbb{N}$, σημεία ενός γραφήματος μιας συνάρτησης f;

5. (Ορισμός Συνάρτησης) Ποιές απεικονήσεις του συνόλου $A = \{1, 2, 3\}$ μέσα στο σύνολο $B = \{1, 4, 9\}$ είναι συναρτήσεις:

   1. $1 \to 1,\ 2 \to 4,\ 3 \to 9$
   2. $1 \to 9,\ 2 \to 1,\ 3 \to 1$
   3. $1 \to 4,\ 1 \to 9,\ 2 \to 4$
   4. $1 \to 1,\ 2 \to 1,\ 3 \to 1$
   5. $1 \to 1,\ 1 \to 4,\ 1 \to 9$

6. (Ανάλογα Ποσά) Στο παρακάτω σχήμα βλέπετε έναν συνδυασμό αποκλειστικά από τετράγωνα: Θέλουμε να απαντήσετε στο εξής ερώτημα: το εμβαδόν ή η περίμετρος κάθε τετραγώνου είναι



Σχήμα 2.1: Συνδυασμός τετραγώνων

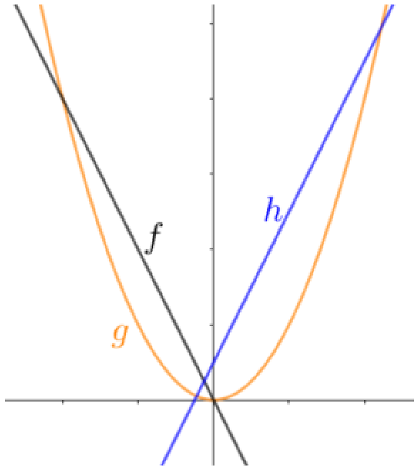
   ανάλογα του μήκους της πλευράς του τετραγώνου;

7. (Ανάλογα Ποσά) Ο τύπος που συνδέει τα ποσά x και y και αντιστοιχεί στον παρακάτω πίνακα:

x	0.5	0.7
y	2	2.8

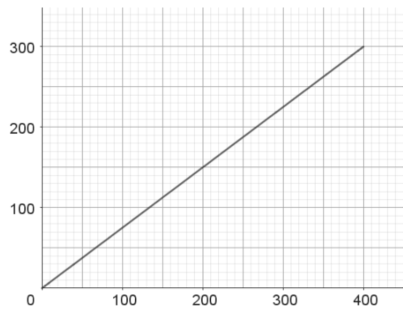
   είναι:
   Α. $y = 0.25 \cdot x$ **Β.** $y = 4 \cdot x$ **Γ.** $y = \frac{1}{4} \cdot x$ **Δ.** $y = 5 \cdot x$ **Ε.** $\frac{x}{y} = 4$

8. (Ανάλογα Ποσά) Μεταξύ των γραφικών αναπαραστάσεων που βλέπετε στο διπλανό σχήμα, ποιό είναι αυτο που αντιστοιχεί σε ποσά ανάλογα;



Α. f **Β.** g **Γ.** h **Δ.** Της f και h **Ε.** Όλα

9. (Ανάλογα Ποσά) Για να διατηρήσουμε το νερό σε ένα ενυδρείο στην επιθυμητή θερμοκρασία, χρησιμοποιούμε ηλεκτρικό θερμοσίφωνα του οποίου Η ηλεκτρική ισχύς P εξαρτάται από την επιφάνεια S των γυάλινων τοίχων του ενυδρείου. Το παρακάτω γράφημα αναπαριστά την ηλεκτρική ισχύ P σε watts σε συνάτησει της επιφάνειας S, σε dm^2. Η επιφάνεια μπορεί να μεταβάλεται από 0 έως 400 dm^2.



(α΄) Εξηγείστε γιατί το γράφημα παριστά ανάλογα ποσά.

(β΄) Εξηγείστε γιατί ο παρακάτω πίνακας είναι ένας πίνακας αναλόγων ποσοτήτων:

Επιφάνεια S σε dm^2	0	200	225	400
Ηλεκτρική Ισχύς P σε wats	0	150	168.75	300

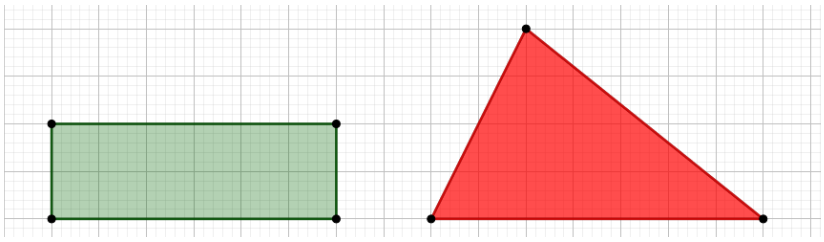
(γ΄) Να βρείτε την αλγεβρική έκφραση που συνδέει τα δύο ποσά P και S.

10. Για να εξοπλίσει τη νέα του επιχείρηση, κάποιος επένδυσε στην αγορά αρκετών εργαλειομηχανών έναντι ποσού 1.080.000 ευρώ. Μπορεί έτσι να παράγει εξαρτήματα μηχανουργικής κατεργασίας τα οποία μεταπωλεί στην τιμή των 360 ευρώ ανά μονάδα. Κατά μέσο όρο, πουλάει 500 κομμάτια το χρόνο.

Μετά από πόσα χρόνια το ποσό των πωλήσεων θα είναι ίσο με την τιμή των εργαλειομηχανών;

11. (Καρτεσιανές Συντεταγμένες) Ποιά από τα παρακάτω σημεία έχουν την ιδιότητα να απέχουν από τον οριζόντιο άξονα 4μ, από τον κατακόρυφο άξονα 2μ και να ανήκουν στο 3^o τεταρτημόριο:
Α. $(-4,-2)$ **Β.** $(-2,-4)$ **Γ.** $(-2,4)$ **Δ.** $(-2,4)$ **Ε.** Τίποτα από τα προηγούμενα

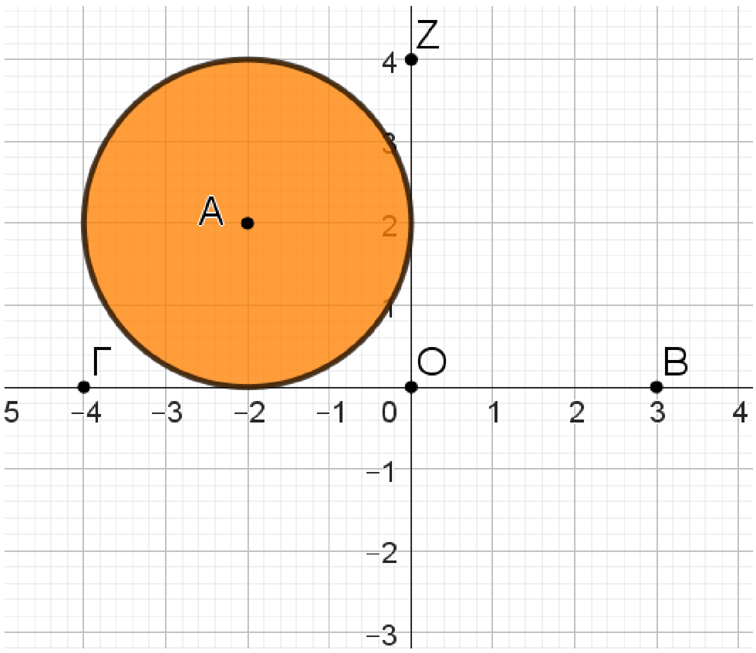
12. (Εμβαδόν επιπέδων σχημάτων) Στο παρακάτω σχήμα σας δίνουμε ένα ορθογώνιο και ένα τρίγωνο. Το ορθογώνιο έχει περίμετρο 4 km στη πραγματικότητα.



Ποιό είναι το εμβαδόν του τριγώνου στη πραγματικότητα;

13. (Σύστημα συντεταγμένων) Το logo μιας εταιρείας αποτελείται από τρείς γεωμετρικές φιγούρες: ένα τραπέζιο, ενα κύκλο και ένα τρίτο σχήμα του οποίου το είδος τετραπλεύρου πρέπει εσείς να το χαρακτηρίσετε.

Μεταφέροντας το logo σε ένα ορθοκανονικό σύστημα αξόνων βλέπουμε ότι το κέντρο του κύκλου A είναι το σημείο $(-2,2)$, όπως φαίνεται στο σχήμα.

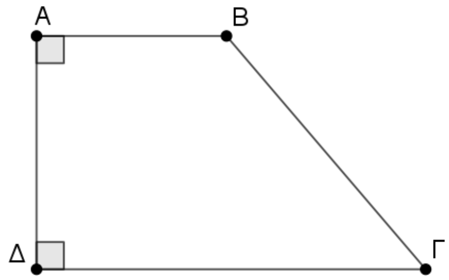


(α΄) Τα σημεία Z, O, B και Γ είναι σημεία του logo. Αντιστοιχείστε τα σημεία αυτά με τα παρακάτω σημεία του συστήματος:
1. $(3,0)$ **2.** $(0,0)$ **3.** $(-4,0)$ **4.** $(0,4)$

(β΄) Τα σημεία $H=(3,4)$, $\Delta=(3,-2)$, $E=(0,-2)$ είναι επίσης σημεία του logo. Τοποθετήστε τα πάνω στο σύστημα συντεταγμένων. Γνωρίζοντας ότι το τραπέζιο έχει δύο απέναντι πλευρές παράλληλες **να δείξτε** ότι το τετράπλευρο $\Gamma B\Delta E$ είναι το τραπέζιο του logo.

(γ΄) Χαράξτε το τετράπλευρο $OBHZ$ και χαρακτηρίστε το τρίτο σχήμα του logo.

14. (Πυθαγόρειο θεώρημα, περίμετρος επιπέδων σχημάτων) Έχουμε ένα τεμάχιο γης ΑΒΓΔ σε σχήμα ορθογωνίου τραπεζίου όπως στο σχήμα. Δίνονται κάποια μήκη πλευρών: $\mathrm{AB} = 15$ m, $\mathrm{A}\Delta = 20$ m και $\Delta\Gamma = 25$ m.

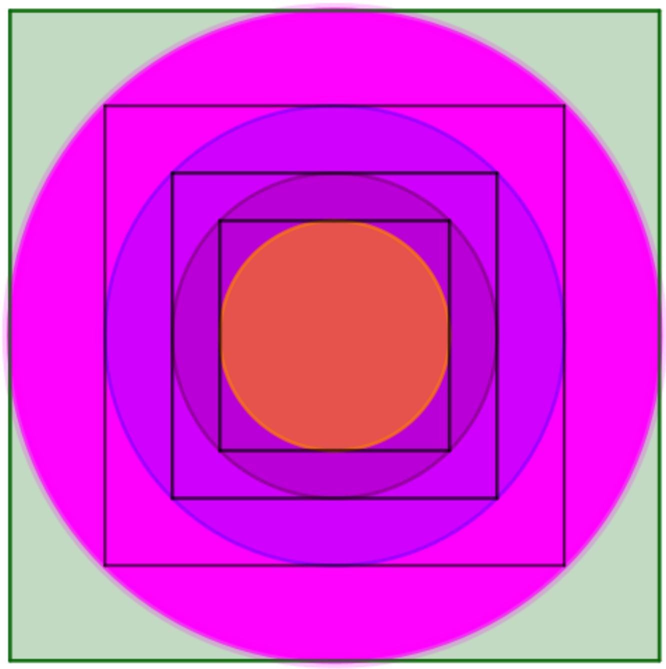


(α΄) Να υπολογίσετε την πλευρά ΒΓ με προσέγγιση εκατοστού.

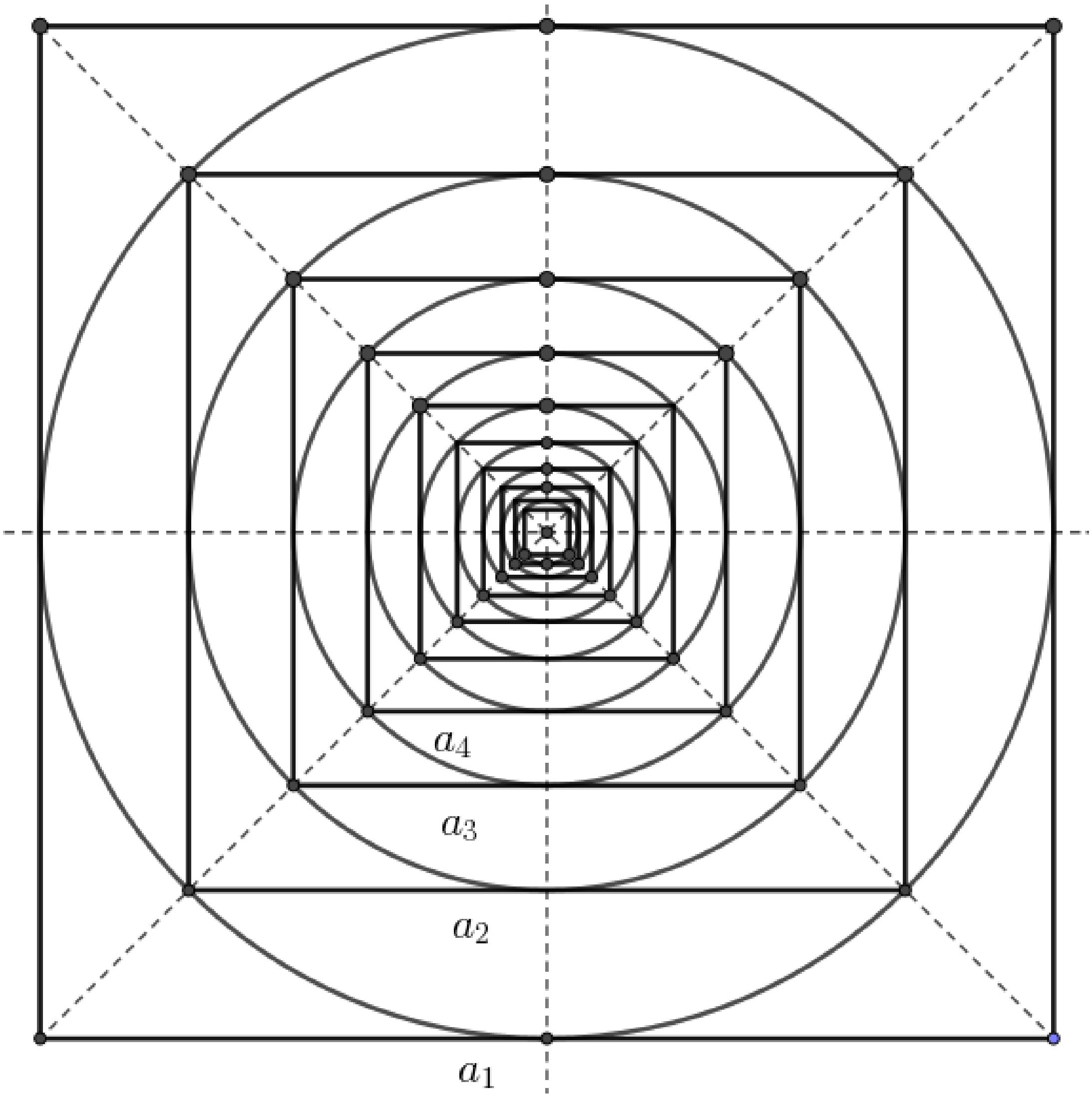
(β΄) Αν έχουμε $83,5\ m$ σύρμα περίφραξης, φτάνει να περιφράξουμε το οικόπεδο;

15. (Πυθαγόρειο θεώρημα) Οι τεχνικοί μιας εταιρείας θέλουν να συνδέσουν ένα καλώδιο από τον πυλώνα ύψους $9\ m$ έως μια κατοικία που έχει ύψος $2\ m$. Η απόσταση του πυλώνα από την οικία είναι $50\ m$. Για λόγους διαστολής/συστολής του καλωδίου, πρέπει να προβλεφθεί ένα 2% του μήκους του καλωδίου επιπλέον της απόστασης των δύο σημείων πρόσθεσης. Ποιο είναι το τελικό μήκος του καλωδίου;

16. Να ξανακατασκευάσετε το παρακάτω σχήμα έως το 10^o τετράγωνο. Αν η πλευρά του μεγάλου τετραγώνου είναι $24cm$,να βρεθεί το εμβαδόν του $10^{ου}$ τετραγώνου.



Υπόδειξη:



$$\begin{cases} a_1 &= 24 \\ a_2 &= \dfrac{24}{\sqrt{2}} = \dfrac{a_1}{\sqrt{2}} \\ a_3 &= \dfrac{a_2}{\sqrt{2}} = \dfrac{a_1}{\left(\sqrt{2}\right)^2} \\ \dots & \\ a_{10} &= \dfrac{a_9}{\sqrt{2}} = \dfrac{a_1}{\left(\sqrt{2}\right)^9} = \dfrac{3}{4}\sqrt{2} \end{cases}$$

Επομένως, το εμβαδόν του 10^{ov} τετραγώνου είναι:

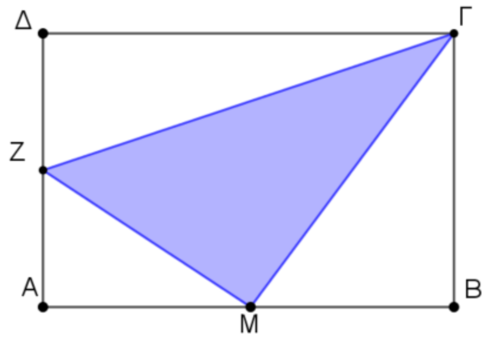
$$\left(\frac{3}{4}\sqrt{2}\right)^2 = \frac{9}{8}$$

■

Κεφάλαιο 3

Γ Γυμνασίου

1. (Επίλυση ανίσωσης αλγεβρική - γεωμετρική) Έστω $AB\Gamma\Delta$ είναι ένα ορθογώνιο τέτοιο ώστε $AB = 6\ cm$ και $A\Delta = 4\ cm$. Το σημείο Z είναι το μέσο του $A\Delta$. Θέλουμε να βρούμε τη θέση ενός σημείου M στη πλευρά AB έτσι ώστε το εμβαδόν του τριγώνου $ZM\Gamma$ να είναι μικρότερο ή ίσο με το $1/3$ του εμβαδού του ορθογωνίου $AB\Gamma\Delta$.



(α΄) i. Αν $AM = x$, μοντελοποιήστε το πρόβλημα με μια ανίσωση.

ii. Συμπληρώστε τον παρακάτω πίνακα:

x	0	1	2	3	4	5	6
$6+x$							

iii. Χαράξτε την ευθεία που διέρχεται από τα σημεία με συντεταγμένες $(x, 6+x)$. Επιλύστε το πρόβλημα γραφικά και μετά αλγεβρικά.

(β΄) Χωρίστε ένα φύλλο $A4$ σε τέσσερα τμήματα. Στο πρώτο τμήμα γράψτε το πρόβλημα, στο δεύτερο κάνετε την γραφική αναπαράσταση του προβλήματος, στη τρίτη γράψτε την ανίσωση και στη τέταρτη να λύσετε αλγεβρικά την ανίσωση.

(γ΄) Φωτοκοπίστε το $A4$ και κόψτε το σε 4 κομμάτια. Ανακατέψτε τα κομμάτια και ζητήστε από τους μαθητές να τοποθετήσουν με την εξής σειρά: η εκφώνηση της άσκησης, η γραφική του αναπαράσταση και λύση, η αντίστοιχη ανίσωση και η αλγεβρική επίλυση της ανίσωσης.

2. (Επίλυση ανίσωσης αντίστροφη διαδικασία) Συμπληρώστε το σύστημα 2 ανισοτήτων του οποίου η λύση αναπαρίσταται στον άξονα ως εξής:

$$\begin{cases} 2x \geq \ldots \\ -3x > \ldots \end{cases}$$

3. Έστω η παραβολή $y = 4x^2 - 8x + 7$ και $k \in \mathbb{R}$, ένας τυχαίος πραγματικός αριθμός.

   (α′) Να βρείτε τον αριθμό των σημείων τομής της ευθείας $x = k$ με την παραβολή. Να γράψετε τις συντεταγμένες αυτών των σημείων.

   (β′) Να βρείτε τον αριθμό των σημείων τομής της ευθείας $y = k$ με την παραβολή. Να γράψετε τις συντεταγμένες αυτών των σημείων. Να διακρίνετε τις διάφορες περιπτώσεις ανάλογα με τη τιμή του k.

4. (Πυθαγόρειο θεώρημα, εμβαδά επιπέδων σχημάτων) Υλοποιήστε την κατασκευή με ένα λογισμικό.

   - Κατασκεύστε ένα τετράγωνο $AB\Gamma\Delta$, πλευράς $AB = 3m$.
   - Χαράξτε ένα κύκλο με κέντρο το A και ακτίνα $A\Gamma$.
   - Έστω E η τομή της ημιευθείας AB με τον κύκλο.
   - Κατασκευάστε ένα τετράγωνο $EZH\Delta$.

   (α′) Στη συνέχεια το αρχικό τετράγωνο $AB\Gamma\Delta$ έχει πλευρά μήκους $10m$.

   i. Δείξτε ότι $A\Gamma = \sqrt{200}\ m$.

   ii. Εξηγείστε γιατί $AE = \sqrt{200}\ m$.

   iii. Δείξτε ότι το εμβαδόν του $EZH\Delta$ είναι τριπλάσιο του εμβαδού του $AB\Gamma\Delta$.

   (β′) Δεχόμαστε ότι για οποιοδήποτε μήκος της πλευράς AB το εμβαδόν του τετραγώνου $EZH\Delta$ είναι πάντα τριπλάσιο του εμβαδού του τετραγώνου $AB\Gamma\Delta$.
   Θέλουμε να κατασκευάσετε το τετράγωνο $EZH\Delta$ έτσι ώστε να έχει μήκος $48m^2$. Ποιό μπορεί να είναι το μήκος της πλευρά AB του αρχικού τετραγώνου;

5. (Η συνάρτηση $y = ax + b$, γραμμικά συστήματα) Παρακάτω σας δίνουμε δύο αλγορόριθμους:

Αλγόριθμος Α1	**Αλγόριθμος Α2**
1. Επιλέξτε έναν αριθμό	1. Επιλέξτε έναν αριθμό
2. Πολλαπλασιάστε τον αριθμό επί -3	2. Πολλαπλασιάστε τον αριθμό επί 5
3. Προσθέστε το 1 στο αποτέλεσμα	3. Προσθέστε το 10 στο αποτέλεσμα

   (α′) Αν επιλέξουμε τον αριθμό 3.3 σαν αριθμό εισόδου στον αλγόριθμο Α1, δείξτε ότι το αποτέλεσμα στην έξοδο θα είναι -8.9.

   (β′) Αν επιλέξουμε τον αριθμό -5 ποιόν αριθμό θα δώσει στην έξοδο ο αλγόριθμος Α2;

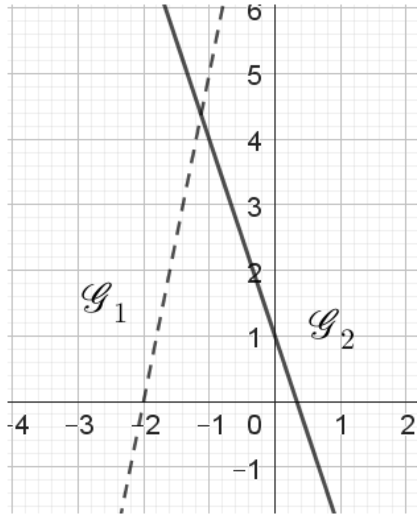
   (γ′) Αν συμβολίσουμε με x τον αρχικό αριθμό, τότε ο αλγόριθμος Α1 δίνει αποτέλεσμα $-3x + 1$.

   Αν ο ίδιος αριθμός επιλεγεί και για τον αλγόριθμο Α2, ποιόν αριθμό θα δώσει στην έξοδο;

(δ΄) i. Το διπλανό Σχήμα δίνει τα γραφήματα δύο συναρτήσεων $f(x) = -3x+1$ και $g(x) = 5x + 10$. Αντιστοιχείστε κάθε γράφημα στην αντίστοιχη συνάρτηση f ή g.

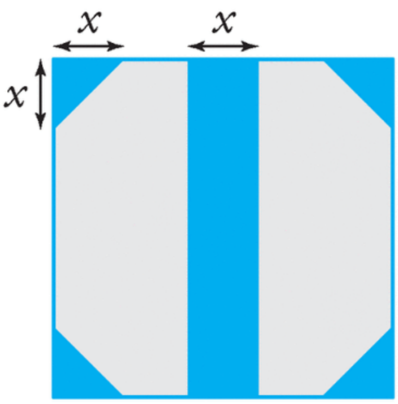
ii. Δώστε μια εκτίμηση, όσο το δυνατόν ακριβέστερη, του σημείου του οποίου η εικόνα μέσα από την f και g είναι η ίδια για τις δύο συναρτήσεις.

(ε΄) Να βρείτε τον αριθμό για τον οποίο οι δύο αλγόριθμοι δίνουν το ίδιο αποτέλεσμα.



6. Θεωρήστε ένα τετράγωνο πλευράς 6 cm. Χρωματίζουμε τις τέσσερες κορυφές και το ορθογώνιο που φαίνεται στο σχήμα.

Ας σημειώσουμε με $M(x)$ το εμβαδόν των χωρίων με το μπλέ χρώμα.



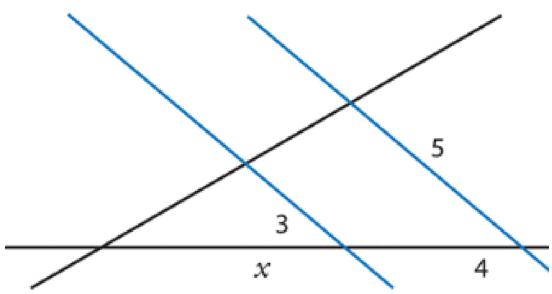
(α΄) Ποιες τιμές μπορεί να πάρει η μεταβλητή x;

(β΄) Γράψτε το $M(x)$ σαν συνάρτηση του x.

(γ΄) Ποιά είναι η τιμή του $M(x)$ όταν $x = 1$;

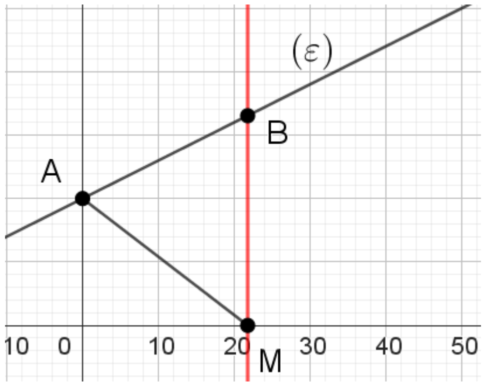
(δ΄) Για ποιές τιμές του x έχουμε $M(x) = 13.5cm^2$;

7. (Θεώρημα Θαλή, μοντελοποίηση, εξίσωση 1ου βαθμού) Θεωρείστε το παρακάτω σχήμα.



Ποια μπορεί να είναι η τιμή του x έτσι ώστε οι δύο μπλέ ευθείες να είναι παράλληλες;

8. (Εξίσωση 2ου βαθμού, επίλυση προβλήματος) Στο ορθοκανονικό σύστημα συντεταγμένων θεωρώ την ευθεία (ε) με εξίσωση $y = 0.6x+20$. Το M είναι ένα σημείο που κινείται πάνω στον οριζόντιο άξονα. Από το M φέρω κάθετο στον οριζόντιο άξονα που τέμνει την ευθεία στο σημείο B.



(α′) Σχεδιάστε το σχήμα και βρείτε γεωμετρικά τη θέση του M πάνω στον οριζόντιο άξονα έτσι ώστε $MA = MB$. Θα ήταν προτιμότερο να γίνει το σχέδιο σε ένα σύστημα δυναμικής γεωμετρίας έτσι ώστε να επαληθεύσετε τη λύση στο επόμενο ερώτημα.

(β′) Έστω x η τετμημένη του σημείου M.

i. Εκφράστε τις αποστάσεις MA και MB συναρτήσει της μεταβλητής x.

ii. Όπως προηγουμένως θέλουμε να βρούμε τη θέση του σημείου M έτσι ώστε $MA = MB$. Να σχηματίσετε και να επιλύσετε την εξίσωση.

Α′. Πόσες λύσεις δίνει η αλγεβρική επίλυση της εξίσωσεις;

Β′. Είναι συμβατό το αλγεβρικό αποτέλεσμα με το γεωμετρικό που βρήκατε στο ερώτημα 8α′;

(γ′) Διατυπώστε την απάντησή σας στο πρόβλημα.

9. (Η συνάρτηση $y = ax^2 + bx + c,\ a \neq 0$) Έστω f μια συνάρτηση ορισμένη στο $\mathbb{R}$ με

$$f(x) = -x^2 + 6x - 5$$

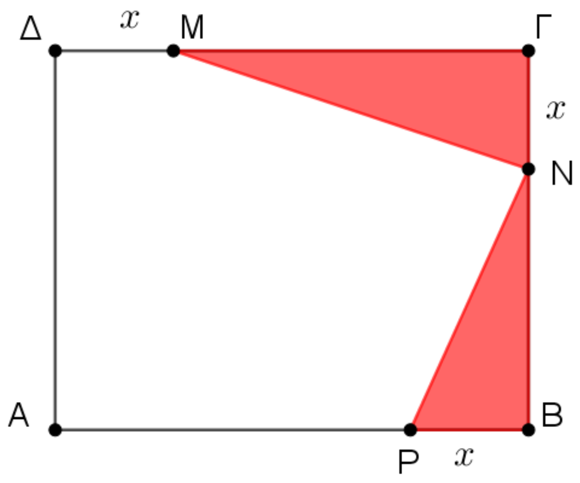
(α′) Δείξτε ότι $f(x) = -(x-3)^2 + 4$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

(β′) Δείξτε ότι $f(x) \leq 4$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

(γ′) Δείξτε ότι η f παίρνει μια μέγιστη τιμή στο σύνολο $\mathbb{R}$. Βρείτε τη τιμή της μεταβλητής x για την η f παίρνει τη μέγιστή της τιμή.

10. (Η συνάρτηση $y = ax^2 + bx + c,\ a \neq 0$, Επίλυση προβλήματος) Το ΑΒΓΔ είναι ένα ορθογώνιο με $\mathrm{AB} = 10\mathrm{cm}$ και $\mathrm{B\Gamma} = 8\mathrm{cm}$. Το N είναι ένα σημείο της πλευράς ΒΓ και M, P σημεία τέτοια ώστε

$$\mathrm{\Gamma N = \Delta M = BP = x}$$



Σκοπός της άσκησης είναι να καθορίσουμε τη θέση του N πάνω στην ΓB έτσι ώστε το άθροισμα των εμβαδών των τριγώνων MΓN και NBP να είναι το μέγιστο δυνατό.

(α′) Σε ποιό διάστημα στο $\mathbb{R}$ πρέπει να βρίσκεται η τιμή της μεταβλητής x;

(β′) Εκφράστε το μήκος του MΓ συναρτήσει του x.

(γ′) Εκφράστε το μήκος του BN συναρτήσει του x.

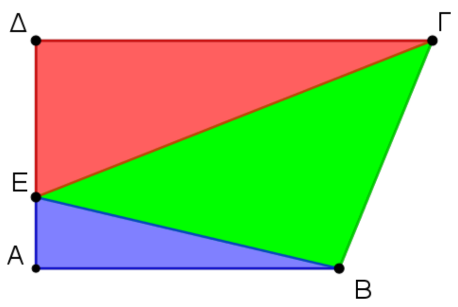
(δ′) Δείξτε ότι το εμβαδόν του τριγώνου MΓN είναι $\dfrac{10x - x^2}{2}$.

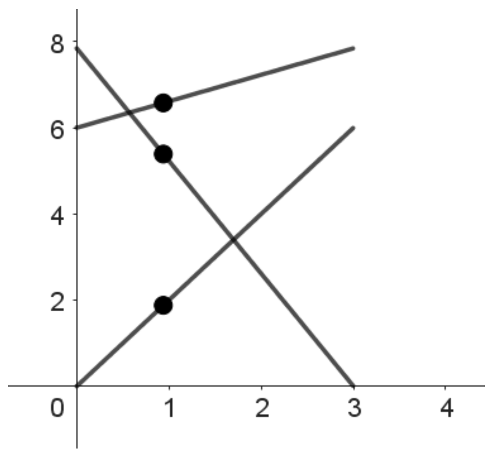
(ε′) Έστω f να είναι η συνάρτηση που αντιστοιχεί το μήκος x στο άθροισμα των εμβαδών των δύο κόκκινων τριγώνων. Επαληθεύστε ότι $f(x) = 9x - x^2$.

(ϛ′) i. Δείξτε ότι $f(x) = -(x - 4.5)^2 + 20.25$.

ii. Δώστε την απάντησή σας στο ερώτημα του προβλήματος.

11. (Η συνάρτηση $y = ax^2 + bx + c,\ a \neq 0$, Επίλυση προβλήματος, Συνεργατική) Έστω τραπέζιο ΑΒΓΔ, ΑΒ $\parallel$ ΔΓ, όπως φαίνεται στο σχήμα. Η γωνία $\widehat{A}$ είναι ορθή.





Σημείο E κινείται στη πλευρά ΑΔ. Έστω x η απόσταση $\overline{\mathrm{A\Delta}}$. Αναπαριστάνουμε με τις ευθείες τα εμβαδά των τριγώνων ΑΕΒ, ΕΒΓ και ΕΓΔ, όπως φαίνονται στο σχήμα.

(α′) Ομάδα Α i. Σε ποιά ευθεία αντιστοιχεί το εμβαδόν του τριγώνου ΑΕΒ;
ii. Βρείτε τον τύπο της ευθείας που αντιστοιχεί στο εμβαδόν του ΑΕΒ.
Ομάδα Β i. Σε ποιά ευθεία αντιστοιχεί το εμβαδόν του τριγώνου ΕΒΓ;
ii. Βρείτε τον τύπο της ευθείας που αντιστοιχεί στο εμβαδόν του ΕΒΓ.
Ομάδα Γ i. Σε ποιά ευθεία αντιστοιχεί το εμβαδόν του τριγώνου ΕΓΔ;
ii. Βρείτε τον τύπο της ευθείας που αντιστοιχεί στο εμβαδόν του ΕΓΔ.

(β′) (Κοινό για όλους) Υπολογείστε τα μήκη των πλευρών του τραπεζίου.

(γ′) (Κοινό για όλους) Υπάρχει περίπτωση τα τρία εμβαδά των τριγώνων να είναι ίσα; Προσδιορίστε ποια ζεύγη τριγώνων μπορεί να είναι ισεμβαδικά, και υπολογείστε τη τιμή της μεταβλητής x.
Α. ΑΕΒ και ΕΒΓ Β. ΕΒΓ και ΕΓΔ Γ. ΑΕΒ και ΕΓΔ

3.0.1 Λύση της άσκησης 11

Η χρήση ενός λογισμικού Δυναμικής Γεωμετρίας είναι απαραίτητη. ’ρα, τα σχήματα που θα δοθούν θα είναι σε αρχείο.

Κατ΄αρχάς η τιμή του x και των εμβαδών των τριγώνων είναι ποσά ανάλογα. Άρα, η καμπύλες που θα εκφράζουν τη μεταβολή των εμβαδών συναρτήσει του x θα είναι ευθείες.

Μπλε τρίγωνο Το μπλέ τρίγωνο μηδενίζεται αν $x = 0$. ’ρα η ευθεία που διέρχεται από το $(0, 0)$ είναι η ευθεία που αναπαριστά το εμβαδόν του τριγώνου ΑΒΕ.
Η ευθεία όπως φαίνεται στο σχήμα έχει δύο σημεία το $(0, 0)$ και $(3, 6)$ άρα η εξίσωση θα είναι

$$\boxed{y = 2x}$$

Κόκκινο τρίγωνο Το κόκκινο τρίγωνο μηδενίζεται όταν $x = \mathrm{A}\Delta$. Άρα,

$$\overline{\mathrm{A}\Delta} = 3$$

και η ευθεία που αναπαριστά τη μεταβολή του εμβαδού είναι αυτή που διέρχεται από το $(3, 0)$.
Η αντίστοιχη εξίσωση της ευθείας είναι αυτή που διέρχεται από τα σημεία $(3, 0)$ και αν $E \equiv A$, διέρχεται από το σημείο $(0, 8)$, με εξίσωση

$$\boxed{8x + 3y = 24}$$

Πράσινο τρίγωνο Αναπόφευκτα η ευθεία που διέρχεται από τα $(0, 6)$ και $(3, 8)$ δίνει το εμβαδόν του τριγώνου ΒΕΓ, με εξίσωση

$$\boxed{-2x + 3y = 18}$$

Όπως έχουμε δεί το $\boxed{\overline{\mathrm{A}\Delta} = 3}$.

Όταν $x = 0$ το εμβαδόν του τριγώνου ΕΔΓ είναι 8. Άρα:

$$(\text{Ε}\Delta\Gamma) = \frac{1}{2} \cdot 3 \cdot \overline{\Delta\Gamma} = 6 \Rightarrow \overline{\Delta\Gamma} = 4$$

Όταν $x = A\Delta$ το εμβαδόν του τριγώνου ΑΒΕ είναι 6. Άρα:

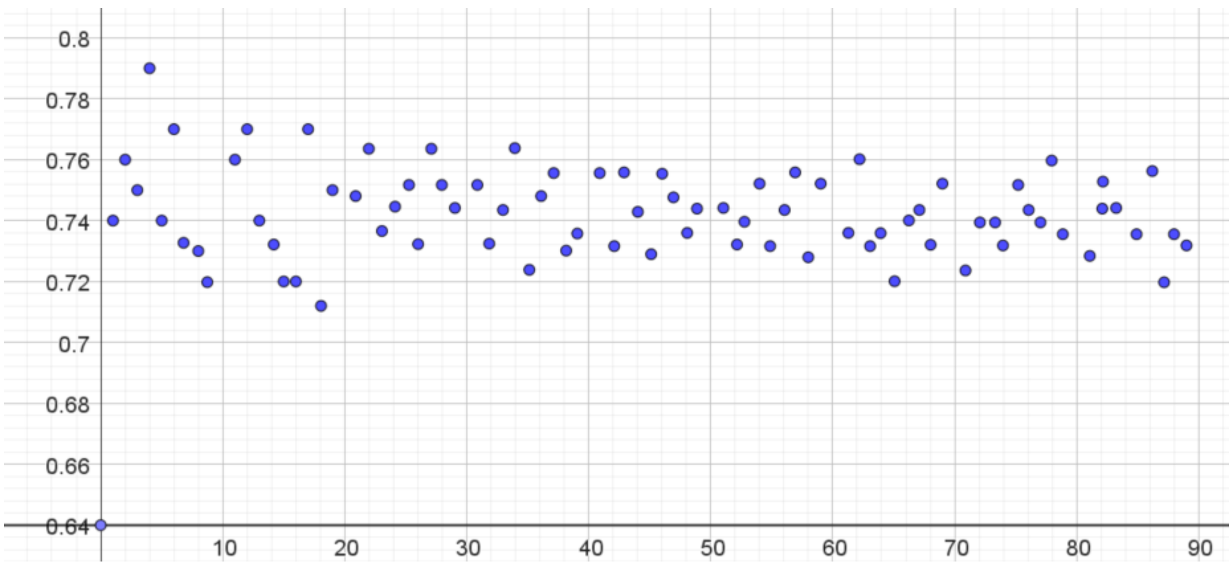
$$(\text{ΑΒΕ}) = \frac{1}{2} \cdot 3 \cdot \overline{\overline{AB}} = 6 \Rightarrow \boxed{\overline{AB} = 4}$$

Οπότε, η ΒΓ είναι η υποτείνουσα ενός ορθογωνίου ΒΓΓ′, όπου Γ′ είναι η προβολή του σημείου Γ πάνω στον άξονα Ox. Άρα, $\Gamma' = (5.33 - 4, 0) = (1.33, 0)$ και:

$$\boxed{\overline{\text{ΒΓ}} = \sqrt{1.33^2 + 3^2}}$$

■

12. (Εκτίμηση, γραμμική συσχέτιση) Η διεύθυνση ενός super market θέλει να εκτιμήσει τη πιθανότητα να πληρώσει κάποιος με τραπεζική κάρτα. Για τον λόγο αυτό για 90 μέρες κατέγραφε τη συχνότητα των πελατών που χρησιμοποίησαν κάρτα στη συναλλαγή τους, ώστε να έχουμε 90 δείγματα μεγέθους 1000 το καθένα. Τα αποτελέσματα φαίνονται στον παρακάτω πίνακα. Ο οριζόντιος πίνακας δίνει την ημερήσια συχνότητα των πελατών που πλήρωσαν με κάρτα και ο κατακόρυφος τη συχνότητα.



Θέλουμε να εκτιμήσετε το ποσοστό των πελατών που πληρώνουν με τραπεζική κάρτα το super market.

13. (Δειγματικός χώρος, ορισμός πιθανότητας) Ρίχνουμε δύο φορές ένα αμερόληπτο νόμισμα και κάθε φορά σημειώνουμε το αποτέλεσμα κορώνα(Κ) - γράμματα(Γ), η σειρά έχει σημασία.

(α′) Αναπαραστίστε με ένα δενδοδιάγραμμα όλα τα στοιχεία του δειγματικού χώρου.

(β′) Ποιό είναι το πλήθος των στοιχείων του δειγματικού χώρου;

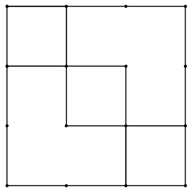
(γ′) Να κάνετε τον πίνακα διπλής εισόδου του πειράματος.

(δ′) Ποια είναι η πιθανότητα να έχουμε φέρει 3 συνεχόμενες φορές γράμματα (Γ) μετά τις 2 ρίψεις;

14. Μια διαφορετική λύση της άσκησης θα δείτε στις Αριθμητικές Προόδους στο Λύκειο. Το αποτέλεσμα αποδίδεται στον Νικόμαχο (II αιώνας). Μια γεωμετρική απόδειξη έχει προταθεί από τον Nilakantha Somayaji τον XVI αιώνα.

(α′) i. Δείξτε ότι $1^3 + 2^3 = (1+2)^2 \qquad (E_2)$

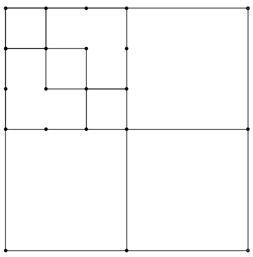
ii. Εξηγείστε βάσει του παρακάτω σχήματος 3.1, την αλήθεια της ισότητας E_2



Σχήμα 3.1: $1^3 + 2^3 = (1+2)^2$

(β′) i. Δείξτε ότι $1^3 + 2^3 + 3^3 = (1+2+3)^2 \qquad (E_3)$

ii. Εξηγείστε βάσει του παρακάτω σχήματος 3.2, την αλήθεια της ισότητας E_3



Σχήμα 3.2: $1^3 + 2^3 + 3^3 = (1+2+3)^2$

(γ′) Ποιο σχήμα θα μπορούσε να δικαιολογήσει την αλήθεια των παρακάτω παραστάσεων:

$$1^3 + 2^3 + 3^3 + 4^3 = (1+2+3+4)^2$$
$$1^3 + 2^3 + 3^3 + 4^3 + 5^3 = (1+2+3+4+5)^2$$

(δ′) Μπορείτε να διατυπώσετε έναν ισχυρισμό γενικεύοντας το αποτέλεσμα της σχέσης E_3;

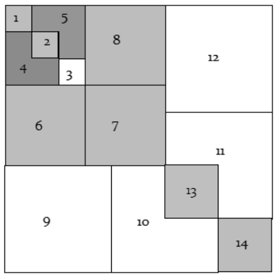
<u>Υπόδειξη:</u>

(α′) Στο τετράγωνο διαστάσεων 3×3 έχω:

$$(1+2)^2 = 2 \cdot 2^2 + 1^2 + 1^2 - 1^2 = 2^3 + 1^2 = 2^3 + 1^3$$

(β′) Στο τετράγωνο διαστάσεων 6×6 έχω:

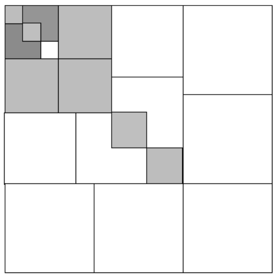
$$(1+2+3)^2 = 3 \cdot 3^2 + 1^2 + 2^3 = 1^3 + 2^3 + 3^3$$



Σχήμα 3.3: $(1+2+3+4)^2 = 1^3+2^3+3^3+4^3$

(γ΄) Προσθέτουμε στο Σχήμα 3.2 τετράγωνα πλευράς 4μ, όπως στο Σχήμα 3.3, και ένα μικρό τετράγωνο με ετικέτα 14. Υπάρχει ένα τετράγωνο διπλό με ετικέτα 13. Έχουμε συνολικά προσθέσει 4 τετράγωνα εμβαδού $4 \times 4^2 = 4^3$. Άρα , $(1+2+3+4)^2 = 1^3+2^3+3^3+4^3$.

Προσθέτουμε τέλος, δες Σχήμα 3.4, 5 τετράγωνα πλευράς 5μ, με συνολικό εμβαδόν $5{\cdot}5^2 = 5^3$. Άρα , $(1+2+3+4+5)^2 = 1^3+2^3+3^3+4^3+5\cdot 5^2 = 1^3+2^3+3^3+4^3+5^3$.



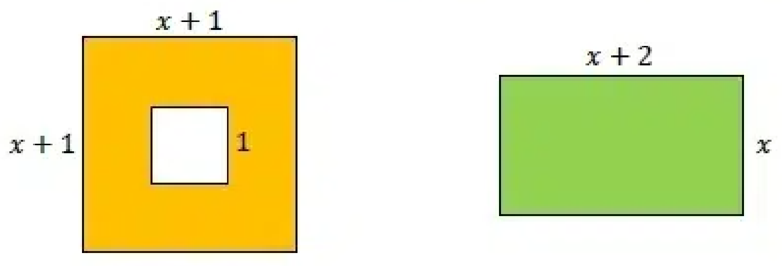
Σχήμα 3.4: $(1+2+3+4+5)^2 = 1^3+2^3+3^3+4^3+5^3$

(δ΄) (Γενίκευση του αποτελέσματος) Μορούμε να ισχυριστούμε ότι:

$$(1+2+3+4+\cdots+n)^2 = 1^3+2^3+3^3+\cdots+n^3, \ \forall n \in \mathbb{N}$$

■

15. Υπολογίστε τα εμβαδά των χρωματιστών επιφανειών του σχήματος σαν συναρτήσεις του x.



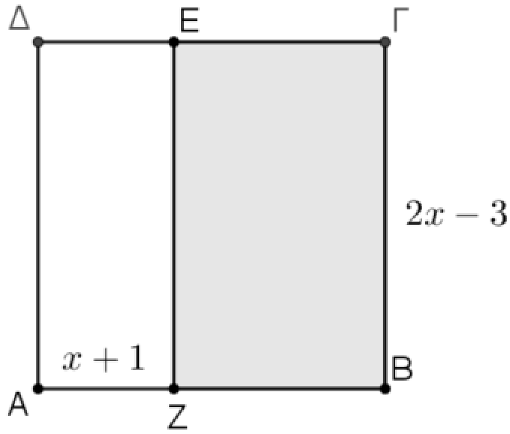
Τι παρατηρείτε;

16. (α΄) Να λυθεί η ανίσωση: $2x - 3 \geq x + 1$ και αναπαραστήστε στην ευθεία των πραγματικών αριθμών τη λύση της.

(β΄) Έστω x πραγματικός αριθμός μεγαλύτερος ή ίσος του 4. Έστω $AB\Gamma\Delta$ ένα τετράγωνο πλευράς $2x - 3$.

i. Δείξτε ότι το εμβαδόν του ορθογωνίου $B\Gamma EZ$ είναι ίσο με:

$$\mathscr{E} = (2x-3)^2 - (2x-3)(x+1)$$



ii. Απλοποιήστε την αλγεβρική έκφραση του $\mathscr{E}$.

iii. Παραγοντοποιήστε την παράσταση του $\mathscr{E}$.

iv. Να λυθεί η εξίσωση $(2x - 3)(x - 4) = 0$.

v. Για τις τιμές του x που βρήκατε, το εμβαδόν του $B\Gamma EZ$ μπορεί να μηδενιστεί; Δικαιολογήστε.

17.