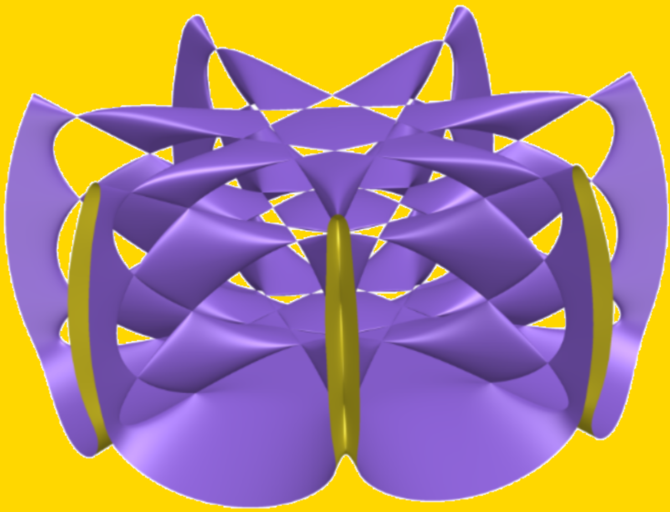
Ο Ορισμός της Εκθετικής και Λογαριθμικής Συνάρτησης



Λυγάτσικας Ζήνων
zligatsikas@gmail.com – zenon7@otenet.gr
http://blogs.sch.gr/zenonlig/
Σύμβουλος Εκπαίδευσης ΠΕ03 Α Αθήνας

31 Μαΐου 2024

Λυγάτσικας Ζήνων
Σύμβουλος Εκπαίδευσης ΠΕ03 Α Αθήνας

Περιεχόμενα

Κεφάλαιο 1

Η εκθετική συνάρτηση

Εισαγωγή

Στο παρόν Αναλυτικό Πρόγραμμα η εκθετική συνάρτηση εισάγεται στην Β Λυκείου με ευθύ ορισμό σαν συνάρτηση $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ορισμένη για $a \in \mathbb{R}_{>0} \wedge a \neq 1$ από τον τύπο $f(x) = a^x$. Στην Γ Λυκείου, ξαφνικά μαθαίνουμε, χωρίς μαθηματική πιστοποίηση, ότι η $f(x) = e^x$ είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$, όπως και η $g(x) = \ln(x)$, και ότι $f'(x) = (e^x)' = e^x$. Η ίδια κατάσταση πιστεύω θα δημιουργηθεί και στο νέο Αναλυτικό Πρόγραμμα αφού η εκθετική συνάρτηση ορίζεται μέσω μοντελοποίησης (sic). Η σειρά: πρώτα εκθετική και μετά λογαριθμική ισχύει σήμερα, αλλά στον ορισμό της παραγώγου η εννοιολογική σειρά σκοντάφτει, κυρίως από τους μαθητές μας.

Στο παλιό βιβλίο της Ανάλυσης των Κατσαργύρη, Παντελίδη, και άλλων, η παραγωγισιμότητα της $\ln(x)$ παρουσιάζεται πρώτα στη σελίδα 144, και υπολογίζεται με τη βοήθεια της σειράς $\lim\limits_{x\to 0}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^x = e$, και στη συνέχεια στη σελίδα 155 αφού λεχθεί ότι η e^x είναι παραγωγίσιμη ως αντίστροφη της παραγωγίσιμης $\ln(x)$, υπολογίζεται η παράγωγος αυτή αλγεβρικά ως εξής:

$$(\ln(e^x))' = \frac{(e^x)'}{e^x},\ \text{αλλά}\ (\ln(e^x))' = (x)' = 1,\ \text{οπότε}\ (e^x)' = e^x$$

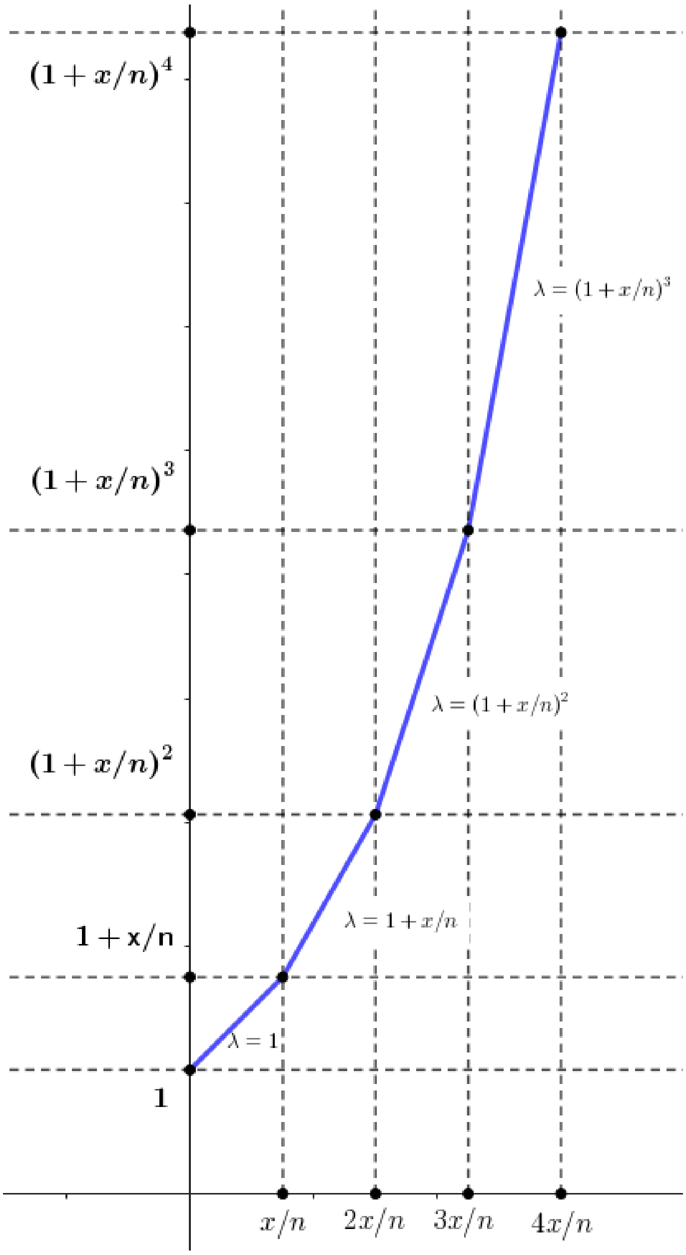
Αυτό νομίζω είναι ένα γρήγορο πέρασμα, προφανώς χωρίς λογικά κενά. Παρακάτω θα παρουσιάσω μια σειρά που μπορεί να ακολουθήσει κάποιος στον ορισμό της εκθετικής και λογαριθμικής συνάρτησης, με το προτέρημα ότι δείχνει καθαρότερα τις μαθηματικές διεργασίες και μια εξαιρετική κατασκευή της ακολουθίας για την επίλυση της διαφορικής εξίσωσης $f' = f$. Η κατασκευή αυτή ακολουθεί ακολουθεί το θεώρημα Cauchy-Lipschitz, αλλά εδώ θα δούμε μια απόδειξη στοιχειώδη εξίσου έξυπνη, μόνο που θα κάνει χρήση σύγκλισης ακολουθιών που αυτή την στιγμή δεν είναι στο Αναλυτικό μας Πρόγραμμα.

1.1 Η κατασκευή της εκθετικής συνάρτησης σαν λύση μιας διαφορικής εξίσωσης

Θα κατασκευάσουμε μια λύση που προσεγγίζει την λύση της διαφορικής εξίσωσης

$$f' = f \wedge\ f(0) = 1 \tag{1.1}$$

με την παρακάτω μέθοδο. Ξεκινάμε από το σημείο $x = 0$, $y = 1$ της αρχικής συνθήκης. Έστω $x \in \mathbb{R}_{>0}$. Διαιρούμε το διάστημα $[0, x]$ σε n ίσα υποδιαστήματα με τα σημεία $0, \dfrac{x}{n}, \dfrac{2x}{n}, \ldots, \dfrac{(n-1)x}{n}, x$.



Στη συνέχεια κατασκευάζουμε μια ευθεία από το $(0, 1)$ έτσι ώστε η κλίση $y'(0) = y(0)$ σύμφωνα με την 1.1. Η ευθεία αυτή διέρχεται από το σημείο $\left(\frac{x}{n}, 1 + \frac{x}{n}\right)$. Ξεκινώντας από αυτό το τελευταίο σημείο, κατασκευάζουμε μια ευθεία η οποία συμφωνα με την 1.1, πρέπει στο διάστημα $\left[\frac{x}{n}, \frac{2x}{n}\right]$ έχει κλίση $y'(x/n) = y(x/n) = 1 + x/n$. Η ευθεία αυτή διέρχεται $\left(\frac{2x}{n}, (1 + \frac{x}{n})^2\right)$. Συνεχίζουμε έτσι ως το σημείο $\left(x, (1 + \frac{x}{n})^n\right)$.

Το παρακάτω θεώρημα ολοκληρώνει τη κατασκευή.

Θεώρημα 1.1.1 *Υπάρχει μια παραγωγίσιμη συνάρτηση* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *τέτοια ώστε* $f(0) = 1$ *και* $f' = f$. **Μια τέτοια συνάρτηση λέγεται εκθετική και συμβολίζεται με** $\exp$.

Η απόδειξη του θεωρήματος βασίζεται στην κατασκευή δύο ακολουθιών που συγκλίνουν στο ίδιο μοναδικά όριο, την συνάρτηση *exp*. Οι ακολουθίες έχουν σχέση με τον συντελεστή των ευθ. τμημάτων που κατασκευάσαμε στο σχήμα.

Η απόδειξη δεν είναι εύκολη και θα τη δούμε μια άλλη φορά. Ας προχωρήσουμε όμως σε μερικές ιδιότητες της συνάρτησης αυτής.

Πρόταση 1.1.1 *Έστω* $a \in \mathbb{R}^*$ *και* $g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *μια παραγωγίσιμη συνάρτηση που επαλυθεύει την* $g' = ag$*. Τότε:* $\forall x \in \mathbb{R} : \Big(g(x) = g(0) \cdot exp(ax)\Big)$.

<u>Υπόδειξη:</u> Δουλέψτε με την συνάρτηση

$$h(x) = g(x) \cdot exp(-ax)$$

Τότε:

$$h'(x) = g'(x) \cdot exp(-ax) - ag(x) \cdot exp(-ax) = ag(x) \cdot exp(-ax) - ag(x) \cdot exp(-ax) = 0$$

και h είναι μια σταθερή συνάρτηση με $h(0) = g(0)$, άρα:

$$g(0) = g(x) \cdot exp(-ax) \Leftrightarrow g(x) = \frac{g(0)}{exp(-ax)} = g(0) \cdot exp(ax)$$

■

1.1.1 Οι Συμβολισμοί

Για κάθε θετικό πραγματικό αριθμό a και για κάθε ρητό p/q, το σύμβολο $a^{p/q}$ είναι η q-οστή ρίζα του a^p. Η ύπαρξη ενάος τέτοιου αριθμού είναι αποτέλεσμα του θεωρήματος των ενδιάμεσων τιμών. Ομοίως:

$$\begin{cases} \forall n \in \mathbb{N}_{>1} : \ exp(nx) = exp(x)^n \\ \forall p/q \in \mathbb{Q} : \ exp(x)^p = exp(px) = exp\left(q\frac{p}{q}x\right) = \left(exp\left(\frac{p}{q}x\right)\right)^q \end{cases}$$

επειδή το $exp(p/qx)$ είναι θετικό, είναι η q-οστή ρίζα του $exp(x)^p$. Άρα: $exp\left(\frac{p}{q}x\right) = exp(x)^{p/q}$. Αν θέσω $e = exp(1)$ τότε $exp(p/q) = e^{p/q}$. Άρα, μπορώ να ορίσω $\boxed{e^x = exp(x)}$ για κάθε x πραγματικό αριθμό.

Προσοχή, δεν ορίζω εδώ τι σημαίνει a^x για $a \in \mathbb{R}_{>0}$ και $x \in \mathbb{R}$!

Συνοψίζοντας:
Η συνάρτηση e^x είναι η μοναδική λύση της εξίσωσης $f' = f$ με $f(0) = 1$

Ας ξανακτίσουμε λοιπόν το σκηνικό της εισαγωγής της εκθετικής συνάρτησης.

1.2 Ορισμοί - Ιδιότητες Εκθετικής Συνάρτησης

Ορισμός 1.2.1 *Υπάρχει μια μοναδική παραγωγίσιμη συνάρτηση f στο $\mathbb{R}$ με τις ιδιότητες $f' = f$ και $f(0) = 1$. Η συνάρτηση αυτή ονομάζεται* ***εκθετική***.

1.2.1 Ιδιότητες Εκθετικής συνάρτησης

1. **Έστω f μια εκθετική συνάρτηση και u μια παραγωγίσιμη σε ένα διάστημα Δ. Έστω $h(x) = \big(f \circ u\big)(x) = f\big(u(x)\big)$. Τότε: $h'(x) = u'(x) f\big(u(x)\big)$.**
   Απόδειξη: Η συνάρτηση h είναι επίσης παραγωγίσιμη στο Δ. Άρα από τη σύνθεση συναρτήσεων έχω:
$$\begin{aligned} h'(x) &= u'(x)f'(x)\Big|_{x=u(x)} \\ &= u'(x)f(x)\Big|_{x=u(x)} \\ &= u'(x)f\big(u(x)\big) \end{aligned}$$
   ■

2. **Αν f είναι μία εκθετική συνάρτηση, τότε:**
$$\forall x \in \mathbb{R}: \ f(-x) \cdot f(x) = 1$$
   Απόδειξη: Έστω $g(x) = f(-x) \cdot f(x)$. Η g είναι παραγωγίσιμη συνάρτηση σαν γινόμενο παραγωγισίμων συναρτήσεων στο $\mathbb{R}$.
$$\begin{aligned} g'(x) &= f'(x)f(-x) + (-x)'f'(-x)f'(x) \\ &= f'(x)f(-x) + (-x)'f'(-x)f'(x) = 0 \end{aligned}$$
   Άρα, $g'(x) = 0$ επομένως υπάρχει $c \in \mathbb{R}$ έτσι ώστε $g(x) = c$. Αλλά, $g(0) = f(0)f(0) = 1 = c$ άρα $f(x)f(-x) = 1$ και $\forall x \in \mathbb{R}: \ f(x) \neq 0$. ■

3. **Υπάρχει μία και μοναδική παραγωγίσιμη συνάρτηση f με τις ιδιότητες $f' = f$ και $f(0) = 1$.**
   Απόδειξη: Η ύπαρξη εξασφαλίζεται από την συνάρτηση $exp(x) = e^x$, έτσι όπως έχει ορισθεί στη παράγραφο 1.1, η οποία ικανοποιεί τις δύο ιδιότητες.

   Για την μοναδικότητα θα χρησιμοποιήσουμε την απαγωγή σε άτοπο. Ας υποθέσουμε ότι υπάρχουν δύο διαφορετικές εκθετικές συναρτήσεις f_1 και f_2 με τις ιδιότητες:
$$f_1 := \begin{cases} f_1'(x) = f_1(x) \\ f_1(0) = 1 \end{cases} \quad \text{και } f_2 := \begin{cases} f_2'(x) = f_2(x) \\ f_2(0) = 1 \end{cases}$$
   Έστω οι συναρτήσεις $h(x) = f_1(x)f_2(-x)$ και $u(x) = -x$. Επειδή u, f_1 και f_2 είναι παραγωγίσιμες, έτσι είναι και η h.
$$h(x) = f_1(x)f_2(-x) = f_1(x) \cdot \Big(f_2\big(u(x)\big)\Big)$$

με

$$\begin{aligned} h'(x) &= f_1'(x) f_2\big(u(x)\big) + u'(x) f_2'\big(u(x)\big) f_1(x) \\ &= f_1'(x) f_2\big(u(x)\big) - f_2\big(u(x)\big) f_1'(x) = 0 \end{aligned}$$

Επομένως, υπάρχει $c \in \mathbb{R}$ έτσι ώστε $h(x) = c$ αλλά

$$h(0) = f_1(0) f_2(0) = 1 \Rightarrow h(x) = 1 \Rightarrow f_2(-x) = \frac{1}{f_1(x)}$$

Τότε: $f_2(x) f_2(-x) = \dfrac{f_2(x)}{f_1(x)} = 1$ από την δεύτερη ιδιότητα. Άρα, $f_2(x) = f_1(x)$, $\forall x \in \mathbb{R}$. ■

1.2.2 Αλγεβρικές ιδιότητες

1. **$\forall a, b \in \mathbb{R}$ ισχύει: $e^a \cdot e^b = e^{a+b}$.**
   Απόδειξη: Έστω $h(x) = \dfrac{e^{a+x}}{e^x}$. Τότε: $h(x) = \dfrac{e^{a+x}}{e^x}$ και:

$$\begin{aligned} h'(x) &= \frac{(x+a)' e^{x+a} e^x - e^x e^{x+a}}{e^{2x}} \\ &= \frac{e^{x+a} e^x - e^x e^{x+a}}{e^{2x}} \\ &= 0 \end{aligned}$$

   Άρα, $\exists c \in \mathbb{R}:\ h(x) = c$ με $h(0) = e^a = c$ Συνεπώς για $x = b$ έχουμε:

$$e^{a+b} = e^a \cdot e^b$$

■

2. **$\forall a, b \in \mathbb{R}$ ισχύει: $\dfrac{e^a}{e^b} = e^{a-b}$.**
   Απόδειξη: Όπως προηγουμένως. ■

3. **$\forall a \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}^*$ ισχύει: $\left(e^a\right)^n = e^{na}$.**
   Απόδειξη: n επαναλήψεις της ιδιότητας 1. ■

4. **$\forall x \in \mathbb{R}$: $e^x > 0$.**
   Απόδειξη: $e^x = e^{2\frac{x}{2}} = \left(e^{\frac{x}{2}}\right)^2 > 0$, με $e^x \neq 0$, $\forall x \in \mathbb{R}$. ■

5. **$\forall x \in \mathbb{R}$: $e^0 = 1$, και $e^{-x} = \dfrac{1}{e^x}$.**
   Απόδειξη: $e^0 = e^{x-x} = \dfrac{e^x}{e^x} = 1$. Επίσης, $e^{-x} = e^{0-x} = \dfrac{e^0}{e^x} = \dfrac{1}{e^x}$. ■

1.2.3 Η Εκθετική και τα όρια

1. $\boxed{\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{e^x - 1}{x} = 1}$.

Απόδειξη: Η συνάρτηση e^x είναι παραγωγίσιμος σε κάθε σημείο, επομένως από τον κανόνα De l' Hôpital έχω:

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{x}\overset{\frac{0}{0}}{=}\lim_{x\to 0}\frac{e^x}{1}=\lim_{x\to 0}e^x=1$$

Διαφορετικά, επειδή: $\dfrac{e^x-1}{x}=\dfrac{f(x)-f(0)}{x-0}$, το όριο γίνεται:

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=(e^x)'\Big|_0=1$$

■

2. $\boxed{\forall x\in\mathbb{R}^+:\ e^x>x+1}$.

   Απόδειξη: Έστω $g(x)=e^x-x-1$. Τότε: $g'(x)=e^x-1$ με $e^x-1>0\Leftrightarrow e^x>e^0\Leftrightarrow x>0$. Επομένως $g'>0\Rightarrow g\uparrow$ αν $x>0$. Άρα: $0<x\Rightarrow e^0-0-1<e^x-x-1\Rightarrow x+1<e^x$. ■

3. $\boxed{\lim_{x\to+\infty}e^x=+\infty}$.

   Απόδειξη: $\lim_{x\to+\infty}e^x>\lim_{x\to+\infty}(x+1)$ με $\lim_{x\to+\infty}(x+1)=+\infty$ από την ανισότητα των ορίων. ■

4. $\boxed{\lim_{x\to-\infty}e^x=0}$.

   Απόδειξη: $e^x=e^{-(-x)}=\dfrac{1}{e^{-x}}$.
   Γνωρίζουμε όμως ότι $\lim_{x\to-\infty}(-x)=+\infty$, άρα:

$$\lim_{x\to-\infty}e^x=\lim_{x\to+\infty}e^{-x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{e^{-x}}=0$$

■

5. $\boxed{\lim_{x\to+\infty}\dfrac{e^x}{x}=+\infty}$.

   Απόδειξη: Μπορούμε να βρούμε το όριο από τον κανόνα του De L' Hôspital αφού είναι της μορφής $\dfrac{+\infty}{+\infty}$. Η δεύτερη απόδειξη είναι στοιχειοδέστερη.
   Από το ερώτημα 2, έχουμε:

$$e^{\frac{x}{2}}\geq\frac{x}{2}+1>\frac{x}{2}>0$$

Άρα,

$$\frac{e^{\frac{x}{2}}}{\sqrt{x}}\geq\frac{\frac{x}{2}}{\sqrt{x}}\Rightarrow\left(\frac{e^{\frac{x}{2}}}{\sqrt{x}}\right)^2\geq\frac{x}{4}$$

ή $\dfrac{e^x}{x}\geq\dfrac{x}{4}$. Επομένως:

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{e^x}{x}\geq\lim_{x\to+\infty}\frac{x}{4}=+\infty$$

Συμπέρασμα: $\lim_{x\to+\infty}\frac{e^x}{x}=+\infty$. ■

6. $\boxed{\forall n\in\mathbb{N}^*:\ \lim_{x\to+\infty}\frac{e^x}{x^n}=+\infty}$.

Απόδειξη: Για $n=1$ είναι η προηγούμενη περίπτωση. Έστω $n\in\mathbb{N}^+-\{1\}$.

$$\frac{e^x}{x^n}=\frac{1}{n^n}\cdot\frac{\left(e^{\frac{x}{n}}\right)^n}{\left(\frac{x}{n}\right)^n}=\frac{1}{n^n}\cdot\left(\frac{e^{\frac{x}{n}}}{\frac{x}{n}}\right)^n$$

με $\lim_{x\to+\infty}\frac{x}{n}=+\infty$, $n>0$ και $\lim_{x\to+\infty}\frac{e^x}{x}=+\infty$. Άρα, συνθέτοντας συναρτήσεις $\lim_{x\to+\infty}\frac{e^{\frac{x}{n}}}{\frac{x}{n}}=+\infty$ και πολλαπλασιάζοντας

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{n^n}\cdot\frac{\left(e^{\frac{x}{n}}\right)^n}{\left(\frac{x}{n}\right)^n}=+\infty$$

Τελικά, $\lim_{x\to+\infty}\frac{e^x}{x^n}=+\infty$με $n\in\mathbb{N}^*$. ■

7. $\boxed{\lim_{x\to-\infty}\Big(xe^x\Big)=0 \text{ και } \lim_{x\to-\infty}\Big(x^ne^x\Big)=0,\ n\in\mathbb{N}^*}$.

Απόδειξη: $\forall x\in\mathbb{R}^*$ έχουμε:

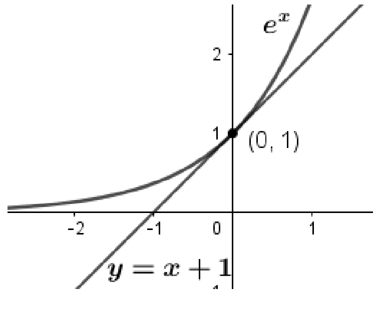
$$xe^x=-(-x)e^{-(-x)}=-\frac{1}{\frac{e^{-x}}{-x}}$$

Αλλά $\lim_{x\to-\infty}(-x)=+\infty$ και $\lim_{x\to+\infty}\frac{e^x}{x}=+\infty$. Άρα, $\lim_{x\to-\infty}\frac{e^{-x}}{-x}=+\infty$. Συμπέρασμα: $\lim_{x\to-\infty}\Big(xe^x\Big)=0$.

Ομοίως, $x^ne^x=(-1)^n(-x)^ne^{-(-x)}=(-1)^n\frac{1}{\frac{e^{-x}}{(-x)^n}}$. Γνωρίζουμε όμως από το ερώτημα 6, ότι $\lim_{x\to-\infty}\frac{e^{-x}}{(-x)^n}=+\infty$. Επομένως: $\lim_{x\to-\infty}\Big(x^ne^x\Big)=0$. ■

1.2.4 Τι πρέπει να ξέρω

1. Το γράφημα της εκθετικής. Έχοντας υπόψη ότι: $\lim_{x\to+\infty}e^x=+\infty$, $\lim_{x\to-\infty}e^x=0$, η $f(x)=e^x$ είναι θετική και αύξουσα αφού $e^x>0$ και $f'(x)>0$. Η εφαπτομένη στο σημείο $(0,1)$ είναι η ευθεία $y=x+1$ η οποία είναι κάτω από την $\mathscr{G}_f$ ($e^x\geq x+1$) γιατί η καμπύλη είναι κυρτή ($f''(x)=e^x>0$).



2. Να χρησιμοποιώ τις αλγεβρικές ιδιότητες της συνάρτησης όπως: Να απλοποιήσετε την παράσταση:

$$\frac{e\left(e^{-x}\right)^3}{e^{-2x}}$$

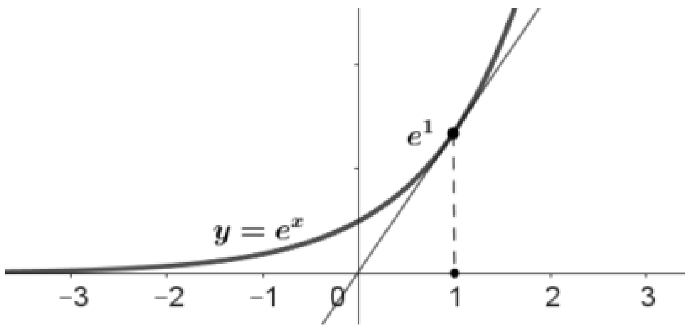
3. Να επιλύω εξισώσεις και ανισώσεις, για παράδειγμα: $-e^{2x} - e^x + 2 = 0$ ή $-e^{2x} - e^x + 2 > 0$.

4. Να κάνω χρήση των ορίων της, για παράδειγμα: Να βρεθεί το όριο της $f(x) = xe^{-x}$ όταν $x \to +\infty$.
   Υπόδεξη: $xe^{-x} = \frac{1}{\frac{e^x}{x}}$.

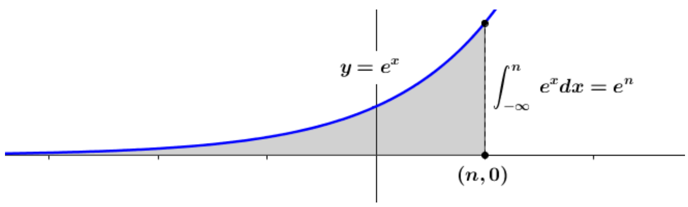
5. Να παραγωγίζω συναρτήσεις, για παράδειγμα: $f(x) = \dfrac{xe^{2x}+1}{e^{2x}+1}$.
   Υπόδεξη: $f'(x) = e^{2x}\dfrac{e^{2x}+2x-1}{(e^{2x}+1)^2}$.

Αξιοσημείωτα αποτελέσματα

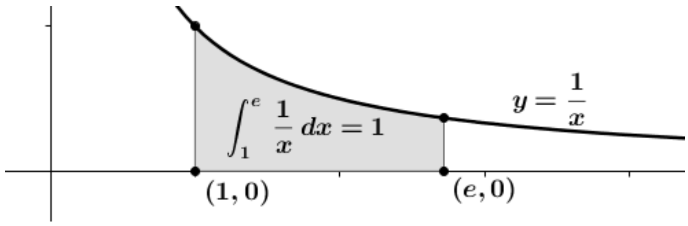
1. Η εκθετική συνάρτηση είναι η μοναδική συνάρτηση όπου η συνάρτηση είναι ίση με την παράγωγό της. Με αυτό εννοούμε ότι η κλίση της εφαπτομένης σε κάθε σημείο της είναι ίση με τη τιμή της συνάρτησης στο σημείο αυτό.



2. Η εκθετική συνάρτηση είναι η μόνη συνάρτηση της οποίας το εμβαδόν κάτω από τη καμπύλη από το $-\infty$ μέχρι το n είναι ίσο με το e^n.



3. Ο αριθμός e είναι επίσης ο μοναδικός αριθμός για τον οποίον το εμβαδόν του χωρίου της υπερβολής $y = \dfrac{1}{x}$ από το 1 έως το e είναι ίσος με 1.


$\int_1^e \frac{1}{x}\,dx = 1$
$y = \frac{1}{x}$
$(1,0)$
$(e,0)$

Κεφάλαιο 2

Λογαριθμικές Συναρτήσεις

2.1 Ορισμοί - Ιδιότητες

Ορισμός 2.1.1 *Έστω $b \in \mathbb{R}^+$. Τότε η $\ln(b)$ είναι η μοναδική λύση της εξίσωσης $e^x = b$. Με άλλα λόγια, η νεπέρεια λογαριθμική συνάρτηση $\ln$ είναι η αντίστροφη της εκθετικής συνάρτησης. Ορίζουμε λοιπόν μια νέα συνάρτηση που την ονομάζουμε* ***νεπέρεια λογαριθμική συνάρτηση*** *ως εξής:*

$$\ln : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R} \text{ έτσι ώστε } y = \ln(x) \Leftrightarrow e^y = x$$

Ιδιότητες 1

1. $\ln(x)$ ***υπάρχει μόνο για*** $x > 0$.
2. $\ln|x|$ ***υπάρχει μόνο για*** $x \neq 0$.
3. $e^0 = 1 \Leftrightarrow \ln(1) = 0$, $e^1 = e \Leftrightarrow \ln(e) = 1$.
4. $\forall \mathbf{a} \in \mathbb{R}$, $\ln(\mathbf{e^a}) = \mathbf{a}$.
5. $\forall \mathbf{b} \in \mathbb{R}^+$, $\mathbf{e}^{\ln(\mathbf{b})} = \mathbf{b}$.

Αλγεβρικές Ιδιότητες 1 $\forall a, b \in \mathbb{R}^+$ *ισχύει:*

1. $\ln(\mathbf{ab}) = \ln(\mathbf{a}) + \ln(\mathbf{b})$.
2. $\ln\left(\dfrac{\mathbf{a}}{\mathbf{b}}\right) = \ln(\mathbf{a}) - \ln(\mathbf{b})$.
3. $\ln\left(\dfrac{\mathbf{1}}{\mathbf{b}}\right) = -\ln(\mathbf{b})$.
4. $\ln(\mathbf{a^n}) = \mathbf{n}\ln(\mathbf{a})$.

<u>Απόδειξη</u>: Υποθέτουμε ότι $\forall a, b \in \mathbb{R}^+$.

1. Έστω $A = \ln(a)$ και $B = \ln(b)$. Τότε $a = e^A$ και $b = e^B$. Άρα:

$$ab = e^{A+B} = e^A \cdot e^B \Rightarrow \ln(ab) = A + B = \ln(a) + \ln(b)$$

2. $\ln\left(\dfrac{a}{b}\right) + \ln(b) = \ln\left(\dfrac{a}{b} \cdot b\right) = \ln(a)$.

3. $\ln\left(\dfrac{1}{b}\right) + \ln(b) = \ln(1) = 0.$

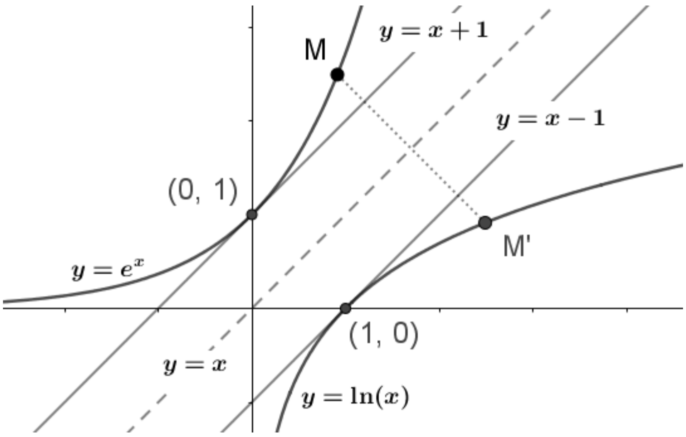
4. Έστω $A = \ln(a)$ τότε: $e^A = a$, επομένως:

$$\left(e^A\right)^n = a^n \Rightarrow e^{nA} = a^n \Rightarrow n\ln(e^A) = n\ln(a) = \ln(a^n)$$

■

2.2 Σχέση μεταξύ του γραφήματος της $\ln(x)$ και e^x

Οι δύο συναρτήσης είναι **αντίστροφες**: $\left(e^x\right)^{-1} = \ln(x)$, άρα είναι συμμετρικές ως προς $y = x$. Απόδειξη: Έστω $y > 0$ και M' να είναι το συμμετρικό του σημείου $M(x, y)$ ως προς $y = x$.



Σχήμα 2.1: Το γράφημα της λογαριθμικής και της εκθετικής.

$$M \in \mathscr{G}_{exp} \Leftrightarrow y = e^x \Leftrightarrow y = \ln(x) \Leftrightarrow (y, x) \in \mathscr{G}_{\ln}$$

■

2.3 Παράγωγος της $\ln$

Είδαμε ότι η συνάρτηση e^x στο σημείο $(0, 1)$ έχει εφαπτομένη (ϵ) : $y = x + 1$, σχήμα 2.1. Οι δύο συναρτήσεις $\ln(x)$ και e^x είναι αντίστροφες και άρα συμμετρικές ως προς $y = x$, επομένως η ευθεία (ϵ') : $y = x - 1$ είναι συμμετρική της (ϵ) ως προς $y = x$ και είναι εφαπτομένη της $\ln(x)$ στο σημείο $(1, 0)$.

Πρόταση 2.3.1 *Η συνάρτηση $f(x) = \ln(x)$ είναι παραγωγίσιμη για $x = 1$ με $f'(1) = 1$.*

Απόδειξη:

$$f'(1) = \lim_{x\to 0^+} \frac{f(1+h) - f(1)}{h} = \lim_{x\to 0^+} \frac{f(1+h)}{h} = 1$$

Γιατί, η εφαπτομένη $y = x - 1$ στο $(1, 0)$ έχει συντελεστή 1, όπως είδαμε παραπάνω. Μια αυστηρή απόδειξη είδαμε στην παράγραφο § 1.3 σελίδα 15, στις σημειώσεις του Διαφορικού Λογισμού. ■

Πρόταση 2.3.2 *Η συνάρτηση $f(x) = \ln(x)$ είναι παραγωγίσιμη για $\forall x \in (0, +\infty)$ με*

$$\big(\ln(x)\big)' = \frac{1}{x}$$

Απόδειξη:

$$\begin{aligned}
\big(\ln(x)\big)' &= \lim_{h\to 0} \frac{\ln(x+h) - \ln(x)}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{\ln\left(1 + \frac{h}{x}\right)}{h} \\
&= \lim_{u\to 1} \frac{\ln(u)}{x(u-1)} \quad \text{θέσαμε } u = 1 + \frac{h}{x} \to 1, \text{ με } h = x(u-1) \\
&= \frac{1}{x} \cdot \lim_{u\to 1} \frac{\ln u}{u-1} = \frac{1}{x}, \text{ αφού } \lim_{u\to 1} \frac{\ln(u)}{u-1} = 1
\end{aligned}$$

■

Πρόταση 2.3.3 ***Η λογαριθμική συνάρτηση*** $\ln(x)$ ***είναι γνησίως αύξουσα στο*** $(0, +\infty)$.

Απόδειξη: $f'(x) = \dfrac{1}{x}$, $\forall x \in (0, +\infty)$, άρα $f'(x) > 0$, $\forall x \in (0, +\infty)$ η f είναι γνησίως αύξουσα. ■

Πρόταση 2.3.4 $\forall a, b \in (0, +\infty)$**,** $\ln(a) < \ln(b) \Rightarrow a < b$ ***και*** $\ln(a) = \ln(b) \Rightarrow a = b$.

2.3.1 Ιδιότητες του ορίου

1. $\boxed{\lim_{x\to 0} \frac{\ln(x+1)}{x} = 1}$, από τα προηγούμενα.

2. $\boxed{\lim_{x\to +\infty} \ln(x) = +\infty}$
   Απόδειξη: Αρκεί να δείξω ότι $\forall A > 0$, $\exists B > 0$ τέτοιο ώστε $\forall x > 0$ με $x > B$, θα έχουμε $\ln(x) = A$.
   Αν πάρω $B = e^A$ τότε αν $x > e^A$ θα έχουμε $\ln(x) > \ln(e^A) = A$. Επομένως, $\lim_{x\to +\infty} \ln(x) = +\infty$.
   ■

3. $\boxed{\lim_{x\to 0^+} \ln(x) = -\infty}$
   Απόδειξη: Αν $x > 0$ τότε $\ln(x) = -\ln\left(\dfrac{1}{x}\right)$. Επίσης, γνωρίζουμε ότι $\lim_{x\to 0^+} \dfrac{1}{x} = +\infty$ και $\lim_{X\to +\infty} \ln(X) = +\infty$ όπου $X = \dfrac{1}{x}$. Άρα,
   $$\lim_{x\to 0^+} \ln(x) = \lim_{x\to 0^+} \left(-\ln\left(\frac{1}{x}\right)\right) = -\lim_{x\to 0^+} \ln\left(\frac{1}{x}\right) = -\lim_{X\to +\infty} \ln(X) = -\infty$$
   ■

4. $\boxed{\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln(x)}{x} = 0}$

<u>Απόδειξη:</u> Σύμφωνα με τον κανόνα De l' Hôpital. Μπορούμε και χωρίς τον κανόνα.

Για κάθε $x > 1$,

$$\frac{\ln(x)}{x} = \frac{\ln(x)}{e^{\ln(x)}} = \frac{1}{\frac{e^{\ln(x)}}{\ln(x)}}$$

Αλλά, $\lim_{x\to+\infty} \ln(x) = +\infty$ και $\lim_{x\to+\infty} \frac{e^X}{X} = +\infty$. Άρα, από σύνθεση

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln(x)}{x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{\frac{e^{\ln(x)}}{\ln(x)}} = 0$$

■

5. $\boxed{\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln(x)}{x^n} = 0}$

<u>Απόδειξη:</u> $\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln(x)}{x^n} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\frac{1}{x}}{nx^{n-1}} = \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{nx^n} = 0.$ ■

6. $\boxed{\lim_{x\to 0^+} \big(x\ln(x)\big) = 0}$

<u>Απόδειξη:</u> Ισχύει: $x\ln(x) = -x\ln\frac{1}{x} = -\frac{\ln\frac{1}{x}}{\frac{1}{x}}$. Άρα,

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0^+} (x\ln(x)) &= \lim_{x\to 0^+} \left(-\frac{\ln\frac{1}{x}}{\frac{1}{x}}\right)\\ &\overset{see4}{=} -\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln(x)}{x}\\ &=0\end{aligned}$$

■

2.4 Μελέτη της συνάρτησης $f(x) = \ln(x)$

$D_f = (0, +\infty)$, $\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$ και $\lim_{x\to 0^+} f(x) = -\infty$.

Η συνάρτηση είναι παραγωγίσιμη με $\big(\ln(x)\big)' = \frac{1}{x}$ και γνησίως αύξουσα στο $(0, +\infty)$.

Για $0 < x < 1 \overset{f\uparrow}{\Longrightarrow} \ln(x) < ln(1) = 0$.

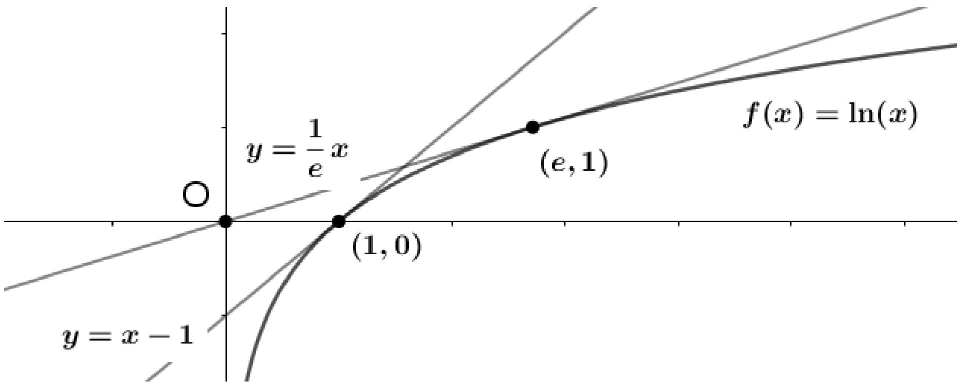
Για $1 < x \overset{f\uparrow}{\Longrightarrow} 0 = \ln(1) < \ln(x)$.

2.4.1 Η καμπύλη της συνάρτησης $f(x) = \ln(x)$

$\begin{cases} f(1) = 0 \\ f'(1) = 1 \end{cases}$ άρα στο $(1, 0)$ η εξίσωση της εφαπτομένης είναι $y = x - 1$.

Επίσης, επειδή η $f(x) = \ln(x)$ είναι κυρτή ($f'(x) > 0,\ \forall x \in (0, +\infty)$), έχουμε $\boxed{\ln(x) \leq x - 1}$.

$\begin{cases} f(e) = 1 \\ f'(e) = \dfrac{1}{e} \end{cases}$ άρα στο $\left(e, \dfrac{1}{e}\right)$ η εξίσωση της εφαπτομένης είναι $y = \dfrac{1}{e}x$.



2.5 Σύνθεση συναρτήσεων και παραγώγιση

1. Αν $u(x)$ μια συνάρτηση ορισμένη και παραγωγίσιμη σε διάστημα Δ έτσι ώστε $\forall x \in \Delta :\ u(x) > 0$, τότε

$$\Big(\ln\big(u(x)\big)\Big)' = \frac{u'(x)}{u(x)}$$

2. Αν $u(x)$ μια συνάρτηση ορισμένη και παραγωγίσιμη σε διάστημα Δ έτσι ώστε $\forall x \in \Delta$: η $u(x)$ έχει σταθερό πρόσημο τότε

$$\Big(\ln\big|u(x)\big|\Big)' = \frac{u'(x)}{u(x)}$$

<u>Απόδειξη:</u>

Έστω $u(x) > 0$, $\forall x \in \Delta$ τότε: $\Big(\ln\big(u(x)\big)\Big)' = \dfrac{u'(x)}{u(x)}$.

Έστω $u(x) < 0$, $\forall x \in \Delta$ τότε: $\Big(\ln\big(-u(x)\big)\Big)' = \dfrac{-u'(x)}{-u(x)} = \dfrac{u'(x)}{u(x)}$. ■

Παράδειγμα 2.5.1 Έστω $g(x) = \ln\left|x^2 - 3x + 2\right|$ με $D_g = \mathbb{R} - \{1, 2\}$. Να βρεθεί η πρώτη παράγωγος της $g(x)$.

Αν $u(x) = x^2 - 3x + 2$, τότε για $x \in (-\infty, 1) \cup (2, +\infty)$, $u(x) > 0$ και $g'(x) = \dfrac{2x - 3}{x^2 - 3x + 2}$.

Αν $x \in (1, 2)$, $u(x) < 0$ και $g'(x) = \dfrac{2x - 3}{x^2 - 3x + 2}$. ■

2.6 Δεκαδικός Λογάριθμος

Ορισμός 2.6.1 *Ο **δεκαδικός λογάριθμος** $\log(x)$ ορίζεται όπως και ο νεπέρειος, αν στην θέση του e βάλουμε το 10, και είναι ίσος με το πηλίκο* $\log(x) = \dfrac{\ln(x)}{\ln(10)}$. *Επίσης* $\ln(x) = \dfrac{\log(x)}{\log(e)}$.

Ιδιότητες 2 $\forall a, b \in \mathbb{R}^+$, έχουμε:

1. $\log(ab) = \log(a) + \log(b)$.
2. $\log\left(\dfrac{a}{b}\right) = \log(a) - \log(b)$.
3. $\log\left(\dfrac{1}{b}\right) = -\log(b)$.

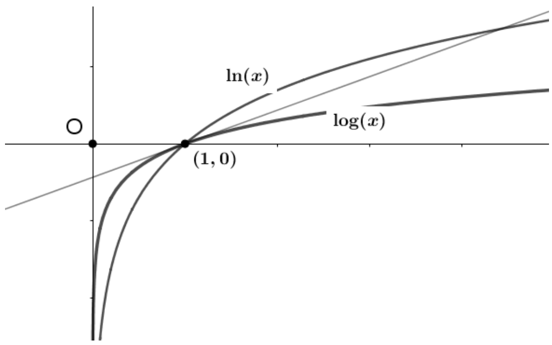
2.6.1 Παράγωγος

$$\big(\log(x)\big)' = \left(\frac{\ln(x)}{\ln(10)}\right)' = \frac{1}{x} \cdot \frac{1}{\ln(10)}.$$

2.6.2 Μονοτονία

Η συνάρτηση $\log(x)$ είναι γνησίως αύξουσα γιατί η παράγωγός της είναι θετική $\forall x \in \mathbb{R}^+$. Συνεπώς, είναι $1-1$.

2.6.3 Γραφική Παράσταση



2.6.4 Εκθετική συνάρτηση - revision

Ορισμός 2.6.2 *Έστω $a \in (1, +\infty)$, τότε η συνάρτηση*

$$f_a : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \text{ με } f_a(x) = a^x = e^{x\ln(a)}$$

*είναι **εκθετική συνάρτηση** με βάση a.*

Η συνάρτηση f_a είναι γνησίως αύξουσα.
Η δε παράγωγός της είναι: $f_a'(x) = \left(e^{x\ln(a)}\right)' = \ln(a) \cdot e^{x\ln(a)} = a^x \cdot \ln(a)$.

Κεφάλαιο 3

Ασκήσεις

1. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x + \dfrac{4}{e^x + 1}$ με το γράφημά της $\mathscr{G}_f$.

   (α′) i. Δείξτε ότι υπάρχει όριο για $x \to +\infty$ (πεπερασμένο ή άπειρο). Να βρεθεί το όριο αυτό.
   ii. Να γίνει το ίδιο με το $-\infty$.

   (β′) Να υπολογισθεί $\forall x \in \mathbb{R}$ το άθροισμα $f(x) + f(-x)$. Πως θα χαρακτηρίζατε το σημείο $A(0, 2)$;

   (γ′) Να μελετηθεί η μονοτονία της $f(x)$.

   (δ′) Δείξτε ότι $\forall m \in \mathbb{R}$ η εξίσωση $f(x) = m$ έχει μια και μοναδική πραγματική ρίζα ρ_m. Για ποιά τιμή του m η $-\rho_m$ είναι ρίζα της $f(x) = m$;

   (ε′) i. Δείξτε ότι $\forall x \in \mathbb{R}$, $f(x) = x + 4 - \dfrac{4e^x}{e^x + 1}$.
   ii. Η ευθεία (ϵ) : $y = x + 4$ είναι πλάγια ασύπτωτη της $f(x)$;
   iii. Βρείτε τη θέση της (ϵ) σχετικά με το γράφημα της $\mathscr{G}_f$.

   (ϛ′) i. Βρείτε ακόμα μία πλάγια ασύμπτωτη (ϵ') της $\mathscr{G}_f$.
   ii. Μελετήστε τη θέση της (ϵ') σχετικά με το γράφημα $\mathscr{G}_f$.

   (ζ′) Βρείτε την εφαπτομένη (ζ) του γραφήματος $\mathscr{G}_f$ στο σημείο M με $x_M = 0$.

   (η′) Χαράξτε τις καμπύλες: $\mathscr{G}_f$, (ϵ), (ϵ') και (ζ).

2. Έστω f_n μια παραγωγίσιμη συνάρτηση στο $\mathbb{R}^*$ ορισμένη από τον τύπο $f_n(x) = \dfrac{e^{nx} - 1}{x}$. Έστω $\mathscr{G}_{f_n}$ η αντίστοιχη καμπύλη $\forall n \in \mathbb{N}^*$.

   (α′) Έστω $g_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ με $g_n(x) = e^{nx}(nx - 1) + 1$, $n \in \mathbb{N}^*$.
   i. Είναι η g_n παραγωγίσιμη; Υπολογίστε την $g_n'(x)$.
   ii. Μελετήστε την μονοτονία της g_n.
   iii. Δείξτε ότι $\forall x \in \mathbb{R} :\ g_n(x) \geq 0$.

   (β′) i. Να βρεθεί το όριο $\lim\limits_{x \to \pm\infty} f_n(x)$.
   ii. Η f_n είναι παραγωγίσιμη; Να υπολίστε την $f_n'(x)$.
   iii. Μελετήστε την μονοτονία της f_n.

(γ′) $\forall n \in \mathbb{N}$ και $x \in \mathbb{R}^*$ θέτω $p_n(x) = f_{n+1} - f_n(x)$. Να βρεθεί το πρόσημο της $p_n(x)$ και την θέση των καμπυλών $\mathscr{G}_{f_n}$ και $\mathscr{G}_{f_{n+1}}$.

(δ′) Ορίζουμε $h_n(x) = f_n(x)$ αν $x \neq 0$ και συνεχή στο $\mathbb{R}$. Να βρείτε αυτή τη συνάρτηση.

(ε′) Να χαραχθούν τα γραφήματα $\mathscr{G}_{f_1}$, $\mathscr{G}_{f_2}$ και $\mathscr{G}_{f_3}$.

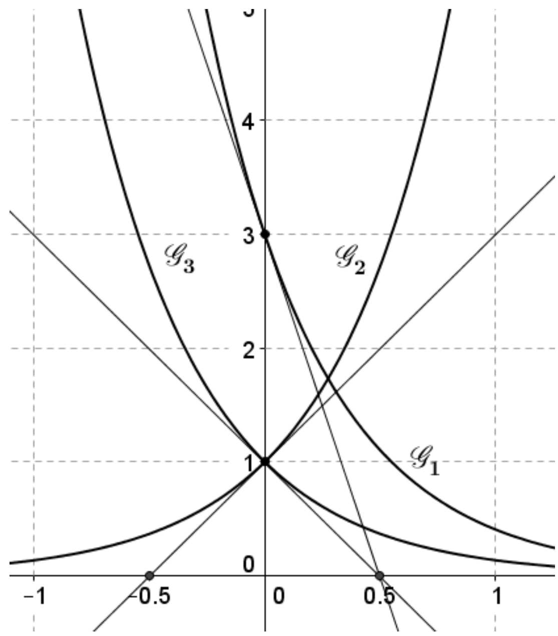
3. Έστω $c, k \in \mathbb{R}^*$ και f μία πραγματική συνάρτηση $f_k(x) = ce^{-x/k}$ με $\mathscr{G}_{f_k}$ το γράφημά της.

(α′) Υποθέτω $c > 0$. Να υπολογίσετε τα όρια: $\lim\limits_{x \to \pm\infty} f_k(x)$.

(β′) Δείξτε ότι η f_k είναι παραγωγίσιμη και να βρείτε την πρώτη παράγωγο f_k', όταν $c > 0$.

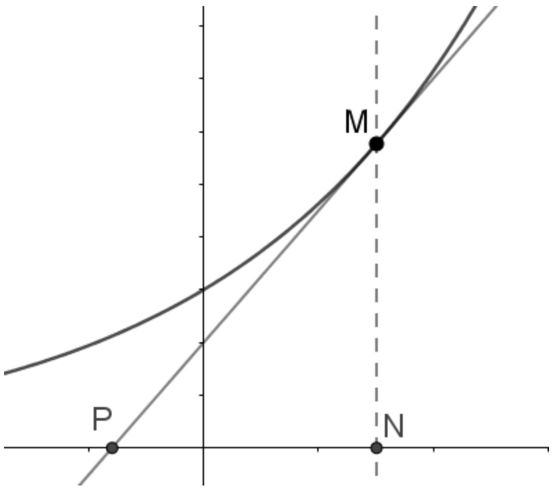
(γ′) Να μελετηθεί η μονοτονία της f_k, όταν $c > 0$.

(δ′) Έστω τα γραφήματα τριών συναρτήσεων του τύπου f_k με τις εφαπτομένες στο σημείο που έχει τετμημένη 0. Να προσδιορίσετε τον τύπο της συνάρτησης f_k που μπορεί να αντιπροσωπεύει κάθε ένα από τα τρία γραφήματα $\mathscr{G}_1$, $\mathscr{G}_2$ και $\mathscr{G}_3$.



(ε′) i. Έστω $a \in \mathbb{R}$. Δείξτε ότι η καμπύλη $\mathscr{G}_k$ στο σημείο M που έχει τετμημένη ίση με a, δέχεται εφαπτομένη που τέμνει τον οριζόντιο άξονα σε ένα σημείο με τετμημένη ίση με $a + k$.

ii. Έστω N η προβολή του σημείου M στον άξονα $x'x$. Δείξτε ότι $\overrightarrow{NP} = k \cdot \overrightarrow{i}$.



Αντίστροφα:

(ϛ′) Έστω g μια πραγματική παραγωγίσιμη συνάρτηση με πεδίο ορισμού όλο το $\mathbb{R}$, έτσι ώστε $g'(x) \neq 0, \forall x \in \mathbb{R}$. Έστω $a \in \mathbb{R}$. Έστω επίσης σημείο M του γραφήματος $\mathscr{G}_g$ με τετατμημένη το σημείο $N = (a, 0)$ και P το σημείο τομής της εφαπτομένης που άγεται από το σημείο M και του οριζόντιου άξονα.

i. Δείξτε ότι το σημείο P είναι το σημείο $\left(a - \dfrac{g(a)}{g'(a)}, 0\right)$.

ii. Αν $\overrightarrow{NP} = k \cdot \overrightarrow{i}$, $k \neq 0$, δείξτε ότι $\forall a \in \mathbb{R}: \; g'(a) = -\dfrac{1}{k} g(a)$.

iii. Να βρείτε την συνάρτηση g.

4. Θέλουμε να ορίσουμε το σύνολο F των παραγωγισίμων συναρτήσεων f για τις οποίες ισχύει

$$\forall x, x' \in D_f : \; f(x) \cdot f(x') = f(x + x') \tag{3.1}$$

(α′) Έστω f ένα στοιχείο του συνόλου F διαφορετικό του 0.

i. Δείξτε ότι $\forall x, \; f(x) \neq 0$.

ii. Υπολογίστε το $f(0)$.

iii. Δείξτε ότι $\forall x, \; f(x) > 0$.

(β′) Έστω $k = f'(0)$. Έστω οι συναρτήσεις g και h ορισμένες στο $\mathbb{R}$ έτσι ώστε για $a \in \mathbb{R}$:

$$g(x) = f(x) \cdot f(a) \text{ και } h(x) = f(x + a), \; \forall x \in \mathbb{R}$$

Έστω $f \in F$ και $f(x) \neq 0, \forall x \in \mathbb{R}$.

i. Δείξτε ότι g και h είναι παραγωγίσιμες.

ii. Υπολογίστε τις $g'(x)$ και $h'(x)$ και δείξτε ότι

$$f'(a) = k \cdot f(a) \tag{3.2}$$

(γ′) Αν f είναι μηδενική. Τότε $f \in F$ και f επαληθεύει την εξίσωση (3.2).

Αντίστροφο:

(δ′) Αν μια συνάρτηση f ορίζεται από την σχέση $f(x) = e^{kx}$, $k \in \mathbb{R}$, είναι στοιχείο της F.

(ε′) Βρείτε την μορφή των συναρτήσεων του F.

5. Να γίνει το γράφημα της συνάρτησης $f(x) = x - 2x \ln\left(1 + \dfrac{1}{x}\right)$.

6. Έστω $a \in \mathbb{R}^+$ και η συνάρτηση f_a ορισμένη στο $(-\infty, -a) \cup (a, +\infty)$ ορισμένη από

$$f_a(x) = \ln \frac{x-a}{x+a}$$

Έστω $\mathscr{G}_{f_a}$ η αντίστοιχη καμπύλη.

(α′) Μελετήστε την συμμετρία της συνάρτησης f_a. Να δώσετε μια γεωμετρική σημασία.

(β′) i. Να βρείτε το όριο (πεπερασμένο ή άπειρο) της f_a δεξιά του a.

ii. Δείξτε ότι υπάρχει το όριο (πεπερασμένο ή άπειρο) της f_a στο $+\infty$ και να βρεθεί το όριο αυτό.

iii. Ποιό είναι το όριο της f_a στο $-a$ και $-\infty$;

(γ′) i. Δείξτε ότι η f_a είναι παραγωγίσιμη και να βρεθεί η παράγωγός της.

ii. Μελετήστε την μονοτονία της f_a.

(δ′) Αν $a = 2$ να χαράξετε την καμπύλη $\mathscr{G}_{f_2}$.

(ε′) Έστω $a > 0$, δείξτε ότι $\forall x \in D_{f_a}$ και $y \neq 0$,

$$y = \ln \frac{x-a}{x+a} \Leftrightarrow x = a\frac{1+e^y}{1-e^y}$$

7. Έστω $f(x) = \ln(x)$ και $A_n(0, n)$, $n \in \mathbb{N}$, σημείο του άξονα $y'y$. Έστω σημείο M του γραφήματος $\mathscr{G}_f$.

(α′) Δείξτε ότι $\forall n \in \mathbb{N}$, $A_nM^2 = x^2 + \big(\ln(x) - n\big)^2$.

(β′) Έστω $g_n(x) = x^2 + \big(\ln(x) - n\big)$, για $x \in (0, +\infty)$.

i. Δείξτε ότι η $g_n(x)$ έχει μια πραγματική ρίζα a_n στο $(0, +\infty)$.

ii. Να βρεθεί το πρόσημο της $g_n(x)$ καθώς το x είναι στο $(0, +\infty)$.

(γ′) Έστω f_n μία συνάρτηση στο $(0, +\infty)$ με $f_n(x) = x^2 + \Big(\ln(x) - n\Big)^2$.

i. Δείξτε ότι $\forall x \in (0, +\infty)$, $f_n'(x) = \dfrac{2g_n(x)}{x}$.

ii. Μελετήστε την μονοτονία της f_n.

iii. $\forall x \in (0, +\infty)$ η $f_n(x)$ έχει ελάχιστο;

iv. Έστω A_nH_n η ελάχιστη απόσταση του A_n από το σημείο M. Δείξτε ότι

$$A_nH_n = a_n\sqrt{1 + a_n^2}$$

(δ′) Έστω (ϵ_n) η εφαπτομένη στην καμπύλη $\mathscr{G}_f$ στο σημείο H_n με τετμημένη a_n.

i. Να βρεθεί το διάνυσμα διεύθυνσης $\overrightarrow{v_n}$ της ευθείας (ϵ_n).

ii. Υπολογίστε το γινόμενο $\overrightarrow{A_nH_n} \cdot \overrightarrow{v_n}$.

iii. Ποια είναι η μεταξύ τους θέση των διανυσμάτων $\overrightarrow{A_nH_n}$ και $\overrightarrow{v_n}$;

8. Έστω $k \in \mathbb{R}$ και η εξίσωση $E_k := \ln(x) = kx$. Ο σκοπός της άσκησης είναι να βρούμε, συναρτήσει του k, τις ρίζες της εξίσωσης E_k.

   Έστω $\mathscr{G}$ η καμπύλη της συνάρτησης $\ln(x)$ και d_k η ευθεία $y = kx$.

   (α΄) i. Τι μπορεί να αναπαριστά γραφικά μια λύση της εξίσωσης E_k;

   ii. Βρείτε την εφαπτομένη της καμπύλης $\mathscr{G}$ στο σημείο με τετμημένη e.

   iii. Να λυθεί η εξίσωση E_0.

   (β΄) Έστω $\boxed{f_k(x) = \ln(x) - kx}$, με $x \in (0, +\infty)$ και $k \in \mathbb{R}^*$.

   i. Να βρεθεί το όριο $\lim\limits_{x\to 0} f_k(x)$.

   ii. Να βρεθεί το όριο $\lim\limits_{x\to +\infty} f_k(x)$, όταν $k > 0$ ή $k < 0$.

   (γ΄) Δείξτε ότι η $f_k'(x)$ έχει το ίδιο πρόσημο με την $1 - kx$ στο $(0, +\infty)$.

   (δ΄) Έστω $\boxed{k < 0}$.

   i. Να μελετηθεί η μονοτονία της $f_k(x)$.

   ii. Δείξτε ότι η εξίσωση E_k έχει μοναδική ρίζα στο $(0, +\infty)$.

   (ε΄) Έστω $\boxed{k > 0}$.

   i. Κατασκευάστε τον πίνακα μεταβολών της f_k και δείξτε ότι η f_k έχει τοπικό μέγιστο στο $(0, +\infty)$.

   ii. Να λυθεί η ανίσωση $-\ln(k) - 1 < 0$. Στην περίπτωση αυτή τι θα μπορούσαμε να πούμε σχετικά με την εξίσωση E_k;

   (ϛ΄) Δείξτε ότι η $E_{1/k}$ έχει μοναδική ρίζα την οποία να βρείτε.

   (ζ΄) Έστω $\boxed{0 < k < \dfrac{1}{e}}$. Βρείτε τον αριθμό των λύσεων.

   (η΄) Βρείτε συναρτήσει του k το πλήθος των ριζών των λύσεων της εξίσωσης E_k.

9. Έστω οι δύο συναρτήσεις: $f(x) = x^n(1-x)^m$ και $g(x) = \ln(f(x)) = \ln(x^n(1-x)^m)$.

   (α΄) Να υπολογισθεί η f' και να γίνει ο πίνακας μεταβολών.

   (β΄) Να υπολογισθεί η g' και να γίνει ο πίνακας μεταβολών.

   (γ΄) Έστω $f(x) = x^3(1-x)^7$ και $g(x) = \ln\left(x^3(1-x)^7\right)$. Να δείξτε ότι υπάχει $x_0 > 0$ έτσι ώστε οι δύο συναρτήσεις παρουσιάζουν μέγιστο στο σημείο αυτό.