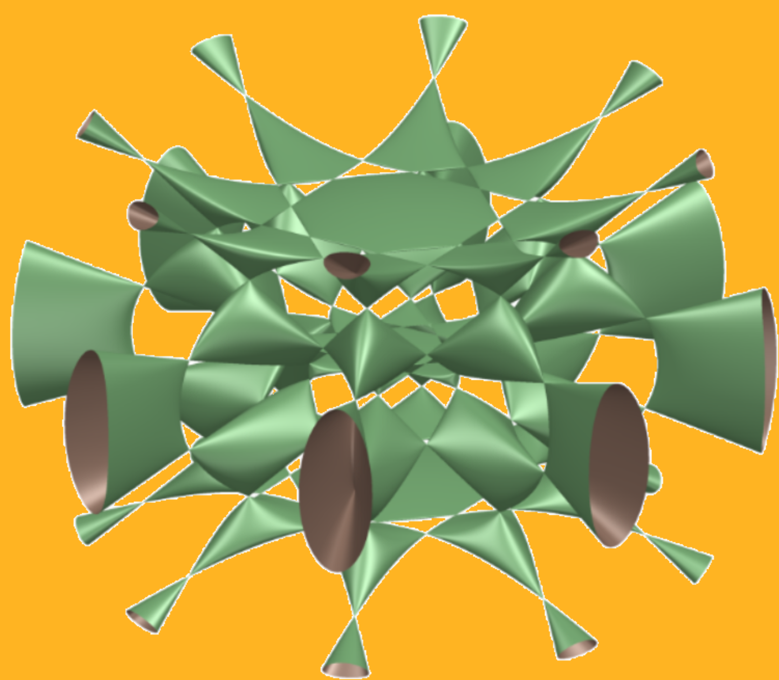
Εισαγωγή στην Άλγεβρα για το Λύκειο



Λυγάτσικας Ζήνων

Πρώην Καθηγητού του Προτύπου Γενικού Λυκείου της Βαρβακείου Σχολής

31 Αυγούστου 2023

Εισαγωγή στην Άλγεβρα για το Λύκειο
Λυγάτσικας Ζήνων
Στοιχειοθεσία LaTeX

Περιεχόμενα

Μέρος I

ΑΛΓΕΒΡΑ

Κεφάλαιο 1

ΕΙΣΑΓΩΓΗ

Τι είναι η **Άλγεβρα**; Θα λέγαμε ότι είναι συνώνυμη του ρήματος *Υπολογίζω*. Με την Άλγεβρα θα μάθουμε να κάνουμε υπολογισμούς με γνώστους και αγνωστούς αριθμούς, θα μάθουμε να κατασκευάζουμε μαθηματικές δομές, να υλοποιούμε τη λεγόμενη Μαθηματική αφαίρεση και να διεκπεραιώνουμε μαθηματικές αποδείξεις.

Εμείς θα ασχοληθούμε με τους στοιχειώδεις συμβολικούς υπολογισμούς, αυτούς τους υπολογισμούς που ο Newton ονόμαζε γενικευμένη αριθμητική. Η μετάβαση από τον αριθμητικό στον αλγεβρικό λογισμό ήταν πραγματικά μια επανάσταση. Το γεγονός του προσδιορισμού μιας άγνωστης μεταβλητής ποσότητας που συμβολίζεται με ένα γράμμα και η οποία συμμετέχει στο λογιστικό μέρος επεκτείνει ριζικά τις δυνατότητες υπολογισμού, όπως αναφέρει ο Γιάννης Χριστιανίδης στην παράγραφο για το έργο του Διόφαντου, δείτε [21] σελίδα 109.

W. Blake, *Isaac Newton*

Ο αλγεβρικός λογισμός δημιουργεί σχέσεις μεταξύ γνωστών και αγνώστων (το *είδος* όπως αναφέρει ο Διόφαντος[1]) και στη συνέχεια υπολογίζει με αυτές τις σχέσεις έως ότου να βρει το επιδιωκόμενο αποτέλεσμα. Αν για παράδειγμα θέλουμε να λύσουμε με Άλγεβρα το εξής πρόβλημα: να βρεθεί ένας αριθμός ο οποίος όταν πολλαπλασιασθεί με το 7 και στο αποτέλεσμα προσθέσουμε το 3 θα πάρουμε 73, θα βρούμε την σχέση των αγνώστων (ο αριθμός x) και γνωστών ποσοτήτων (αυτές είναι οι αριθμοί 7,3 και 73) που δεν είναι άλλη από την γνωστή εξίσωση $7x+3=73$ και με κάποιους συντακτικούς κανόνες θα κάνουμε την λεγόμενη αναγωγή για να βρούμε το αποτέλεσμα που ζητάμε. Σε αντίθεση ο αριθμητικός λογισμός[2] ξεκινά

[1] Δείτε στο [21] σελίδα 107.

[2] Με τον όρο αριθμητικό υπολογισμό εννοούμε τον λογισμό που περιλαμβάνει ιδιότητες και πράξεις με ακεραίους, κλάσματα και πραγματικούς, δυνάμεις αριθμών και ρίζες. Το κεφάλαιο των πραγματικών αριθμών που ακολουθεί περιλαμβάνει στο μεγαλύτερο μέρος του τον αριθμητικό

από το αποτέλεσμα και αντιστρέφοντας τις πράξεις φτάνει στον αρχικό αριθμό. Ο αριθμητικός υπολογισμός προχωρά από τον γνωστό προς τον άγνωστο, κάθε πράξη αποκτά νόημα μέσα στο πλαίσιο που καθορίζει το πρόβλημα. Αυτό όμως δεν μπορεί να γίνει όταν για παράδειγμα ζητάμε να λύσουμε πολυπλοκότερα προβλήματα όπως για παράδειγμα: δύο μαθητές επιλέγουν από κοινού ένα αριθμό. Ο πρώτος πολλαπλασιάζει τον αριθμό με 8 και προσθέτει την μονάδα και ο δεύτερος πολλαπλασιάζει τον ίδιο αριθμό με το 5 και προσθέτει στο αποτέλεσμα το 7. Αν οι δύο μαθητές βρίσκουν τον ίδιο αριθμό, μπορείτε να βρείτε τον κοινό αριθμό που έχουν επιλέξει στην αρχή; Εδώ δεν γνωρίζουμε ούτε τον αρχικό αριθμό ούτε τον αριθμό που φτάσαμε στο τέλος. Στο πρόβλημα αυτό πρέπει να αλλάξει στρατηγική του λογισμού μας και αυτό το δίνει απλόχερα η Άλγεβρα.

Ο αλγεβρικός λογισμός αντλεί την δύναμή του από την ικανότητα να απελευθερώνεται από το εξωτερικό νόημα και να αποδεικνύει τη νομιμότητα των μετασχηματισμών που πραγματοποιούνται, χρησιμοποιώντας τυπικούς κανόνες[3]. Αυτό επιβάλλει μια καθοδήγηση των υπολογισμών μέσα από μία εσωτερική αναγκαιότητα.


René Descartes

Τα παραπάνω μας οδηγούν στο δεύτερο σημείο που θέλουμε να θίξουμε: *την νοημοσύνη* του αλγεβρικού λογισμού. Ο αλγεβρικός λογισμός είναι ένας λογισμός πάνω στις σχέσεις, ωστόσο είναι πολύ εύκολο να χαθείτε στις πράξεις. Μπορείτε να στραφείτε σε γεωμετρικές συνήθως ερμηνείες των εκφράσεων, των μορφών και των σχέσεων που φέρνουν συγκεκριμένες πληροφορίες σχετικά με τα αντικείμενα που ορίζουν και που θα σας οδηγηγούν στην επιδιωκόμενη λύση. Υπάρχουν υποκείμενες ικανότητες οπτικοποίησης αρκετά παρόμοιες με αυτές της γεωμετρίας. Αυτό προϋποθέτει μια επιπλέον τεχνική πολυπλοκότητα. Το να αναπτύξετε αυτή την νοημοσύνη απαιτεί από εσάς μια εργασία υπολογισμού που δεν επισημαίνεται πλήρως στο πρόβλημα. Προσπαθήσαμε με ένα πλήθος ασκήσεων να δείξουμε ότι *η ευφυϊα* του αλγεβρικού λογισμού μπορεί να υποστηριχθεί χρήσιμα με ερμηνείες στο γεωμετρικό πλαίσιο. Δείτε για παράδειγμα την άσκηση 23 στην σελίδα 130 ή την άσκηση 2 στην σελίδα 122. Περισσότερα και καλύτερα παραδείγματα θα δούμε στην Αναλυτική Γεωμετρία.

Στην κουλτούρα μας η είσοδος στην μαθηματική λογική θεωρείται ότι έχει σχέση με τον γεωμετρικό λογισμό. Ίσως γιατί η είσοδος στον αλγεβρικό λογισμό γίνεται με την επίλυση εξισώσεων και ανισοτήτων που με τη σειρά τους σχετίζονται με

λογισμό. Όπου μπορούσαμε να εισάγουμε και τον αλγεβρικό λογισμό το κάναμε. Μεγαλύτερη ελευθερία όμως είχαμε στις ασκήσεις για τον λόγο αυτό θα βρείτε ένα μεγάλο αριθμό από αυτές που λύνονται με αμιγώς αλγεβρικό λογισμό.

[3]Στην Άλγεβρα η μορφή και το περιεχόμενο του υπολογιμού είναι ένα. Στο αλγεβρικό περιβάλλον ενός υπολογισμού η αφαίρεση καθορίζει εκ νέου τον περιβάλλοντα χώρο των αντικειμένων που επισέρχονται στον υπολογισμό.

Κεφάλαιο 2

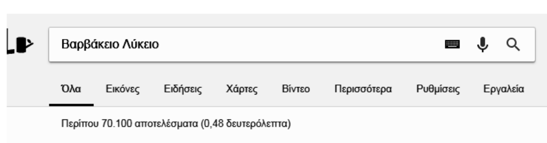
ΒΑΣΙΚΕΣ ΕΝΝΟΙΕΣ

2.1 ΣΤΟΙΧΕΙΑ ΘΕΩΡΙΑΣ ΣΥΝΟΛΩΝ

Την έννοια του συνόλου τη γνωρίζετε από το σχολικό βιβλίο της Γ Γυμνασίου. Καλό θα είναι να ξαναδείτε το κεφάλαιο §5.1, σελ. 160. Το σύνολο είχε προσδιορισθεί (δεν δίνεται ακριβής ορισμός) σαν μια συλλογή από αντικείμενα σε ομάδες ή κατηγορίες τα οποία αντικείμενα διακρίνονται μεταξύ τους με απόλυτη σαφήνεια. Εδώ θα δούμε εδώ κάτι ποιο τεχνικό. Σήμερα, ο ορισμός του συνόλου που έδωσε ο Cantor[1], είναι αντιφατικός, δείτε για παράδειγμα την άσκηση 3, σελίδα 23. Έτσι, θα υπερβούμε για λίγο τις σχολικές μας γνώσεις πηγαίνοντας ένα βήμα παραπέρα.

Ας προσπαθήσουμε να περιγράψουμε όσο ποιο γλαφυρά μπορούμε την έννοια.

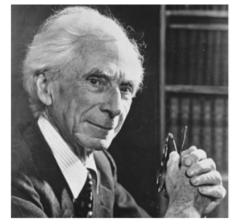
Ας υποθέσουμε ότι θέλετε να βρείτε πληροφορίες για το Βαρβάκειο Λύκειο στο internet. Πηγαίνετε στη μηχανή αναζήτησης Google και δηλώνετε το λήμμα που ζητάτε.



Στο κάτω μέρος εμφανίζει τον αριθμό των αποτελεσμάτων, 185.000, που είναι ο αριθμός των ιστοσελίδων που έχουν ανάρτηση με αυτό το λήμμα. Τα 185.000 στοιχεία είναι ένα σύνολο ιστοσελίδων που έχουν ένα χαρακτηριστικό, περιέχουν τις δυο λέξεις *Βαρβάκειο Λύκειο.*

[1] Μια παράφραση ποιο πετυχημένη του ορισμού του βιβλίου της Γ Γυμνασίου είναι η εξής: σύνολο είναι μια συλλογή αντικειμένων σαφώς διαχωρισμένων και διακεκριμένων μεταξύ τους, που ικανοποιούν μια κοινή ιδιότητα.

2.3 ΛΟΓΙΚΟΙ ΣΥΝΔΕΣΜΟΙ



Bertant Russell

Οι κανόνες της Λογικής καθορίζουν τη νομιμότητα των μαθηματικών συλλογισμών. Για παράδειγμα, οι συμπερασματικοί κανόνες της Λογικής μας βοηθάν να κατανοήσουμε πως και γιατί μερικά αποδεικτικά εργαλεία είναι λογικά έγκυρα, όπως η απαγωγή σε άτοπο που χρησιμοποιούμε στην απόδειξη της αρρητότητας του $\sqrt{2}$. Η Λογική είναι η βάση της τεχνιτής ευφυίας, της θεωρίας παιγνίων και του αυτόματου λογισμού - του λογισμού που εκτελείται από μια υπολογιστική μηχανή. Έχει εφαρμογές στο σχεδιασμό μηχανών υπολογισμού και σε όλους τους κλάδους της επιστήμης των υπολογιστών.

T. Coquand
Σχεδίασε και υλοποίησε το λογισμικό Coq

Για να κατανοήσουμε μια πρόταση στα Μαθηματικά θα χρειαστεί πρωτίστως να κατανοήσουμε τις Μαθηματικές έννοιες καθώς και τη πολυπλοκότητα του μαθηματικού αντικειμένου που βρίσκονται στη πρόταση. Πολλές φορές οι Μαθηματικές διεργασίες που θα απαιτηθούν για την ολοκήρωση της απόδειξης της πρότασης μπορεί να μην έχουν σχέση με τη Λογική. Η Λογική πρόλα αυτά θα σταθεί αρωγός στο να καταλάβουμε τι κάνουμε όταν κάνουμε Μαθηματικά. Έτσι, θα μας βοηθήσει να κατανοήσουμε πως θα σχηματίσουμε έγκυρα επιχειρήματα, αν η σειρά των επιχειρημάτων είναι λογικώς ορθή και συχνά θα ασκήσει έναν *έλεγχο* στην ορθότητα των συλλογισμών. Αυτό μπορεί να μην είναι πολύ χρήσιμο στην καθαρή Μαθηματική δημιουργία, παίζει όμως σημαντικό ρόλο στις επιστήμες της Πληροφορικής που σχετίζονται με τα Μαθηματικά, όπως τα συστήματα αυτοματισμού για παράδειγμα το Coq.

Μια Μαθηματική απόδειξη, όπως αυτή διατυπώνεται γραπτώς μέχρι σήμερα, είναι επικεντρωμένη σε εννοιολογικές διευκρινήσεις και αλγεβρικούς ή αριθμητικούς υπολογισμούς. Σπάνια μια απόδειξη θα δείχνει τη Λογική της εγκυρότητα και αυτό συμβαίνει για λόγους πρακτικούς.

Τα αντικείμενα της Λογικής είναι οι προτάσεις. Μια πρόταση στη Λογική είναι μια αποφαντική πρόταση. Μια πρόταση δηλαδή που δίνει μια πληροφορία. Για παράδειγμα η πρόταση: *Σήμερα είναι Τρίτη* είναι πρόταση, ενώ η πρόταση: *πως είσαι;* δεν είναι πρόταση της Μαθηματικής Λογικής.

Οι προτάσεις μπορεί να συνδέονται μεταξύ τους με συνδέσμους. Οι σύνδεσμοι αυτοί μπορεί να είναι οι εξής: άρνηση, σύζευξη, διάζευξη, συνεπαγωγή. Υπάρχουν και άλλοι αλλά δεν θα μας αποσχολήσουν εδώ.

2.3.1 Άρνηση

Η άρνηση είναι ένας μονομελής σύνδεσμος και απεικονίζεται συμβολικά με το σύμβολο $\neg$. Προφανώς, αν μια πρόταση p είναι αληθής η άρνησή της είναι ψευδής και το αντίστροφο. Ο πίνακας αληθείας είναι:

p	**¬p**
Α	Ψ
Ψ	Α

2.3.2 Σύζευξη

Η σύζευξη αντιστοιχεί στον σύνδεσμο **και**. Αν έχουμε δύο προτάσεις p και q οι οποίες παίρνουν δύο τιμές αληθείας είναι Αληθής (Α) ή Ψευδής (Ψ), τότε, η σύζευξη $\wedge$ είναι αληθής όταν και οι δύο προτάσεις είναι αληθείς. Ο πίνακας αληθείας είναι:

p	**q**	**p ∧ q**
Α	Α	Α
Α	Ψ	Ψ
Ψ	Α	Ψ
Ψ	Ψ	Ψ

2.3.3 Διάζευξη

Η διάζευξη αντιστοιχεί στον σύνδεσμο **ή**. Αν έχουμε δύο προτάσεις p και q οι οποίες παίρνουν δύο τιμές αληθείας Αληθής (Α) ή Ψευδής (Ψ), τότε, η διάζευξη $\vee$ είναι ψευδής όταν και οι δύο προτάσεις είναι ψευδείς. Ο πίνακας αληθείας είναι:

p	**q**	**p ∨ q**
Α	Α	Α
Α	Ψ	Α
Ψ	Α	Α
Ψ	Ψ	Ψ

2.3.4 Αποκλειστική Διάζευξη

Η αποκλειστική διάζευξη αντιστοιχεί στον σύνδεσμο **είτε**. Αν έχουμε δύο προτάσεις p και q οι οποίες παίρνουν δύο τιμές αληθείας Αληθής (Α) ή Ψευδής (Ψ), τότε, η αποκλειστική διάζευξη $\veebar$ είναι αληθής όταν και μία εκ των δύο προτάσεων είναι αληθής. Ο πίνακας αληθείας είναι:

p	q	$\mathbf{p \veebar q}$
Α	Α	Ψ
Α	Ψ	Α
Ψ	Α	Α
Ψ	Ψ	Ψ

2.3.5 Συνεπαγωγή

Η συνεπαγωγή αντιστοιχεί στην έκφραση **αν ... τότε ...** και το αντίστοιχο σύμβολο είναι $\Rightarrow$. Μια πρόταση που συνδέει δύο απλές προτάσεις με συνεπαγωγή, $p \Rightarrow q$, θα τη λέμε για συντομία **συμπερασματική πρόταση**. Η πρόταση p λέγεται **υπόθεση** και η q **συμπέρασμα**. Αν έχουμε δύο προτάσεις p και q συνεπαγωγή $p \Rightarrow q$ είναι ψευδής όταν p είναι αληθής από αληθή πρόταση τουλάχιστον είτε και οι δυο προτάσεων είναι αληθείς είτε η q είναι αληθής. Ο πίνακας αληθείας είναι:

p	q	$\mathbf{p \Rightarrow q}$
Α	Α	Α
Α	Ψ	Ψ
Ψ	Α	Α
Ψ	Ψ	Α

Κάθε πρόταση της μορφής $p \Rightarrow q$ μπορεί να διαβασθεί επίσης ως εξής:

Αν ισχύει η p τότε q	p συνεπάγεται q
Αν p, q	Η p είναι αρκετή για την q
Η p είναι αναγκαία συνθήκη για τη q	Η q ακολουθεί από την p
q όταν p	Ικανή συνθήκη για τη q είναι η p

Η διπλή συνεπαγωγή αντιστοιχεί στην έκφραση[3] **αν και μόνο αν** και το αντίστοιχο σύμβολο είναι $\Leftrightarrow$. Αν έχουμε δύο προτάσεις p και q η διπλή συνεπαγωγή $p \Leftrightarrow q$ είναι αληθής όταν και οι δυο προτάσεις είναι είτε αληθείς είτε ψευδείς. Προφανώς η διπλή συνεπαγωγή $p \Leftrightarrow q$ είναι σύζευξη δυο συνεπαγωγών $(p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow p)$. Οι δυο αυτές γραφές είναι ισοδύναμες.

p	q	$\mathbf{p \Leftrightarrow q}$
Α	Α	Α
Α	Ψ	Ψ
Ψ	Α	Ψ
Ψ	Ψ	Α

[3] Στη θέση του " αν και μόνο αν " γράφουμε πολλές φορές και " ανν ".

Ορισμός 2.3.1 *Ένας **τύπος** (ή προτασιακός τύπος ή σκέτο πρόταση αν δεν αλλοιώνεται η σημασία) είναι δηλαδή μια πρόταση αποτελούμενη από άλλες προτάσεις και λογικούς συνδέσμους.*

Ορισμός 2.3.2 *Δύο τύποι με την ίδια τιμή αληθείας για τις ίδιες τιμές αληθείας των επί μέρους προτάσεων, θα τους λέμε (λογικώς) **ισοδύναμους**.*

Ορισμός 2.3.3 *Λέμε ότι ένας τύπος είναι αντίφαση αν και μόνο αν λαμβάνει τιμή αληθείας Ψευδή για οποιεσδήποτε τιμές αληθείας των προτάσεών του.*

Για παράδειγμα ο τύπος $p \wedge \neg p$, έχει πίνακα αληθείας:

p	$\neg p$	$p \wedge \neg p$
Α	Ψ	Ψ
Ψ	Α	Ψ

Υπάρχουν προτάσεις στις οποίες αποδίδουμε στο υποκείμενο μια ιδιότητα. Για παράδειγμα στην έκφραση $x > 3$ αποδίδουμε στο υποκείμενο x την ιδιότητα να είναι μεγαλύτερο του 3. Η έκφραση $x > 3$ έχει δύο μέρη: το πρώτο μέρος, η μεταβλητή x, είναι το υποκείμενο και το δεύτερο μέρος, το **κατηγόρημα** που είναι μια ιδιότητα του υποκειμένου. Συμβολίζουμε συνήθως την έκφραση $x > 3$ με το συναρτησοειδές $p(x)$:

$$p(x) := (x > 3)$$

όπου p είναι το κατηγόρημα $\cdots > 3$ και η x είναι μια εξαρτημένη μεταβλητή. Η έκφραση $p(x)$ ονομάζεται **τύπος** ή **προτασιακή συνάρτηση** ή απλά πρόταση, p του x. Το σύνολο των τιμών της μεταβλητής x ονομάζεται **Πεδίο Ορισμού** ή **Σύνολο Αναφοράς** της πρότασης p. Στη συνέχεια θα ονομάζουμε την προτασιακή συνάρτηση $p(x)$ απλά πρόταση, χωρίς να χάνουμε τίποτα από την ακρίβεια του αποδιδόμενου νοήματος. Όταν η μεταβλητή x πάρει μια συγκεκριμένη τιμή η προτασιακή συνάρτηση $p(x)$ γίνεται μια πρόταση είτε αληθής είτε ψευδής. Για παράδειγμα η πρόταση $p(5)$ είναι αληθής, ενώ η $p(1)$ ψευδής.

***Παράδειγμα* 2.3.1** Η πρόταση

αν x άρτιος φυσικός αριθμός τότε ο x διαιρείται με το 2

είναι σύνθετη πρόταση. Αποτελείται από 2 απλούστερες προτάσεις[4] τις:

- $p(x) := (x$ είναι άρτιος φυσικός αριθμός$)$

[4] Το σύμβολο := στην πρόταση $p := (\ldots)$ **δηλώνει ότι από εδώ και στο εξής** το σύμβολο p θα **αντικαθιστά συμβολικά τη πρόταση μέσα στην παρένθεση**. Το σύμβολο = έχει εντελώς άλλο νόημα και δηλώνει μια σχέση μεταξύ αντικειμένων.

- $q(x) := (x$ διαιρείται με το $2)$

Η αρχική σύνθετη πρόταση μπορεί να γραφεί συμβολικά $p(x) \Rightarrow q(x)$. Καταχρηστικά λέμε με ένα όνομα τις $p(x)$, $q(x)$ και $p \Rightarrow q$, προτάσεις. Εκεί που ενδεχομένως υπάρχει πρόβλημα σύγχυσης θα τις ξεχωρίζουμε σαν απλές και σύνθετες.

Να καθορίστε τη τιμή αληθείας των παρακάτω προτάσεων:

1. $5 \leq 12$.

2. Ο 2 είναι πρώτος αριθμός και ο 2 είναι πρώτος αριθμός.

3. Αν ο 3 είναι φυσικός αριθμός τότε ο 3 είναι άρτιος.

4. Αν ο 5 είναι άρτιος τότε ο 4 είναι άρτιος.

5. Αν $\alpha = 0 \vee \beta = 0$ τότε $\alpha \cdot \beta \neq 0$.

6. $5 > 10$ και $\alpha = 0 \vee \alpha \neq 0$.

Απάντηση:

1. Η σύνθετη πρόταση εμπεριέχει δύο απλούστερες προτάσεις: την $p := (5 < 12)$ και την πρόταση $q := (5 = 12)$, Έτσι, η σύνθετη πρόταση μπορεί να γραφεί στη συμβολική γραφή σαν:
$$(5 < 12) \vee (5 = 12) \text{ ή } p \vee q$$
Η πρόταση $p := (5 < 12)$ είναι αληθής ενώ η πρόταση $q := (5 = 12)$ είναι ψευδής, η διάζευξη όπως προκύπτει από τον αντίστοιχο πίνακα, είναι αληθής.

2. Η πρόταση $p :=$ (2 είναι πρώτος) είναι αληθής, Άρα η σύζευξη $p \wedge p$ είναι αληθής.

3. Η πρόταση $p :=$ (3 είναι φυσικός) είναι αληθής και η πρόταση $q :=$ (3 είναι άρτιος) είναι ψευδής, τότε η συνεπαγωγή, $p \Rightarrow q$, είναι ψευδής.

4. Η πρόταση $p :=$ (5 είναι άρτιος) είναι ψευδής, ενώ η $q :=$ (4 είναι άρτιος) είναι αληθής, τότε η συνεπαγωγή, $p \Rightarrow q$, είναι αληθής.

5. Έστω η πρόταση $p := (\alpha = 0) \vee (\beta = 0)$ και η πρόταση $q := (\alpha \cdot \beta \neq 0)$. Αν η πρόταση p είναι αληθής, τότε ένας τουλάχιστον εν των α και β είναι ίσος με 0. Άρα, η πρόταση είναι ψευδής. Επομένως και η συνεπαγωγή $p \Rightarrow q$ είναι ψευδής.

6. Η $p := (5 > 10)$ είναι ψευδής, ενώ η $q := (\alpha = 0) \vee (\alpha \neq 0)$ είναι αληθής για οποιοδήποτε αριθμό α. Άρα, η σύζευξη, $p \wedge q$, είναι ψευδής.

■

2.4 ΜΕΘΟΔΟΙ ΑΠΟΔΕΙΞΗΣ

Jaques Herbrand. Εισήγαγε τις αναδρομικές συναρτήσεις, βασικό εργαλείο στη θεωρία αποδείξεων.

Η λέξη *απόδειξη* έχει διαφορετική σημασία στις άλλες επιστήμες εκτός της Μαθηματικής. Η Βιολογία για παράδειγμα καταλαβαίνει ένα σύνολο πειραματικών δεδομένων που επιβεβαιώνουν κάποιες υποθέσεις, ενώ η Κοινωνιολογία και η Ψυχολογία ονομάζει απόδειξη το αποτέλεσμα μιας έρευνας.

Δεν υπάρχει ορισμός της απόδειξης στα μαθηματικά, αν εξαιρέσουμε την Θεωρία της Απόδειξης (μτφρ. Proof Theory), η οποία εξετάζει τις αποδείξεις σαν τυπικά μαθηματικά αντικείμενα.

Θα δούμε εδώ κάποια παραδείγματα μεθόδων απόδειξης: την άμεση απόδειξη, την έμμεση απόδειξη, την απόδειξη με χρήση αντιπαραδείγματος, την απόδειξη ισοδυναμιών και τη μαθηματική επαγωγή.

Η απόδειξη χρησιμοποιείται για να καταδείξουμε γιατί και πώς μια πρόταση είναι αληθής ή ψευδής καθώς και γιατί η προτεινόμενη λύση στο πρόβλημα είναι όντως λύση του προβλήματος.

Τα μαθηματικά χρησιμοποιούν μια ιεραρχία προτάσεων για να δομήσουν ένα παραγωγικό συλλογισμό. Η ιεραρχία των μαθηματικών αυτών προτάσεων περιλαμβάνει:

1. **Τα Αξιώματα**: είναι προτάσεις που θεωρούμε προφανή την αλήθεια τους χωρίς να χρειάζεται επαλήθευση. Στο έργο του ο Ευκλείδης θεμελιωσε τη θεωρία του πάνω στα αξιώματα. Για παράδειγμα, *από σημείο εκτός ευθείας μια και μόνο μια ευθεία παράλληλος προς την ευθεία άγεται.* Χάρη στα αξιώματα έγραψε δεκατρία βιβλία που συνθέτουν όλη τη μαθηματική γνώση της εποχής του. Από τα αξιώματα αυτά παρήγαγε πολλές νέες προτάσεις όπως ότι *η εξωτερική γωνία ενός τριγώνου είναι ίση με το άθροισμα των δύο απέναντι εσωτερικών γωνιών.*

2. **Τα Θεωρήματα:** είναι προτάσεις που ζητάνε να αποδείξουμε κάτι. Για παράδειγμα, το Πυθαγώρειο θεώρημα.

3. **Τα Πορίσματα:** είναι προτάσεις που μας προτρέπουν να βρούμε μια σχέση ανάμεσα σε αντικείμενα που έχουν κοινή ιδιότητα. Για παράδειγμα, *η διχοτόμος της κορυφής ισοσκελούς τριγώνου είναι ύψος και διάμεσος.*

4. **Τα Λήμματα:** είναι βοηθητικές προτάσεις για μια απόδειξη. Για παράδειγμα, η πρόταση: *για όλους τους φυσικούς αριθμούς n αν n^2 είναι άρτιος τότε και ο n είναι άρτιος*, είναι λήμμα στο θεώρημα ότι *ο αριθμός $\sqrt{2}$ είναι άρρητος.*

5. **Ένα Πρόβλημα**: είναι μια πρόταση που μας προτείνει να κατασκευάσουμε κάτι. Για παράδειγμα, *σε δοθέντα κύκλο να εγγράψετε ένα κανονικό πεντάγωνο.*

2.4.1 Άμεση απόδειξη

Μια **άμεση ή ευθεία απόδειξη** της πρότασης q από ένα σύνολο προτάσεων/υποθέσεων P είναι μια πεπερασμένη ακολουθία προτάσεων

$$s_1 \Rightarrow \cdots \Rightarrow s_n \Rightarrow q \tag{2.4}$$

έτσι ώστε κάθε s_n είναι είτε ένα αξίωμα είτε μια εκ των προτάσεων/υποθέσεων του συνόλου P είτε μια ήδη αποδειγμένα αληθής πρόταση είτε ένα ορισμός είτε το αποτέλεσμα ενός συμπερασματικού κανόνα εφαρμοσμένου στα προηγούμενα βήματα της απόδειξης. Το αποτέλεσμα αυτής της συμερασματικής ακολουθίας προτάσεων (η τελευταία στη σειρά πρόταση) είναι η ζητούμενη πρόταση q.

***Παράδειγμα* 2.4.1** Δείξτε ότι αν n περιττός ακέραιος, τότε n^2 είναι επίσης περιττός.

Απάντηση: Η πρόταση του συμπεράσματος είναι η: $\forall n\big(p(n) \Rightarrow p(n^2)\big)$ όπου $p(n) :=$ n περιττός.

Θα χρησιμοποιήσουμε καθολικό προσδιορισμό για την απόδειξη υποθέτοντας ότι n είναι ένας τυχαίος περιττός. Υπάρχει τότε ακέραιος k έτσι ώστε $n = 2k + 1$. Τότε,

$$n^2 = (2k+1)^2 \Rightarrow n^2 = 4k^2 + 4k + 1 \Rightarrow n^2 = 2(2k^2 + 2k) + 1$$

δηλαδή το n^2 είναι περιττός. ■

***Παράδειγμα* 2.4.2** Το γινόμενο δυο περιττών ακεραίων είναι περιττός.

Απόδειξη: Έστω $p(n) := n$ περιττός, τότε η πρόταση παίρνει τη μορφή $\forall n \forall m\big(p(n) \wedge p(m)\big) \Rightarrow p(nm)$.

Αν n και m είναι δυο περιττοί τότε υπάρχουν ακέραιοι k και λ έτσι ώστε $n = 2k + 1$ και $m = 2\lambda + 1$ και

$$nm = (2k+1)(2\lambda+1) \Rightarrow nm = 4k\lambda + 2k + 2\lambda + 1 \Rightarrow nm = 2(2k\lambda + k + \lambda) + 1$$

Άρα, nm είναι περιττός ακέραιος. ■

2.4.4 Απόδειξη ισοδυναμιών

Έστω A και B δύο προτάσεις. Αν η συνεπαγωγές $A \Rightarrow B$ και $B \Rightarrow A$ είναι και οι δύο αληθείς, γράφουμε:

$$A \Longleftrightarrow B$$

και διαβάζουμε A **αν και μόνο αν** B ή A **ανν** B και λέμε ότι οι δύο προτάσεις A και B είναι **ισοδύναμες**. Για παράδειγμα:

$$x^2 = 1 \Leftrightarrow x = 1 \vee x = -1$$

Οι παρακάτω προτάσεις είναι επίσης ισοδυναμίες:

Q_1 : Το τρίγωνο $AB\Gamma$ είναι ισοσκελές με βάση τη $B\Gamma$ ανν η γωνία B είναι ίση με τη γωνία Γ.

Q_2 : $\dfrac{x}{2} = \dfrac{3}{7}$ ανν $x = \dfrac{6}{7}$.

Η πρόταση $x^2 = 9 \Leftrightarrow x = 3$ δεν είναι αληθής, γιατί ενώ η $x = 3 \Rightarrow x^2 = 9$ η $x^2 = 9$ δεν συνεπάγεται μόνο ότι $x = 3$ αλλά και ότι $x = -3$.

Άρα, όταν θέλουμε να δείξουμε μια ισοδυναμία $A \Leftrightarrow B$ πρέπει να δείξουμε ότι

$$A \Rightarrow B \wedge B \Rightarrow A$$

2.4.5 Μαθηματική Επαγωγή

F. Maurolicus

Η πρώτη γνωστή ιστορία για τη χρήση της μαθηματικής επαγωγής βρίσκεται το 16ο αιώνα σε ένα έργο του έλληνα μαθηματικού Φραγκίσκου Μαυρόλικου (1494 - 1575) ο οποίος ζούσε στην Ιταλία. Στο βιβλίο του Arithmeticorum Libri Duo, παρουσιάζει ιδιότητες των ακεραίων μαζί με τις αποδείξεις τους.

Η εισαγωγή της μαθηματικής επαγωγής γίνεται στην απόδειξη της πρότασης ότι το άθροισμα n περιττών ακεραίων είναι ίσο με n^2. Το όνομα Μαθηματική επαγωγή, οφείλεται στον Augustus De Morgan.

Στη φιλοσοφία και τις εμπειρικές επιστήμες ο όρος επαγωγή χρησιμοποιείται για να περιγράψει τη διαδικασία διατύπωσης γενικών κανόνων από ειδικές περιπτώσεις. Στα μαθηματικά ο όρος μαθηματική επαγωγή αποτελεί μια αυθεντική περίπτωση μαθηματικής απόδειξης. Όταν το 1656 ο John Wallis στο έργο του Arithmetica

3.2 ΤΑ ΣΥΝΟΛΑ ΑΡΙΘΜΩΝ

3.2.1 Οι Φυσικοί Αριθμοί - $\mathbb{N}$:

Οι φυσικοί είναι οι αριθμοί που έχουμε κατασκευάσει στο πρώτο παράδειγμα της έννοιας του συνόλου, δες σελίδα 2. Πρόκειται για το σύνολο που έχει σαν αρχικά στοιχεία το 0 και το πρώτο στην τάξη στοιχείο το 1. Ο αλγόριθμος παραγωγής μπορεί να παράγει τον αμέσως επόμενο φυσικό σύμφωνα με τη γνωστή μας ισότητα: Επόμενος = Προηγούμενος $+1$. Έτσι, οι φυσικοί αριθμοί είναι οι:

$$\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, \dots\}$$

3.2.2 Ακέραιοι Αριθμοί - $\mathbb{Z}$:

Παρατηρείστε ότι μορείτε να βρείτε έναν φυσικό αριθμό x έτσι ώστε $x+5 = 10$ ενώ ένας τέτοιος φυσικός αριθμός δεν υπάρχει έτσι ώστε $x + 10 = 5$. Λέμε τότε ότι η **αφαίρεση δεν είναι κλειστή πράξη** στο $\mathbb{N}$!

Για να γίνει κλειστή η αφαίρεση, να δίνει δηλαδή πάντα αριθμό μέσα στο σύνολο, πρέπει να μεγαλώσουμε το σύνολο των φυσικών προσθέτοντας τους αρνητικούς ακεραίους. Η μηχανή που παράγει του ακεραίους θα είναι λοιπόν η ίδια με αυτήν που παράγει το $\mathbb{N}$, μόνο που στην έξοδο θα προσάπτει σε κάθε αριθμό ένα από τα πρόσημα $+$ ή $-$, σύμφωνα με κάποιον κανόνα.

Έτσι, οι ακέραιοι αριθμοί είναι οι:

$$\mathbb{Z} = \{0, \pm1, \pm2, \pm3, \pm4, \pm5, \dots\}$$

Επίσης ισχύει: $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z}$.

3.2.3 Ρητοί Αριθμοί - $\mathbb{Q}$:

Παρατηρείστε ότι στους ακεραίους η **διαίρεση δεν είναι κλειστή πράξη,** για παράδειγμα ενώ μπορούμε να βρούμε ακέραιο αριθμό x έτσι ώστε $x/2 = 4$, δεν υπάρχει όμως ακέραιος τέτοιος ώστε $2/x = 4$. Και στην περίπτωση αυτή θα προεκτείνουμε το σύνολο των ακεραίων δημιουργώντας ένα μεγαλύτερο σύνολο τους ρητούς αριθμούς ή τα κλάσματα όπως έχουμε επίσης μάθει να τα λέμε.

Οι ρητοί αριθμοί λοιπόν είναι οι:

$$\mathbb{Q} = \left\{x/x = \frac{n}{m},\ n \in \mathbb{Z}\ \&\ m \in \mathbb{Z}^*\right\}$$

Για να φανταστούμε τη μηχανική αναπαραγωγή των στοιχείων του συνόλου $\mathbb{Q}$, θα πρέπει να εισάγουμε στην είσοδο της μηχανής ένα ζεύγος ακεραίων (n, m) με $m \neq 0$, και αυτομάτως στην έξοδο θα παράγεται το κλάσμα $\frac{n}{m}$. Αλλά στην έξοδο ο ελεκτής πρέπει να ελέγχει την ισότητα των παραγομένων στοιχείων. Δύο καλά ορισμένα κλάσματα $\frac{n_1}{m_1}$ και $\frac{n_2}{m_2}$ είναι ίσα αν $n_1 \cdot m_2 = n_2 \cdot m_1$[1]. Άρα, πρέπει να μην επιτρέπει την έξοδο στοιχείων $\frac{n}{m}$ τέτοια ώστε ο ΜΚΔ $(n, m) \neq 1$! Για τον λόγο αυτό δεχόμαστε ότι όλα τα κλάσματα είναι ανάγωγα. Άρα, όταν δίνουμε ρητό της μορφής $\frac{n}{m}$, εννοούμε πάντα ότι $(n, m) \neq 1$. Αυτό μπορείτε να δείτε σε πολλά βιβλία όταν αναφέρουν ότι κάθε ρητός αριθμός είναι μια κλάση. Για παράδειγμα, ο ρητός $\frac{1}{2}$ είναι μια κλάση (μια ολότητα) της μορφής

$$\frac{1}{2} \overset{Def}{=} \left[\frac{1}{2}\right] := \left\{\frac{2}{4}, \frac{3}{6}, \frac{4}{8}, \frac{5}{10}, \ldots, \frac{50000}{100000}, \ldots, \right\}$$

Ισχύει: $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q}$.

Οι δεκαδικοί αριθμοί είναι αριθμοί που χωρίζονται σε δύο μέρη με μια τελεία (ή κόμμα), το αριστερό μέλος λέγεται ακέραιο και το δεξί δεκαδικό, για παράδειγμα ο 3.0345689:

$$\underbrace{3}_{\text{ακέραιο μέρος}} . \underbrace{0345689\ldots}_{\text{δεκαδικό μέρος}}$$

Οι δεκαδικοί αριθμοί είναι ένα γνήσιο υποσύνολο του συνόλου των ρητών $\mathbb{Q}$. Ένας αριθμός λέγεται δεκαδικός αν είναι της μορφής

$$\frac{a}{10^n}, \text{ με } a \in \mathbb{Z} \wedge n \in \mathbb{N}$$

Ο αριθμός 6.002 είναι δεκαδικός γιατί $6.002 = \frac{6002}{10^3}$ με $a = 6002$ και $n = 3$, ο -5.13 γράφεται $-\frac{513}{10^2}$ με $a = -513$ και $n = 2$.

Στους ρητούς αριθμούς συμπεριλαμβάνονται και οι περιοδικοί, για παράδειγμα:

$$\frac{1}{3} \approx 0.\underbrace{333\ldots}_{\text{περίοδος } 1}$$

$$\frac{7}{11} \approx 0.\underbrace{63636363\ldots}_{\text{περίοδος } 2}$$

[1] Ο ορισμός αυτός της ισότητας δύο κλασμάτων είναι η αφαίρεση του ορισμού της ισότητας κλασμάτων που γνωρίσατε μέχρι σήμερα. Για παράδειγμα, θα δικαιολογούσατε, χωρίς αυτόν τον ορισμό της ισότητας, το ότι τα δύο κλάσματα $\frac{-3}{5}$ και $\frac{3}{-5}$ είναι ίσα σαν το ίδιο μέρος μιας ολότητας;

3.2.4 Άρρητοι Αριθμοί - $\mathbb{Q}_a$:

Παρατηρείστε ότι στους ρητούς η μονομελής πράξη $\sqrt{\cdot}$ δεν είναι **κλειστή πράξη.** Για παράδειγμα, ενώ $\sqrt{4} = 2 \in \mathbb{Q}$ αντίθετα ο αριθμός $\sqrt{2}$, δεν είναι ρητός[2]! Και στην περίπτωση αυτή για να καλύψουμε την ατέλεια θα δημιουργήσουμε το σύνολο των αρρητών αριθμών το οποίο όμως δεν είναι επέκταση του συνόλου των ρητών αριθμών!

Συμβολικά το σύνολο των αρρήτων αριθμών θα μπορούσε να περιγραφεί ως εξής:

$$\mathbb{Q}_a = \left\{ x/x : \neg\Big(\exists \ (n \in \mathbb{Z} \ \wedge \ m \in \mathbb{Z}^*) \ \wedge \ x = \frac{n}{m} \Big) \right\}$$

Ισχύει επίσης: $\mathbb{N} \cap \mathbb{Q}_\mathbf{a} = \mathbb{Z} \cap \mathbb{Q}_\mathbf{a} = \mathbb{Q} \cap \mathbb{Q}_\mathbf{a} = \emptyset$.

Ένας άρρητος αριθμός μπορεί να γραφεί σαν δεκαδικός με άπειρα δεκαδικά ψηφία αλλά όχι περιοδικά, για παράδειγμα:

$$\sqrt{2} \approx 1.4142135623730950488016887242096\ldots$$

3.2.5 Οι Πραγματικοί Αριθμοί - $\mathbb{R}$:

Οι πραγματικοί αριθμοί είναι οι αριθμοί του πραγματικού μας φυσικού χώρου. Είναι η ένωση των ρητών και αρρήτων αριθμών: $\mathbb{Q} \cup \mathbb{Q}_\mathbf{a} = \mathbb{R}$. Είναι το μεγαλύτερο σύνολο που κατασκευάσαμε μέχρι τώρα. Το μοντέλο της μηχανής που παράγει το σύνολο των πραγματικών αριθμών είναι πολύπλοκο. Προς το παρόν δεχθείτε ότι είναι ένα σύνολο που προκύπτει από μια ένωση δυο άλλων έτσι ώστε το ένα εξ αυτών είναι τόσο μεγάλο όσο το $\mathbb{R}$. Πως γίνεται αυτό; Θα το δούμε στην επόμενη παράγραφο.

$$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$$

Ο τρόπος που *κλείναμε* βήμα προς βήμα την αριθμητική ιεραρχία, είναι η μέθοδος που περιγράφεται στο *Discours de la Méthode.* Εκεί, ο Descartes περιγράφει τη μέθοδο της κίνησης **απο το ατελές** (être imparfait)- π.χ. το $\mathbb{N}$ - **προς το τέλειο** (être parfait) - π.χ. το $\mathbb{R}$ - καθώς και τη διαλεκτική σχέση μεταξύ τους. Είναι δυνατόν να βρούμε μέσα σε κάποιες μοντέρνες θεωρίες της άλγεβρας μια όμοια μεθοδολογία μετάβασης απο ατελής μαθηματικές ενότητες σε τελειότερες. Η δημιουργία της αριθμητικής ιεραρχίας είναι ένα καλό παράδειγμα.

Το σύνολο των πραγματικών αριθμών *κληρονομεί* τις πράξεις των προηγούμενων ιεραρχικά συνόλων. Θα μπορούσατε να θέσετε το εύλογο ερώτημα: **η πρόσθεση και ο πολλαπλασιασμός ορίζονται σε κάθε σύνολο της ιεραρχίας με τον ίδιο τρόπο**; Πως θα ορίζατε αλήθεια την πρόσθεση $\sqrt{2} + \sqrt{5}$ ή τον

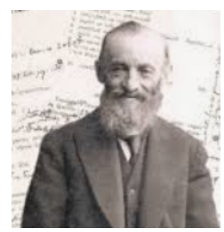
[2] Θα δούμε στο τέλος του κεφαλαίου την απόδειξη ότι ο $\sqrt{2}$ δεν είναι ρητός αριθμός.

3.3 ΔΥΟ ΑΞΙΩΣΗΜΕΙΩΤΕΣ ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΕΙΣ

3.3.1 Το αξιωματικό σύστημα του Peano

Στο σημείο αυτό θα κάνουμε μια παρένθεση να εξετάσουμε τον ρόλο των αξιωμάτων στην Άλγεβρα. Είναι γεγονός ότι υπάρχουν θεωρίες στα Μαθηματικά που δεν υποστηρίζονται από αξιώματα. Για παράδειγμα, η θεωρία Πινάκων ή η θεωρία Γράφων. Η Άλγεβρα χρησιμοποιεί αξιώματα, και η σχέση της με τα αξιώματα έχει αποδειχθεί εξαιρετικά αποτελεσματική. Όλα τα αριθμητικά συστήματα διαθέτουν ένα σύνολο αξιωμάτων. Δεν μπορούμε να ασχοληθούμε με όλα αυτά τα σύνολα αξιωμάτων για να κάνουμε Άλγεβρα στο Λύκειο. Επειδή όμως θα χρησιμοποιήσουμε τα αξιώματα της θεμελίωσης των φυσικών αριθμών σε μερικές ασκήσεις θα αναφερθούμε σε αυτά.

Στη προηγούμενη παράγραφο είδαμε την κατασκευαστική διάσταση του συνόλου των φυσικών αριθμών, $\mathbb{N}$. Αρκεί να εφοδιάσουμε μια μηχανή με ένα συγκεκριμένο πρωτόκολλο κατασκευής στοιχείων. Τα στοιχεία που θα κατασκευάσει η μηχανή αυτή είναι φυσικοί αριθμοί.


Guiseppe Peano

Αλλά η Άλγεβρα συχνά αποδεσμεύεται από το να κατασκευάζει αντικείμενα και πολύ συχνά συναντάμε αντικείμενα που προσδιορίζονται από σχέσεις στο περιβάλλον που αυτά βρίσκονται. Αυτό δίνει ένα αναπάντεχο όφελος που μας προσφέρει η ενεργοποίηση της Άλγεβρας με στόχο να προσδιορίσει τις σχέσεις αυτών των αντικειμένων. Το αξιωματικό σύστημα θα είναι ένα σύνολο από αξιώματα (μαθηματικές προτάσεις) τα οποία θα προδίδουν όχι μόνο τον τρόπο κατασκευής των στοιχείων του συνόλου $\mathbb{N}$ ή την κοινή ιδιότητα των στοιχείων του, αλλά και κάποιες χαρακτηριστικές προτάσεις που θα καθιστούν τα στοιχεία μοναδικά, διατυπωμένες μέσα σε επιπρόσθετες ιδιότητες που πηγάζουν από την συνύπαρξη των στοιχείων του με άλλα μαθηματικά αντικείμενα, όπως για παράδειγμα το αξίωμα P_5. Δεν είναι δύσκολο να φανταστείτε ότι το σύνολο αυτό των αξιωμάτων μπορεί να τυποποιηθεί στη μαθηματική αυστηρή γλώσσα, αλλά δεν μας ενδιαφέρει αυτό στη παρούσα φάση των σπουδών μας.

Ένα τέτοιο σύστημα προτάσεων (αξιωμάτων ακριβέστερα) για το σύνολο των φυσικών ή των θετικών ακεραίων, έχει παρουσιασθεί από τον Peano τον 19^o αιώνα. Σε μια μη - φορμαλιστική γραφή, τα αξιώματα θεμελίωσης των ακεραίων είναι τα εξής:

P_1 : Ο αριθμός 1 είναι θετικός ακέραιος.

P_2 : Αν ο n είναι θετικός ακέραιος, τότε ο $n+1$ είναι ο διαδοχικός του n, οποίος είναι επίσης θετικός ακέραιος.

P_3 : Κάθε θετικός ακέραιος, εκτός του 1, είναι ο διαδοχικός ενός θετικού ακεραίου.

P_4 : Αν $n+1=m+1$ τότε $n=m$.

P_5 : **Η αρχή της καλής διάταξης** Κάθε μη μηδενικό υποσύνολο των θετικών ακεραίων έχει ένα ελάχιστο στοιχείο.

Αν δείτε τους φυσικούς αριθμούς (ή τους θετικούς ακεραίους) μέσα από τον εμπλουτισμένο ορισμό θα διαπυστώσετε ότι οι δύο ορισμοί του $\mathbb{N}$, στην παράγραφο 3.2 και του Peano, είναι στη βάση τους ισοδύναμοι. Η απειρότητα των στοιχείων στον πρώτο ορισμό βρίσκεται στην άπειρη εφαρμογή της αναγωγικής σχέσης

$$\textit{επόμενος} = \textit{προηγούμενος} + 1$$

Ο ορισμός του Peano προϋποθέτει την ύπαρξη του συνόλου των αντικειμένων σε ένα εντελώς αφηρημένο σύμπαν. Αν ένα στοιχείο αυτού του σύμπαντος ικανοποιεί τα αξιώματα $P_1,\ldots,P_5$ τότε αυτομάτως είναι φυσικός αριθμός. Πολύ καλός ορισμός για την αφηρημένη Μαθηματική Επιστήμη!

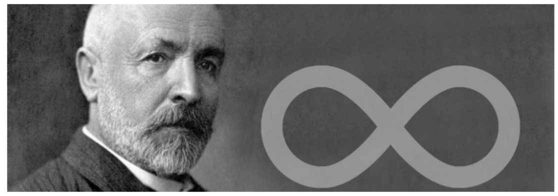
Το αμέσως επόμενο σύνολο το οποίο θα μας απασχολήσει η οντολογική δομή των στοιχείων του είναι το **σύνολο των πραγματικών αριθμών**. Εκεί, θα ορίσουμε μια άλλη δομή των μαθηματικών που λέγεται **Σώμα**. Αλλά για αυτό έχουμε ακόμα χρόνο.

3.3.2 Πόσο άπειροι είναι οι πραγματικοί αριθμοί;

Τα πρώτα θεωρήματα που συναντήσαμε στα μαθηματικά ήταν τα θεωρήματα ισότητας, με σύμβολο το " = ". Μάθαμε να δουλεύουμε με το σύμβολο αυτό αλλά ποτέ δεν αναρωτηθήκαμε τι ακριβώς σημαίνει. Είναι σαφές ότι αν έχουμε 25 μαθητές και 25 θρανία σε μία τάξη, μπορούμε να αντιστοιχίσουμε σε κάθε μαθητή ένα θρανίο και αντίστροφα, έτσι ώστε να μην περισσεύει τίποτα. Λέμε τότε ότι το πλήθος των μαθητών είναι **ίσο** με το πλήθος των θρανίων. Κρατήστε αυτή τη σημασία της ισότητας μέσα από την έννοια της αντιστοιχίας, θα μας είναι χρήσιμη στα επόμενα. Για να τονίσουμε τη νέα σημασία του συμβόλου = που μόλις τώρα δώσαμε, θα χρησιμοποιούμε το σύμβολο $\leftrightharpoons$. Έτσι

$$25 \text{ μαθητές} \leftrightharpoons 25 \text{ θρανία}$$

Έχουμε επίσης υποθέσει πως το σύνολο των φυσικών αριθμών είναι ένα σύνολο χωρίς τελευταίο στοιχείο. Τον ισχυρισμό αυτό μπορούμε να τον αποδείξουμε. Αν το σύνολο αυτό είχε ένα τελευταίο στοιχείο, ας πούμε τον αριθμό N, τότε ο $N+1$ θα ήταν επίσης φυσικός αριθμός από το αξίωμα P_2 του συστήματος του Peano, ο



Georg Ferdinand Ludwig Philipp Cantor

Αλλά όλα τα αριθμοσύνολα δεν έχουν πληθάριθμο D!
Η ύπαρξη μιας τέτοιας ταξινόμησης των στοιχείων ενός συνόλου που είδαμε παραπάνω δεν είναι δυνατή όταν τα στοιχεία δεν έχουν τα απαιτούμενα χαρακτηριστικά. Ας πάρουμε για παράδειγμα το σύνολο των πραγματικών αριθμών που βρίσκονται μεταξύ 0 και 1. Ο Cantor, 1845 - 1918, πρότεινε το εξής σχήμα για την ενδεχόμενη απαρίθμηση, ονομάζεται διαγώνιο επιχείρημα του Cantor. Γράφουμε όλους τους αριθμούς μεταξύ 0 και 1 στην δεκαδική τους μορφή χρησιμοποιώντας τα στοιχεία ενός αριθμήσιμου απειροσυνόλου του $\mathbb{N}$ για παράδειγμα.

$$\begin{array}{cccccc} 0. & a_1 & b_1 & c_1 & d_1 & \dots \\ 0. & a_2 & b_2 & c_2 & d_2 & \dots \\ 0. & a_3 & b_3 & c_3 & d_3 & \dots \\ 0. & a_4 & b_4 & c_4 & d_4 & \dots \\ & & & & & \dots \end{array} \qquad \begin{array}{cccccc} 0. & 3 & 2 & 8 & 7 & \dots \\ 0. & 2 & 0 & 4 & 3 & \dots \\ 0. & 8 & 2 & 5 & 6 & \dots \\ 0. & 7 & 0 & 0 & 9 & \dots \\ & & & & & \dots \end{array}$$

Στους παραπάνω πίνακες βλέπουμε αριστερά την γενική περίπτωση και δεξιά ένα παράδειγμα που βοηθά στην κατανόηση. Στην συνέχεια ο Cantor σχημάτισε τον αριθμό $0.a_1b_2c_3d_4\dots$ του οποίου τα δεκαδικά ψηφία βρίσκονται πάνω στην διαγώνιο του πίνακα. Στο παράδειγμα ο αριθμός αυτός είναι ο $0.3059\dots$. Από τον αριθμό αυτό δημιούργησε έναν άλλο αριθμό B που είναι το κλειδί των όσων πρόκειται να ακολουθήσουν. Το πρώτο δεκαδικό ψηφίο του αριθμού B διαφέρει από το a_1, το δεύτερο διαφέρει από το b_2, το τρίτο διαφέρει από το c_3 κ.ο.κ. Στο παράδειγμά μας μπορούμε να θεωρήσουμε τον αριθμό $B = 0.2111\dots$. Καταφέραμε έτσι να βρούμε έναν δεκαδικό μεταξύ 0 και 1 ο οποίος δεν υπάρχει στον πίνακα που κατασκευάσαμε. Γιατί, αν υποθέσουμε ότι υπάρχει στην λίστα του πίνακα σε μια θέση n, τότε ο αριθμός στην θέση του $n-$οστού ψηφίου δεν μπορεί να είναι ίσος με τον B αφού διαφέρουν ακριβώς στο $n-$οστό ψηφίο. Άρα, το B δεν μπορεί να είναι στην λίστα των δεκαδικών μεταξύ 0 και 1 αν αυτό περιείχε ένα αριθμήσιμο άπειρο αριθμό στοιχείων.

Έτσι, το πλήθος των αριθμών μεταξύ 0 και 1 δεν μπορεί να είναι ίσο με το D. Είναι λογικό να ονομάσουμε το άπειρο αυτό μη-αριθμήσιμο και να το πούμε[4] C με $D \prec C$. Το σύνολο που έχει C το πλήθος στοιχεία ονομάζεται " συνεχές " (μη προσπαθήσετε να καταλάβετε την έννοια). Ένα μη-αριθμήσιμο σύνολο είναι για παράδειγμα το σύνολο των πραγματικών αριθμών $\mathbb{R}$.

Ας δούμε με την ευκαιρία αυτή και μια άλλη σημαντική ιδιότητα ενός μη-αριθμήσιμου συνόλου, ενός συνόλου δηλαδή " πραγματικά " απείρου.

[4]Στα Μαθηματικά συμβολίζεται με το $\aleph_1$.

6. Ομοίως.

7. Επιμεριστική στο πρώτο μέλος και αναγωγές.

8. Αναπτύσσοντας τη δύναμη $(a+b+c)^3$ έχω:

$$\begin{aligned}(\alpha+\beta+\gamma)^3 =&(\alpha+\beta+\gamma)(\alpha+\beta+\gamma)(\alpha+\beta+\gamma)\\ =&(\alpha+\beta+\gamma)(\alpha^2+\beta^2+\gamma^2+2\alpha\beta+2\beta\gamma+2\alpha\gamma)\\ =&\alpha^3+\beta^3+\gamma^3+3\alpha^2(\beta+\gamma)+3\beta^2(\alpha+\gamma)+3\gamma^2(\alpha+\beta)+6\alpha\beta\gamma\\ =&\alpha^3+\beta^3+\gamma^3+3(\alpha+\beta)(\alpha+\gamma)(\beta+\gamma)\end{aligned}$$

Τότε, για $\alpha+\beta+\gamma=0$ η παραπάνω ισότητα γίνεται:

$$\alpha+\beta+\gamma=0 \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha^3+\beta^3+\gamma^3=-3(\alpha+\beta)(\alpha+\gamma)(\beta+\gamma) \\ \text{ή} \\ \alpha^3+\beta^3+\gamma^3=3abc \end{cases}$$

9. Εύκολο.

10. Αρχίζοντας από το δεύτερο μέλος της ισοδυναμίας εκτελέστε τις πράξεις και θα φτάσετε ισοδύναμα στο πρώτο.

11. Ομοίως, αρχίζοντας από το δεύτερο μέλος της ισοδυναμίας. ■

3.5.4 Παραδείγματα

***Παράδειγμα* 3.5.1** Να σημειώσετε Σ ή Λ στις παρακάτω προτάσεις:

1. $\forall x\in\mathbb{R}:\ x^0=0.$ Σ Λ

2. $\forall x\in\mathbb{R}:\ (-x-1)^2=x^2+x+1$ Σ Λ

3. Ισχύει $\forall k\in\mathbb{N}:\ (-1)^k+(-1)^{k+1}=0.$ Σ Λ

4. Ισχύει $\forall x\in\mathbb{R}:\ x^4-1=(x^2-1)^2.$ Σ Λ

5. Ισχύει $10^3\cdot10^{-4}\cdot10^2=10^{-24}.$ Σ Λ

Απάντηση:

1. Είναι λάθος, από τον ορισμό.

***Παράδειγμα* 3.10.2** Να βρείτε δύο ρητούς α και β έτσι ώστε $\dfrac{\alpha\sqrt{2}+\beta}{\sqrt{2}-1} \in \mathbb{Q}$.

Απάντηση: Ας υποθέσουμε ότι είναι ρητός της μορφής $\dfrac{\mu}{\nu}$, $\mu, \nu \in \mathbb{N} \wedge \nu \neq 0$. Τότε:

$$\begin{aligned}
\frac{\alpha\sqrt{2}+\beta}{\sqrt{2}-1} = \frac{\mu}{\nu} &\Rightarrow \alpha\nu\sqrt{2}+\beta\nu = \mu\sqrt{2}-\mu \\
&\Rightarrow \sqrt{2}\big(\alpha\nu-\mu\big)+\beta\nu+\mu = 0 \\
&\Rightarrow (\alpha\nu-\mu=0) \wedge (\beta\nu+\mu=0) \qquad (3.11) \\
&\Rightarrow \alpha = -\beta
\end{aligned}$$

Επιμένως αν $\alpha = -\beta$ τότε το κλάσμα είναι ρητός αριθμός.

Υπάρχει κάτι που πρέπει να αποδείξουμε στην σχέση (3.11). Αν $k, l \in \mathbb{Q}$ τότε

$$k\sqrt{2}+l = 0 \Leftrightarrow k = l = 0$$

Αν $k, l \neq 0$ τότε $a\sqrt{2} = -l \Leftrightarrow \sqrt{2} = -\dfrac{l}{k}$. Άτοπο. Άρα, $k = l = 0$. ■

3.10.2 Ασκήσεις

1. Να βρείτε δύο δεκαδικούς αριθμούς α και β με προσέγγιση δεκάτου, έτσι ώστε $\alpha < \sqrt{2} < \beta$. Να κάνετε το ίδιο με τον $\sqrt{3}$. Με αφετηρία τις δύο δεκαδικές προσεγγίσεις των $\sqrt{2}$ και $\sqrt{3}$, να δείξετε ότι $3,14626 < \sqrt{2}+\sqrt{3} < 3,14628$. Χρησιμοποιήστε υπολογιστή.

2. Ο Stanley Tennenbaumn[8] έδωσε μια *οπτικώς* προφανή απόδειξη του ότι ο αριθμός $\sqrt{2}$ είναι άρρητος. Η απόδειξη χρονολογείται από το 1950 αλλά έγινε γνωστή το 1990 από τον John Conway. Είναι μια κατασκευαστική απόδειξη βασισμένη στη διπλή επικάλυψη. Το παράδοξο όμως προκύπτει από το ότι η διπλή επικάλυψη παράγει μια νέα όμοια με την αρχική επικάλυψη, πράγμα με το οποίο θα οδηγηθούμε έντεχνα σε άτοπο.

   Αν ο $\sqrt{2}$ ήταν ρητός, τότε θα υπήρχαν μ, $\nu \in \mathbb{N}$, $\nu \neq 0$ με $MK\Delta(\mu,\nu) = 1$, έτσι ώστε:

   $$\sqrt{2} = \frac{\mu}{\nu}$$

   Η σχέση όμως $2\nu^2 = \mu^2$ μπορεί να ερμηνευθεί ως εξής: το εμβαδόν ενός τετραγώνου πλευράς μ είναι ίσο με το άθροισμα των εμβαδών δύο άλλων τετραγώνων πλευράς ν, όπως δείχνει το Σχήμα 3.1. Ας υποθέσουμε ότι

S. Tennenbaumn

[8] Αμερικάνος μαθηματικός, 1927-2005, με ειδίκευση στην Μαθηματική Λογική.

3.11 ΕΠΑΝΑΛΗΨΗ

1. Για ποιές τιμές του $x \in \mathbb{R}$ ορίζεται η παράσταση;

$$\frac{1}{1+\dfrac{1}{1+\dfrac{1}{x}}}$$

   Να γίνει απλό το παραπάνω σύνθετο κλάσμα.

2. Αν $x+y=3$ να βρεθεί η τιμή της παράστασεις:

$$A=(6x-2y)\Big[-2(x+2y)+4(-x-2y)-[x-(x-2y)]\Big].$$

3. Να βρεθούν οι τιμές του x για τις οποίες ορίζονται οι παραστάσεις:

$$A=\frac{4}{1-\dfrac{2}{x+3}} \qquad B=\frac{\dfrac{1}{2x}-1}{4-\dfrac{2}{x+1}}.$$

4. Έστω x ένας πραγματικός αριθμός. Συμβολίζουμε με $\lfloor x \rfloor$ το **ακέραιο μέρος** του x που είναι ο μεγαλύτερος ακέραιος που είναι μικρότερος ή ίσος με το x. Επίσης συμβολίζουμε με

$$\|x\| = x - \lfloor x \rfloor$$

   Αποδείξτε ότι $\forall x \in \mathbb{R}$ ισχύουν:

   (α΄) $\lfloor x \rfloor = x \Leftrightarrow x \in \mathbb{Z}$.

   (β΄) $\|x\| = 0 \Leftrightarrow x \in \mathbb{Z}$.

   (γ΄) $x-1 < \lfloor x \rfloor \leq x < \lfloor x \rfloor + 1$.

   (δ΄) $\lfloor m+x \rfloor = m + \lfloor x \rfloor$, $\forall m \in \mathbb{Z}$.

   (ε΄) $\|m+x\| = \|x\|$, $\forall m \in \mathbb{Z}$.

   (ϛ΄) $\forall y \in \mathbb{R}$, $x = y \Rightarrow \lfloor x \rfloor = \lfloor y \rfloor$.

   (ζ΄) $\lfloor x \rfloor + \left\lfloor x+\dfrac{1}{n} \right\rfloor + \cdots + \left\lfloor x + \dfrac{n-1}{n} \right\rfloor = \lfloor nx \rfloor$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $n \geq 2$. (**Hermite**)

5. Αποδείξτε ότι αν $\alpha, \beta, \gamma, d \in \mathbb{R}^*$ και $\alpha+\beta=\gamma+\delta$, $\alpha\beta=\gamma\delta$, τότε $\alpha=\gamma$, $\beta=\delta$ είτε $\alpha=\delta$, $\beta=\gamma$.

72. Αν $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{Q}^*$ και $\dfrac{1}{\alpha} = \dfrac{1}{\beta} + \dfrac{1}{\gamma}$ αποδείξτε ότι $\sqrt{\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2}$ είναι ρητός αριθμός.

73. Δύο θετικοί ακέραιοι x και y ικανοποιούν την εξίσωση $\sqrt{x} - \sqrt{13} = \sqrt{y}$. Να βρεθεί η μέγιστη δυνατή τιμή του κλάσματος $\dfrac{x}{y}$.

74. Έστω το σύνολο $A = \{\sqrt{x} + \sqrt{y} / x, y \in \mathbb{N}\}$.

    (α΄) Εξετάστε αν το 6 και το 7 είναι στοιχείο του συνόλου A.

    (β΄) Αποδείξτε ότι $\mathbb{N} \subseteq A$.

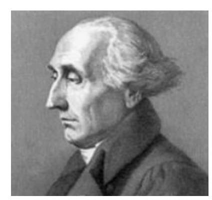
    (γ΄) Δείξτε ότι αν $r \in \mathbb{Q} \cap A$ τότε $r \in \mathbb{Z}$.

    (δ΄) Εξετάστε αν $(\sqrt{5} - 1) \in A$.

    (ε΄) Πόσα στοιχεία έχει το σύνολο $A \cap [0, 1]$.

    (ϛ΄) Μελετήστε αν $(\sqrt{2} - \sqrt{3} - 1) \notin A$.

75. Ο Joseph Louis Lagrange έδειξε το 1770 ότι όλοι οι φυσικοί αριθμοί μπορεί να γραφούν σαν άθροισμα τεσσάρων τετραγώνων. Είναι εύλογο να ρωτήσουμε αν αυτό συμβαίνει και με τους πραγματικούς αριθμούς. Το πρόβλημα αυτό γενικεύθηκε από τον Hilbert στο 17ο πρόβλημα και λύθηκε από τον Artin καταφατικά. Θα δούμε εδώ κάτι περισσότερο στοιχειώδες. Αν ένας θετικός αριθμός μπορεί να γραφεί σαν άθροισμα δύο τετραγώνων.



Joseph L. Lagrange

Επαγωγικός συλλογισμός

(α΄) Γράψτε τους αριθμούς 5 και 21 σαν άθροισμα τέλειων τετραγώνων ακεραίων αριθμών.

(β΄) Είναι μοναδική η γραφή αυτή των δύο αριθμών 5 και 21;

(γ΄) Όλοι οι φυσικοί μπορεί να γραφούν σαν άθροισμα τέλειων τετραγώνων; Ας δούμε τους φυσικούς αριθμούς n για τους οποιους μπορούμε να βρούμε δύο άλλους φυσικούς a και b έτσι ώστε $n = a^2 + b^2$. Για παράδειγμα ο αριθμός 5 μπορεί να γραφεί σαν $5 = 2^2 + 1^2$. Ο αριθμός $29 = 5^2 + 2^2$, ή επίσης ο $1042 = 31^2 + 21^2$. Ένας τέτοιος ακέραιος που μπορεί να γραφεί σαν άθροισμα δύο τετραγώνων ονομάζεται **διτετράγωνος αριθμός**.

9. Στην παράσταση $c \cdot a^b - d$, οι τιμές των μεταβλητών a, b, c, d πέρνουν τιμές από το σύνολο $\{0, 1, 2, 3\}$, όχι αναγκαστικά σε αυτήν την αντιστοιχία. Ποιά μπορεί να είναι η μεγαλύτερη δυνατή τιμή της παράστασης;
Α. 5 **Β.** 6 **Γ.** 8 **Δ.** 9 **Ε.** 10

10. Έστω x και y δύο διψήφιοι ακέραιοι έτσι ώστε ο y προκύπτει απο τον x αντιστρέφοντας της σειρά των ψηφίων. Υποθέστε ότι οι ακέραιοι x και y ικανοποιούν την $x^2 - y^2 = m$, για κάποιο θετικό ακέραιο m. Ποιά είναι η τιμή του $x + y + m$;
Α. 88 **Β.** 112 **Γ.** 116 **Δ.** 144 **Ε.** 154

11. Υποθέστε ότι ο αριθμός a ικανοποιεί την εξίσωση $4 = a + a^{-1}$. Ποιά είναι η πιθανή τιμή του $a^4 + a^{-4}$;
Α. 164 **Β.** 172 **Γ.** 192 **Δ.** 194 **Ε.** 212

12. Ο αριθμός των διακεκριμένων ριζών της εξίσωσης $\big|x - |2x+1|\big| = 3$ είναι:
Α. 0 **Β.** 1 **Γ.** 2 **Δ.** 3 **Ε.** 4

13. Ένας ρητός ανάμεσα από το $\sqrt{2}$ και $\sqrt{3}$ είναι:
Α. $\dfrac{\sqrt{2}+\sqrt{3}}{2}$ **Β.** $\dfrac{\sqrt{2}\cdot\sqrt{3}}{2}$ **Γ.** 1.5 **Δ.** 1.8 **Ε.** 1.4

14. Στο κλάσμα $P := \dfrac{x+1}{x-1}$ κάθε x αντικαθισταται με το κλάσμα $\dfrac{x+1}{x-1}$. Η τελική τιμή του P για $x = \dfrac{1}{2}$, είναι ίση με:
Α. 3 **Β.** -3 **Γ.** 1 **Δ.** -1 **Ε.** Κανένα από τα προηγούμενα

15. Η τιμή του $\left(\dfrac{1}{16}\right)a^0 + \left(\dfrac{1}{16a}\right)^0 - 64^{-\frac{1}{2}} - (-32)^{-\frac{4}{5}}$ είναι:
Α. $1\dfrac{13}{16}$ **Β.** $1\dfrac{3}{16}$ **Γ.** 1 **Δ.** $\dfrac{7}{8}$ **Ε.** $\dfrac{1}{16}$

16. Η τέταρτη δύναμη της $\sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{1}}}$ είναι:
Α. $\sqrt{2}+3$ **Β.** $\dfrac{1}{2}(7+3\sqrt{5})$ **Γ.** $1+2\sqrt{3}$ **Δ.** 3 **Ε.** $3+2\sqrt{2}$

17. Αν οι πραγματικές μεταβλητές x και y ικανοποιούν τις δύο εξισώσεις:

$$xy = 6 \text{ και } x^2y + xy^2 + x + y = 63$$

να βρείτε το $x^2 + y^2$.
Α. 13 **Β.** $\dfrac{1173}{32}$ **Γ.** 55 **Δ.** 69 **Ε.** 81

4.1.2 Αλγοριθμική λύση της Πρωτοβάθμιας Εξίσωσης

Ορισμός 4.1.1 *Μία εξίσωση της μορφής* $\alpha x + \beta = 0$ *ή* $\alpha x = \beta$*, με* $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ *και* $\alpha \neq 0$*, ονομάζεται* ***εξίσωση πρώτου βαθμού*** *ή και* ***γραμμική εξίσωση****. Η παραπάνω μορφή είναι η γενική μορφή των εξισώσεων 1ου βαθμού. Η τιμή της μταβλητής* x *που κάνει την εξίσωση αληθή, λέγεται* ***ρίζα της εξίσωσης****. Η ρίζα ή οι ρίζες μιας εξίσωσης αποτελούν το σύνολο των λύσεων της εξίσωσης* ***ισοδύναμες****.*

Στη Πρόταση 3.4.8 είδαμε ότι υπάρχουν τιμές του x που επαληθεύουν την ισότητα της μορφής $\alpha \cdot x = \beta$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Οι πραγματικοί α και β λέγονται παράμετροι. Έτσι, θα μπορούσαμε να πούμε ότι η εξίσωση $\alpha \cdot x = \beta$ είναι μια **παραμετρική εξίσωση** σε αντιπαράθεση με την $3x = 6$ που δεν είναι.

Όταν δίνεται μια παραμετρική εξίσωση, η ρίζα της θα είναι φυσικά μια αλγεβρική έκφραση των παραμέτρων. Η επίλυση μιας παραμετρικής εξίσωσης θέλει μια ειδική επεξεργασία η οποία προκύπτει από πιθανούς περιορισμούς στις παραμέτρους. Ο υπολογισμός αυτός είναι διαφορετικός από τον αριθμητικό υπολογισμό της παραγράφου 4.1.1 γιατί στη θέση των αριθμητικών τιμών τώρα έχουμε γράμματα και πρέπει να είμαστε προσεκτικοί. Για παράδειγμα: δεν είναι σωστό ότι η λύση της $\alpha \cdot x = \ b$ είναι η $x = \dfrac{\beta}{\alpha}$! Και αυτό γιατί αν $\alpha = 0$ θα διαιρούσαμε με μία μηδενική ποσότητα. Αυτό δεν είναι δυνατόν στο $\mathbb{R}$. Θα ήταν ορθότερο να υποθέσουμε δύο εκδοχές για την παράμετρο α. Αν $\alpha = 0$ και αν $\alpha \neq 0$. Η περιπτωσιολογική αυτή διαδικασία επίλυσης, όπως στη Πρόταση 3.4.8, λέγεται **διερεύνηση** και είναι ορθό να την ταυτίσουμε με την κατασκευή αλγορίθμου που να επιλύει αυτομάτως οποιαδήποτε εξίσωση πρώτου βαθμού αυτής της μορφής. Μια εξίσωση της μορφής $0x = 0$ λέγεται **αόριστη ή ταυτότητα**, επειδή αληθεύει για κάθε πραγματικό αριθμό. Μια εξίσωση της μορφή $0x = \beta$, $\beta \in \mathbb{R}^*$ λέγεται αδύνατη, επειδή δεν υπάρχει πραγματικός ο οποίος πολλαπλασιασμένος με το 0 δίνει μη μηδενικό αριθμό.

Δείτε τον σχεδιασμό του αλγορίθμου που επιλύει μια εξίσωση της μορφής: $\alpha \cdot x = \beta$

```
Data: a, b
Result: Solution of the
        equation a · x = b
initialization;
if a = 0 then
    if b = 0 then
        ∀x ∈ ℝ : 0 · x = 0;
    else
        ¬(∃x ∈ ℝ : 0 · x = b);
    end
else
    x ← b/a;
end
```

4.2 ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ ΑΝΑΓΟΜΕΝΕΣ ΣΕ 1ου ΒΑΘΜΟΥ

Ο σκοπός του κεφαλαίου είναι να καταδείξη εργαλεία αναγωγής μια εξίσωσης πρώτου βαθμού, όταν εμπλέκονται στον τύπο της εξίσωσης πολυπλοκότερες πράξεις και συμβολισμοί πάνω στην μεταβλητή, όπως για παράδειγμα η απόλυτη τιμή.

4.2.1 Αλγεβρική Αναγωγή σε 1ου βαθμού

***Παράδειγμα* 4.2.1** Να λυθεί η εξίσωση: $(x^2-4)(x-1) = (x^2-1)(x-2)$

Απάντηση:

$$\begin{aligned}(x^2-4)(x-1) = (x^2-1)(x-2) &\Leftrightarrow (x-2)(x+2)(x-1) - (x-1)(x+1)(x-2) = 0\\ &\Leftrightarrow (x-2)(x-1)\Big(x+2-x-1\Big) = 0\\ &\Leftrightarrow (x-2)(x-1) = 0\\ &\Leftrightarrow (x=2) \vee (x=1)\end{aligned}$$

■

4.2.2 Εξισώσεις με Απόλυτα

***Παράδειγμα* 4.2.2** Να λυθεί η εξίσωση: $|x-2| = |2x-1|$.

Απάντηση: Θα χρησιμοποιήσουμε την γνωστή ιδιότητα που είδαμε στις απόλυτες τιμές:

$$\forall \alpha \in \mathbb{R}: \ |\mathbf{x}| = |\alpha| \Leftrightarrow (\mathbf{x} = \alpha) \vee (\mathbf{x} = -\alpha)$$

$$\begin{aligned}|x-2| = |2x-1| &\Leftrightarrow (x-2 = 2x-1) \vee (x-2 = -2x+1)\\ &\Leftrightarrow (x=-1) \vee (x=1)\end{aligned}$$

■

***Παράδειγμα* 4.2.3** Να λυθεί η εξίσωση: $|x-2| = 2x-1$. .

Απάντηση: (Αναφορά στην ιδιότητα: $\forall x \in \mathbb{R} \wedge \theta > 0 \Rightarrow |\mathbf{x}| = \theta \Leftrightarrow (\mathbf{x} = \theta) \vee (\mathbf{x} = -\theta)$).
Η μορφή της εξίσωσης καθορίζει το πεδίο ορισμού της αφού πρέπει $2x-1 \geq 0$. Άρα , δεν είναι όλο το σύνολο των πραγματικών $\mathbb{R}$. Σε αντίθετη περίπτωση, αν δηλαδή $2x-1 < 0$, η εξίσωση είναι αδύνατη αφού το πρώτο μέλος είναι ένας μη αρνητικός αριθμός.

Απόδειξη: Ένα τέλειο τετράγωνο είναι μια αλγεβρική παράσταση υψωμένη στη δύναμη 2. Αν το τριώνυμο είναι τέλειο τετράγωνο, τότε $\alpha x^2 + \beta x + \gamma = (\delta x + \varepsilon)^2$ ή ισοδύναμα η εξίσωση $\alpha x^2 + \beta x + \gamma = 0$ θα έχει δυο ίσες ρίζες με $-\frac{\varepsilon}{\delta}$. Άρα , πρέπει η διακρίνουσα Δ του τριωνύμου να είναι ίση με 0. ■

Ας σχεδιάσουμε, όπως κάναμε στην 1ου βαθμού εξίσωση, τον αλγόριθμο επίλυσης της $\alpha x^2 + \beta x + \gamma = 0$ ως προς x. Αν και έχουμε πει ότι πάντα το $\alpha \neq 0$, ο αλγόριθμος δεν μπορεί να αποφύγει κακόβουλες εισαγωγές δεδομένων. Για την περίπτωση όπου $\alpha = 0$ είμαστε υποχρεωμένοι να εισάγουμε ένα "μικρότερο" αλγόριθμο ο οποίος επιλύει μια εξίσωση πρώτου βαθμού της μορφής $\beta x = -\gamma$. Ο αλγόριθμος δέχεται στην είσοδο τις μεταβλητές α, β και γ και υπολογίζει την διακρίνουσα. Στην έξοδο, υπάρχει η λύση της δευτεροβάθμιας εξίσωσης $\alpha x^2 + \beta x + \gamma = 0$ ή της πρωτοβάθμιας $\beta x + \gamma = 0$.

Data: a, b, c
Result: Solution of the equation $ax^2 + bx + c = 0$
initialization;
if $a = 0$ **then**
  Solve the equation $bx = -c$;
else
  $\Delta \leftarrow b^2 - 4ac$;
  if $\Delta = 0$ **then**
    $x_1 = x_2 \leftarrow -\frac{b}{2a}$;
  else
    if $\Delta > 0$ **then**
      $x_{1,2} \leftarrow \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$;
    else
      Not real solutions;
    end
  end
end

4.4.3 Παραδείγματα

***Παράδειγμα* 4.4.1** Να αναγάγετε τις παρακάτω εξισώσεις στην γενική μορφή:
Α. $x^2 - 34x = 78$ **Β.** $(2x + 3)(4x - 1) = 5x + 2$ **Γ.** $\frac{3x + 4}{x} = \frac{6}{2x}$

Απάντηση: **Α.** $x^2 - 34x - 78 = 0$ **Β.** $8x^2 - 7x + 1$ **Γ.** $6x^2 + 2x = 0$ ■

(ε′) $\dfrac{3}{2(x^2-1)} - \dfrac{1}{4(x+1)} = \dfrac{1}{8}$.

(ϛ′) $\dfrac{x+1}{x+2} + \dfrac{x+1}{x-2} = \dfrac{2x+1}{x+1}$.

(ζ′) $\dfrac{2x-1}{x+1} + \dfrac{3x-1}{x+2} - \dfrac{x-7}{x-1} = 4$.

(η′) $\dfrac{x-a}{a} = \dfrac{2a}{x-a}$, $a, b \in \mathbb{R}$.

(ϑ′) $\dfrac{x-a}{a} = \dfrac{b}{2x-b}$, $a, b \in \mathbb{R}$.

(ι′) $(x^2+x+2)^4 - 32x^2(x^2+x+2)^2 + 256x^4 = 0$.

(ια′) $x^4 - 4x^3 - 23x^2 + 54x + 72 = 0$.

(ιβ′) $\dfrac{1}{x^2-2x+2} - \dfrac{x^2}{x^4+4} = 0$.

4. Να λυθούν οι εξισώσεις:
Α. $x^2 - 7|x| + 12 = 0$ **Β.** $(x-3)^2 + 4|x-3| - 10 = 0$ **Γ.** $20|x|^3 + 3|x|^2 - 2|x| = 0$

Ορισμός 4.5.1 *Οι τύποι αυτοί του αθροίσματος και του γινομένου των ριζών μιας δευτεροβάθμιας εξίσωσης λέγονται* ***τύποι του Viète*** *ή αγγλιστί Vieta. Είναι επίσης συμμετρικές μορφές δηλαδή, για οποιαδήποτε μετάθεση των μεταβλητών το αποτέλεσμα παραμένει το ίδιο:* $x_1 + x_2 = x_2 + x_1 = \frac{\beta}{\alpha}$ *και* $x_1x_2 = x_2x_1 = \frac{\gamma}{\alpha}$.

Η αρχική εξίσωσή μας μπορεί τώρα να γραφεί συναρτήσει των τύπων του Viète ως εξής:

$$\begin{aligned} \alpha x^2 + \beta x + \gamma = 0 \quad &\Leftrightarrow \quad x^2 + \frac{\beta}{\alpha}x + \frac{\gamma}{\alpha} = 0 \\ &\Leftrightarrow \quad \mathbf{x^2 - Sx + P = 0} \end{aligned}$$

4.5.2 Παραδείγματα

Παράδειγμα **4.5.1** Στο πρώτο βιβλίο των «Αριθμητικών», πρόβλημα 27 ο Διόφαντος (3/4*os* αιώνας μ.Χ) διατύπωσε το εξής πρόβλημα:

Να βρεθούν δύο αριθμοί οι οποίοι να έχουν άθροισμα και γινόμενο δεδομένους αριθμούς

Για παράδειγμα: Υπάρχουν αριθμοί που έχουν άθροισμα 4 και γινόμενο -5; Να βρεθούν οι αριθμοί αυτοί.

Απάντηση: Έστω a και b οι δύο αυτοί αριθμοί. Τότε $a + b = 4$ και $a \cdot b = -5$. Αφού όμως υποθέτουμε την ύπαρξη τέτοιων αριθμών, πρέπει οι δύο αυτοί αριθμοί πρέπει να είναι ρίζες της εξίσωσης που έχει άθροισμα και γινόμενο ριζών 4 και -5 αντίστοιχα. Μια τέτοια εξίσωση είναι η $x^2 - 4x - 5 = 0$. Άρα, λύνοντας την εξίσωση θα βρώ $a = -1$ και $b = 5$ ή $a = 5$ και $b = -1$. ■

Παράδειγμα **4.5.2** Όταν η μια εκ των δύο ριζών μιας εξίσωσης δευτέρου βαθμού είναι ο 2 και το άθροισμα των ριζών είναι 4, τότε η διακρίνουσα είναι 0;

Απάντηση: Ναι, γιατί $x + y = 4$ αν $x = 2$ τότε $y = 2$. Συνεπώς, η διακρίνουσα είναι 0. ■

Παράδειγμα **4.5.3** Να βρεθεί η συνθήκη μεταξύ των α, β και γ, $\alpha \neq 0$, έτσι ώστε οι ρίζες της εξίσωσης $\alpha x^2 + \beta x + \gamma = 0$ να είναι:

1. αντίθετοι αριθμοί
2. αντίστροφοι αριθμοί

4.6 ΠΑΡΑΜΕΤΡΙΚΕΣ ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ 1ου ΒΑΘΜΟΥ

4.6.1 Λύση παραμετρικής εξίσωσης

***Παράδειγμα* 4.6.1** *Να λυθεί και να διερευνηθεί η εξίσωση :* $(\lambda^2-1)x-\lambda+1=0$.

Λύση: Η εξίσωση είναι 1ου βαθμού.

1ο Βήμα: Με αλγεβρικές αναγωγές οδηγώ την αρχική στην μορφή $\alpha x = \beta$. Στο παράδειγμά μας : $(\lambda^2-1)x = \lambda - 1$. Δεν διαιρώ με το $\lambda^2 - 1$, αν πρώτα δεν εξασφαλίσω ότι ο παράγοντας αυτός είναι διάφορος του 0.
Για τον λόγο αυτό διερευνώ την μορφή που θα πάρει η εξίσωση για τις διάφορες τιμές του λ που μηδενίζουν τον παράγοντα $\lambda^2 - 1$.

2ο Βήμα: Αν

$$\lambda^2 - 1 = 0 \Leftrightarrow (\lambda-1)(\lambda+1) = 0 \Leftrightarrow \lambda = 1 \text{ ή } \lambda = -1$$

1. Αν $\lambda = 1$ η αρχική γίνεται $0x = 0$. Η τελευταία εξίσωση είναι **ταυτότητα (ή αόριστη)** αφου δεν μπορούμε να προσδιορίσουμε μονοσήμαντα κάποιον x που να την ικανοποιεί.
2. Αν $\lambda = -1$ η αρχική γίνεται $0x = -2$. Η τελευταία εξίσωση είναι **αδύνατη** αφου δεν υπάρχει πραγματικός x που να την ικανοποιεί.

3ο Βήμα: Αν $\lambda^2 - 1 \neq 0$, τότε

$$x = \frac{\lambda-1}{\lambda^2-1} = \frac{1}{1+\lambda}$$

Τελικά λοιπόν έχουμε:

Data: $\lambda^2 - 1$, $\lambda - 1$
Result: Solution of the equation $(\lambda^2-1)x = \lambda - 1$
initialization;
if $\lambda^2 - 1 = 0$ **then**
  if $\lambda = 1$ **then**
    $\forall x \in \mathbb{R}: \ 0x = 0$;
  else
    $\neg\big(\exists x \in \mathbb{R}: \ 0x = -2\big)$;
  end
else
  $x \leftarrow \dfrac{1}{\lambda+1}$;
end

Συμπέρασμα:

1. Η εξίσωση έχει **μία ρίζα** αν $\lambda \neq \pm 1$ με $x = \dfrac{1}{1+\lambda}$
2. Είναι **ταυτότητα** αν $\lambda = 1$
3. Είναι **αδύνατη** αν $\lambda = -1$

■

52. Ρίχνουμε τρείς φορές ένα ζάρι, με έξι αριθμημένες πλευρές 1,2,3,4,5,6, και σημειώνουμε τα αποτελέσματα: α την πρώτη φορά, β την δεύτερη και γ την τρίτη. Έτσι έχουμε ένα ενδεχόμενο που το σημειώνουμε με (α, β, γ).

    (α΄) Βρείτε τον αριθμό όλων των πιθανών ενδεχομένων του πειράματος.

    (β΄) Αν έχουμε σε μία ρίψη το ενδεχόμενο (α, β, γ), τότε σχηματίζουμε την εξίσωση $p(x) = \alpha x^2 + \beta x + c = 0$ με άγνωστο τον x.
    Για παράδειγμα: αν έχουμε $(2, 5, 6)$ τότε σχηματίζουμε την εξίσωση $p(x) = 2x^2 + 5x + 6 = 0$.

    i. Το 0 μπορεί να είναι ρίζα της εξίσωσης $p(x) = 0$;

    ii. Δείξτε ότι η εξίσωση $p(x) = \alpha x^2 + \beta x + \gamma = 0$ δεν δέχεται καμμία πραγματική ρίζα θετική ή μηδέν.

    iii. Υπάρχουν α, β, γ έτσι ώστε το -1 να είναι ρίζα της $p(x) = \alpha x^2 + \beta x + \gamma = 0$; Ποιές είναι αυτές οι τιμές των α, β, γ;
    Ποια είναι η πιθανότητα του ενδεχόμενου να είναι το -1 ρίζα της εξίσωσης.

53. Δείξτε ότι η ικανή και αναγκαία συνθήκη για να έχουν δύο τριώνυμα $p(x) = \alpha x^2 + \beta x + \gamma$ και $q(x) = \alpha' x^2 + \beta' x + \gamma'$, $\alpha, \beta, \gamma, \alpha', \beta', \gamma' \in \mathbb{R} \wedge \alpha, \alpha' \neq 0$, κοινή ρίζα είναι

$$(\alpha\gamma' - \alpha'\gamma)^2 - (\alpha\beta' - \alpha'\beta)(\beta\gamma' - \beta'\gamma) = 0$$

54. Υπάρχει διψήφιος φυσικός αριθμός n έτσι ώστε

    (α΄) το άθροισμα των ψηφίων να είναι 13 και

    (β΄) αντιστρέφοντας την διάταξη των ψηφίων να πάρουμε έναν αριθμό m έτσι ώστε $n \cdot m = 4930$;

55. Δίδεται τρίγωνο $AB\Gamma$, έτσι ώστε $AB = 8$, $A\Gamma = 6$ και $B\Gamma = 10$. Στο πρόβλημα αυτό θα αναζητήσουμε μια ευθεία ϵ η οποία να χωρίζει το τρίγωνο σε δύο πολύγωνα ισοπεριμετρικά και ισεμβαδικά.

    (α΄) Υπολογίστε την περίμετρο και το εμβαδόν του τριγώνου.

    (β΄) Στο πρώτο Σχήμα η ευθεία ϵ χωρίζει την περίμετρο του τριγώνου $AB\Gamma$ στο μισό γιατί $AM + AN$ είναι το μισό της περιμέτρου.

5.2 ΑΝΙΣΩΣΕΙΣ ΜΕ ΑΠΟΛΥΤΑ

Μέθοδος για να λύσουμε μια ανίσωση με απόλυτα, δεν υπάρχει, ούτε ένας στοιχειώδης αλγόριθμος. Συνήθως εφαρμόζουμε ad hoc μεθόδους χρησιμοποιώντας τις παρακάτω ιδιότητες των απολύτων τιμών.

1. Η απόσταση δύο πραγματικών αριθμών είναι ίση με την απόλυτη διαφορά τους, συμβολικά:
$$d(\alpha, \beta) = |\alpha - \beta|$$
2. $\rho > \mathbf{0},\ |\mathbf{x}| < \rho \Leftrightarrow \mathbf{x} \in (-\rho, \rho) \Leftrightarrow -\rho < \mathbf{x} < \rho$
3. $\rho > \mathbf{0},\ |\mathbf{x}| > \rho \Leftrightarrow \mathbf{x} < -\rho$ ή $\mathbf{x} > \rho$

5.2.1 Παραδείγματα

***Παράδειγμα* 5.2.1** Να λυθεί η ανίσωση: $|x-1| < 5$. Θα μπορούσαμε να γράψουμε ισοδύναμα σύμφωνα με την παρατήρηση 1, να λυθεί η ανίσωση $d(x, 1) < 5$.

Απάντηση: Για να λύσουμε την ανίσωση θα χρειασθούμε, όπως κάναμε και στη περίπτωση των εξισώσεων, τις παραπάνω ιδιότητες των απολύτων 2 και 3. Έτσι, από την ιδιότητα 2, έχω πολύ απλά ότι: $-5 < x - 1 < 5 \Leftrightarrow -4 < x < 6$.
Το ίδιο αποτέλεσμα θα πάρουμε αν προσπαθήσουμε να βγάλουμε το απόλυτο διακρίνοντας περιπτώσεις για την παράσταση $x - 1$. Για παράδειγμα:

$$\begin{array}{lll} \text{Για } x-1 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq 1 & \text{έχω} & x - 1 < 5 \Leftrightarrow x < 6 \\ \text{Για } x-1 < 0 \Leftrightarrow x < 1 & \text{έχω} & -(x-1) < 5 \Leftrightarrow -x+1 < 5 \Leftrightarrow -4 < x \end{array}$$

Άρα, η λύση είναι $-4 < x \wedge x < 6 \Rightarrow -4 < x < 6$. ■

***Παράδειγμα* 5.2.2** Να λύθει η ανίσωση: $|x - 1| \leq 2x - 3$. Θα μπορούσαμε να γράψουμε, σύμφωνα με την ιδιότητα 1, $d(x, 1) \leq 2x - 3$.

Απάντηση: Πάλι θα δουλέψουμε με τις ιδιότητες των απολύτων τιμών. Επειδή $0 \leq |x-1|$, πρέπει $0 \leq 2x - 3 \Leftrightarrow \dfrac{3}{2} \leq x$.
Από την ιδιότητα 2,

$$\begin{aligned} -(2x-3) \leq x - 1 \leq 2x - 3 \quad &\Leftrightarrow \quad 3 + 1 \leq 2x + x \ \wedge \ x - 2x \leq -3 + 1 \\ &\Leftrightarrow \quad 4 \leq 3x \ \wedge \ -x \leq -2 \\ &\Leftrightarrow \quad \frac{4}{3} \leq x \ \wedge \ \ 2 \leq x \end{aligned}$$

6.2.5 Άθροισμα ν πρώτων όρων

Για να βρούμε το άθροισμα των ν πρώτων όρων μιας αριθμητικής προόδου εφαρμόζουμε το πολύ γνωστό trick του νεαρού Gauss[1].

***Πρόταση* 6.2.4** *Το άθροισμα των ν πρώτων όρων μιας αριθμητικής προόδου α_ν είναι:*

$$S_\nu = \alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_\nu = \frac{\nu}{2}\Big(\alpha_1 + \alpha_\nu\Big) = \frac{\nu}{2}\Big(2\alpha_1 + (\nu-1)\omega\Big)$$

Απόδειξη:

$$\begin{array}{lcl} S_\nu & = & \alpha_1 + (\alpha_1+\omega) + (\alpha_1+2\omega) + \cdots + [\alpha_1 + (\nu-2)\omega] + [\alpha_1 + (\nu-1)\omega] \\ S_\nu & = & \alpha_\nu + (\alpha_\nu-\omega) + (\alpha_\nu-2\omega) + \cdots + [\alpha_\nu - (\nu-2)\omega] + [\alpha_\nu - +(\nu-1)\omega] \\ + & & \\ \hline 2S_\nu & = & \nu(\alpha_1+\alpha_\nu) \\ S_\nu & = & \dfrac{\nu}{2}\Big(\alpha_1+\alpha_\nu\Big) = \dfrac{\nu}{2}\Big(2\alpha_1 + (\nu-1)\omega\Big) \text{ αφού } \alpha_\nu = \alpha_1 + (\nu-1)\omega. \end{array}$$

■

***Παράδειγμα* 6.2.6** Πόσοι όροι της αριθμητικής προόδου $52, 47, 42, \ldots$ έχουν άθροισμα ίσο με 90;

Απάντηση: Γνωρίζουμε: $\alpha_1 = 52$, $\omega = 47 - 52 = -5$ και $S_\nu = 90$. Τότε:

$$\begin{aligned} S_\nu &= \frac{\nu}{2}\Big(2\alpha_1 + (\nu-1)\omega\Big) \\ 90 &= \frac{\nu}{2}\Big(2\cdot 52 + (\nu-1)\cdot(-5)\Big) \quad \Leftrightarrow \quad 5\nu^2 - 109\nu + 180 = 0 \\ & \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\quad\ \Leftrightarrow \quad \nu = \frac{9}{5},\ 20 \end{aligned}$$

Άρα, άθροισμα 90 έχουν οι $\nu = 20$ πρώτοι όροι, αφού $\nu \in \mathbb{N}$. ■

***Παράδειγμα* 6.2.7** Να υπολογισθούν τα αθροίσματα S_ν^1, S_ν^2, S_ν^3 αν

$$S_\nu^k = 1^k + 2^k + 3^k + \cdots + \nu^k$$

Απάντηση:

[1] Ο Brian Hayes στο American Scientist το 2012, λέει ότι αυτό δεν έχει συμβεί ποτέ. Απλά, είναι ένας μύθος!

6.3.4 Άθροισμα απείρων όρων γεωμετρικής προόδου

Το άθροισμα απείρων όρων μιας γεωμετρικής προόδου έχει ιδιαίτερη σημασία στα μαθηματικά. Αυτό που θέλουμε να δούμε στην περίπτωσή μας εδώ, είναι τι συμβαίνει στο άθροισμα $S_\nu = \alpha_1 \dfrac{\lambda^\nu - 1}{\lambda - 1}$, $\lambda \neq 1$, όταν το ν αυξάνει απεριόριστα. Όταν το ν αυξάνει απεριόριστα και πάει να γίνει ένα άπειρο, $+\infty$, αυτό που επηρεάζεται ουσιαστικά είναι ο όρος λ^ν, άλλωστε είναι ο μόνος όρος που εμφανίζεται από την μεταβολή του ν στο άθροισμα S_ν. Το πως επηρεάζεται ο όρος αυτός θα μας το πούν οι δύο παρακάτω προτάσεις.

***Πρόταση* 6.3.5** *Αν ο αριθμός λ είναι μεγαλύτερος της μανάδας, η δύναμη λ^ν καθώς το ν αυξάνει απεριόριστα, αυξάνει και αυτή απεριόριστα.*

Δεν θα αποδείξουμε την πρόταση εδώ. Θα επικαλεσθούμε την κοινή αίσθηση ότι πράγματι αυτό συμβαίνει, αφού από την ανισότητα του Bernoulli[2], $\lambda^\nu > 1+\nu\cdot(\lambda-1)$, το άθροισμα $1 + \nu \cdot (\lambda - 1)$ γίνεται πολύ μεγάλο και παρασέρνει ομοίως και το λ^ν.

***Πρόταση* 6.3.6** *Αν ο αριθμός λ είναι απολύτως μικρότερος της μονάδας, η η δύναμη $|\lambda|^\nu$ καθώς το ν αυξάνει απεριόριστα, ελλατώνεται απεριόριστα, μέχρι να γίνει ίση με το 0.*

Επίσης και για την πρόταση αυτή δεν θα δώσουμε απόδειξη. Θα αρκεστούμε όμως να σημειώσουμε ότι αν $|\lambda| < 1$ τότε $\dfrac{1}{|\lambda|} > 1$ και όπως είδαμε το $\dfrac{1}{|\lambda|^\nu}$ αυξάνει απεριόριστα κάνοντας ισοδύναμα το αντίστροφό του $|\lambda|^\nu$ πολύ πολύ μικρό.

Έχοντας λοιπόν τις δύο αυτές προτάσεις μπορούμε να δούμε ότι στην περίπτωση που το $|\lambda| < 1$ το άθροισμα S_ν για ν πολύ μεγάλο γίνεται ίσο με:

$$S_\nu = \alpha_1 \frac{\lambda^\nu - 1}{\lambda - 1} \overset{\nu\to+\infty}{\cong} S = \frac{\alpha_1}{1-\lambda}$$

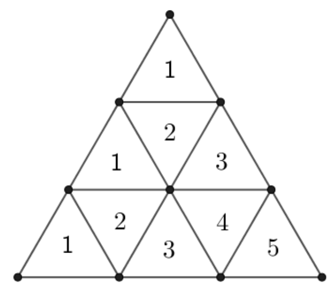
***Παράδειγμα* 6.3.3** Να βρείτε μια γεωμετρική πρόοδο που να έχει την ιδιότητα: το άθροισμα των τριών πρώτων όρων της να ισούται με 1 και το διπλάσιο του δευτέρου όρου της συν ένα, να ισούται με τον πρώτο όρο.

Απάντηση: Όταν ζητάμε ή έχουμε στην διάθεσή μας περιττού πλήθους όρων γεωμετρικής προόδου, καλό είναι να χρησιμοποιούμε τον εξής συμβολισμό (οικονομία στις πράξεις), αν υποθέσουμε ότι η πρόοδος έχει λογο $\lambda \neq 0$:

$$\frac{x}{\lambda}, \qquad x, \qquad x\lambda$$

[2]Για την ανισότητα του Bernoulli δείτε 2.4.21 σελίδα 40. Υπενθυμίζουμε: $\forall n \in \mathbb{N}$ και $\forall x \geq -1$ ισχύει $(1+x)^n \geq 1 + nx$.

στη πρώτη σειρά και στη τελευταία, που είναι και η βάση του ισοπλεύρου, υπάρχουν 5 μικρότερα τρίγωνα (3 σε ορθή θέση και 2 ανεστραμμένα) που δημιουργούνται από τα 3 σε ορθή θέση ισόπλευρα τρίγωνα. Πόσα σπιρτόξυλα θα χρειασθούμε για να κατασκευάσουμε ένα μεγάλο ισόπλευρο τρίγωνο με τον ίδιο τρόπο το οποίο θα έχει στη βάση του 2021 ισόπλευρα τρίγωνα (ορθά και ανεστραμμένα);



19. (Η υπόθεση Thomas Robert Malthus[3])
Ο Thomas Robert Malthus έγινε γνωστός από τις μελέτες του πάνω στην σχέση αύξησης πληθυσμού και βασικών διατροφικών αγαθών. Το 1798 δημοσίευσε το έργο "Δοκίμιο για την Αρχή του Πληθυσμού" από το οποίο πήραμε τις δύο παρακάτω φράσεις:

(α′) *Μπορούμε να υποθέσουμε ότι ο πληθυσμός, αν δεν υπάρξει κάποιο εμπόδιο, θα διπλασιάζετε κάθε 20 χρόνια και θα αυξάνεται από περίοδο σε περίοδο με γεωμετρική πρόοδο.*

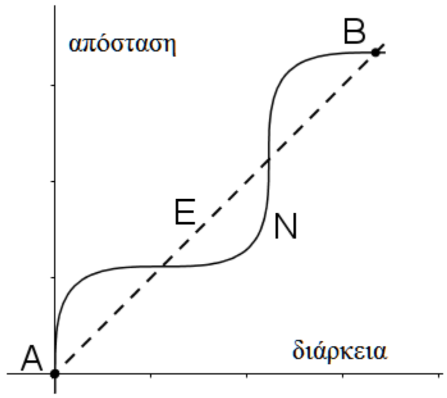
(β′) *Είμαστε σε θέση να πούμε, με βάση την τρέχουσα κατάσταση του κατοικίσιμου εδάφους, ότι η βιομηχανική παραγωγή με τις πλέον ευνοϊκές συνθήκες, δεν μπορεί να αυξήσει τα μέσα διατροφής ταχύτερα από μια αριθμητική πρόοδο.*

Το 1800 η Αγγλία είχε 8 εκατομύρια κατοίκους. Ας κάνουμε τις παρακάτω υποθέσεις:

- **[Υ.1] :** Ο πληθυσμός της Αγγλίας αυξάνεται με γεωμετρική πρόοδο κατα $2,8\%$ κάθε χρόνο.
- **[Υ.2] :** Το 1800 η αγροτική παραγωγή της Αγγλίας μπορούσε να θρέψει 10 εκατομύρια κατοίκους και με μια σχετική βελτίωση επέτρεπε να τραφούν 400.000 άτομα επιπλέον τον χρόνο ακολουθώντας αριθμητική πρόοδο.

Συμβολίζουμε με:

[3]Βρετανός κληρικός, λόγιος με επιρροή σε τομείς της πολιτικής οικονομίας και δημογραφίας. Έζησε το $1766 - 1834$.



1. Ο δρόμος είναι ανηφορικός από την πόλη A στην πόλη B;
   Λάθος. Το γράφημα δεν δίνει τέτοια πληροφορία.

2. Ο E είναι πάντα μπροστά από τον N;
   Λάθος, όχι πάντα. Η προβολή στον κάθετο άξονα της θέσης του καθενός δείχνει ότι υπάρχουν χρονικές στιγμές που συμβαίνει το αντίθετο.

3. Ο N διανύει μια αύξουσα πορεία ζικ-ζακ από την μία πλευρά του δρόμου προς την άλλη;
   Όχι ακριβώς. Το ζικ-ζακ δείχνει ότι ο N μηδενίζει σχεδόν αυτή την απόσταση που διανύει σε χρονικά διαστήματα.

4. Ο E φτάνει πρώτος στην πόλη B;
   Λάθος. Στο σημείο B φτάνουν την ίδια χρονική στιγμή.

5. Ο N είναι ταχύτερος του E;
   Λάθος. Υπάρχουν στιγμές κατα τις οποίες ο E είναι ταχύτερος του N.

6. Ο E τρέχει με σταθερή ταχύτητα;
   Σωστό. Η απόσταση και η διάρκεια είναι ποσά ανάλογα.

Κατασκευάζοντας το Γράφημα:

Το γράφημα της συνάρτησης οπτικοποιεί κάποιες χρήσιμες πληροφορίες που αφορούν την συμπεριφορά της. Θα το εκτιμήσουμε αυτό καλύτερα στην επόμενη τάξη, όπου θα αναπτύξουμε αποτελεσματικότερα εργαλεία για την μελέτη μιας συνάρτησης.

Ας δούμε ένα εύκολο παράδειγμα:

Ένα δοχείο έχει το σχήμα που φαίνεται παρακάτω. Το μεγάλο ορθογώνιο έχει βάση $9cm$ και ύψος $12cm$, ενώ το μικρό έχει βάση $3cm$ και ύψος $12cm$. Αν γεμίσουμε με νερό το δοχείο σε ύψος x σημειώνουμε με $f(x)$ τα λίτρα νερού στο δοχείο.

7.2.4 Ισότητα μεταξύ συναρτήσεων

Ορισμός 7.2.2 *Λέμε ότι δύο συναρτήσεις f και g ότι είναι* ***ίσες*** *αν:*

1. *Έχουν το ίδιο πεδίο ορισμού $D_f = D_g$.*

2. *$\forall x \in D_f: \ f(x) = g(x)$.*

Αν για κάθε $x \in I \subseteq D_f (= D_g)$ έχουμε $f(x) = g(x)$, τότε λέμε ότι οι f και g είναι ίσες στο υποσύνολο I.

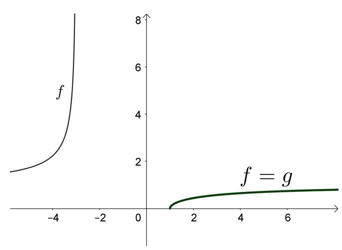
***Παράδειγμα* 7.2.3** Ας δούμε μερικά παραδείγματα:

1. Οι συναρτήσεις $f(x) = \sqrt{\dfrac{x-1}{x+3}}$ και $g(x) = \dfrac{\sqrt{x-1}}{\sqrt{x+3}}$. Είναι οι συναρτήσεις αυτές ίσες; και αν όχι, πότε αυτές είναι ίσες;
   Πρώτα βρίσκουμε τα πεδία ορισμού των δύο συναρτήσεων:

   (α΄) Για την f πρέπει $\dfrac{x-1}{x+3} \geq 0$, άρα, $D_f = (-\infty, -3) \cup [1, +\infty)$.

   (β΄) Για την g πρέπει $x - 1 \geq 0$ και $x + 3 > 0$, άρα, $D_g = [1 + \infty)$.

   Άρα , $D_f \neq D_g$. Οι συναρτήσεις δεν είναι ίσες! Είναι ίσες όμως στο $[1 + \infty)$, όπως φαίνεται και στο Σχήμα 7.1.



Σχήμα 7.1: Συναρτήσεις ίσες στο $[1, +\infty)$.

2. Δεν είναι αναγκαίο κριτήριο ισότητας συναρτήσεων το να έχουν ίδιο αλγεβρικό τύπο! Μπορεί να είναι διαφορετικός, μάλιστα τόσο πολύ διαφορετικός έτσι ώστε φαινομενικά τουλάχιστον να μην έχουν καμία ποιοτική σχέση μεταξύ τους. Δείτε στο παρακάτω Σχήμα τη τριγωνομετρική συνάρτηση $f(x) = \text{ημ}\, x$ και τη πολυωνυμική

$$g(x) = x - \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{120}x^5 - \frac{1}{5040}x^7 + \frac{1}{36288}x^9 - \frac{1}{6227020800}x^{13}$$

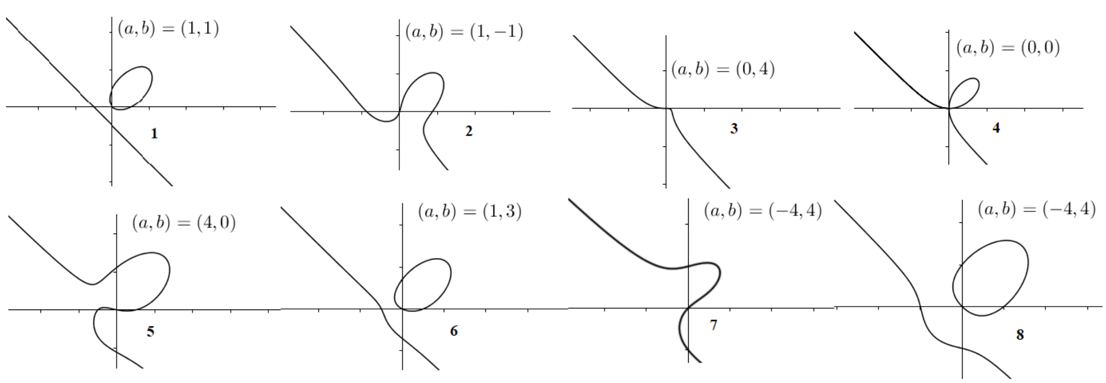
Απόδειξη: Το γράφημα $\mathscr{G}_f$ είναι το σύνολο των σημείων $M = (x_M, f(x_M))$ και το γράφημα $\mathscr{G}_g$ είναι το σύνολο των σημείων $N = (x_N, g(x_N))$. Αν M είναι ένα σημείο του γραφήματος $\mathscr{G}_f$ τέτοιο ώστε $f(x_M) = g(x_M)$, τότε το σημείο $(x_M, g(x_M)) \in \mathscr{G}_g$. Συνεπώς το σημείο M είναι κοινό σημείο των δύο γραφημάτων. ■

Ο παρακάτω πίνακας δίνει την αντιστοιχία μεταξύ γεωμετρίας και άλγεβρας σε ότι αφορά την επίλυση συναρτησιακών ανισώσεων και εξισώσεων.

Γράφημα	**’λγεβρα**
Τα σημεία **τομής με τον οριζόντιο άξονα**	Είναι οι ρίζες της εξίσωσης $f(x) = 0$
Τα σημεία του γραφήματος **πάνω** από τον οριζόντιο άξονα	Είναι οι λύσεις της ανίσωσης $f(x) > 0$
Τα σημεία του γραφήματος **κάτω** από τον οριζόντιο άξονα	Είναι οι λύσεις της ανίσωσης $f(x) < 0$
Τα **κοινά σημεία** δύο γραφημάτων	Οι ρίζες της εξίσωσης $f(x) = g(x)$
Τα σημεία που το γράφημα της $f(x)$ είναι **πάνω** από το γράφημα της $g(x)$	Είναι οι λύσεις της ανίσωσης $f(x) > g(x)$

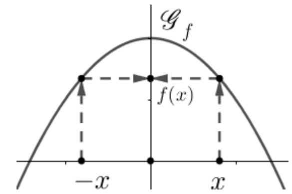
7.3.6 Παραδείγματα

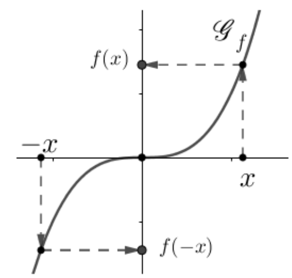
***Παράδειγμα* 7.3.1** Σκοπός της άσκησεις είναι να μάθουμε να σχεδιάζουμε γραφήματα στο λογισμικό Geogebra. Δημιουργείστε δύο δρομείς a και b στο διάστημα $[-5, 5]$ με βήμα 1. Να αποφανθείτε για την ορθότητα της αντιστοιχίας των τιμών του ζεύγους (a, b) με αυτό του γραφήματος της καμπύλης $x^3 + y^3 - 3xy - ax - by = 0$. Η καμπύλη αυτή είναι η γνωστή σαν το στροφοϊδές του Newton. Είναι τα παρακάτω γραφήματα, γραφήματα συναρτήσεων;



Απάντηση: Προφανώς τα γραφήματα δεν είναι γραφήματα συναρτήσεων, εκτός φυσικά του τρίτου.

1. *Μια συνάρτηση $f(x)$ λέγεται* ***άρτια*** *αν και μόνο αν το πεδίο ορισμού της είναι συμμετρικό ως προς το $O = (0,0)$, και $\forall x \in D_f \wedge -x \in D_f$ και $f(-x) = f(x)$. Η γραφική παράσταση μιας άρτιας συνάρτησης έχει άξονα συμμετρίας τον $y'y$.*
2. *Μια συνάρτηση $f(x)$ λέγεται* ***περιττή*** *αν και μόνο αν το πεδίο ορισμού της είναι συμμετρικό ως προς το $O = (0,0)$, και $\forall x \in D_f \wedge -x \in D_f$ και $f(-x) = -f(x)$. Η γραφική παράσταση μιας περιττής συνάρτησης έχει κέντρο συμμετρίας το $O = (0,0)$.*





Παράδειγμα **7.4.7** Δείξτε ότι η συνάρτηση $f(x) = \dfrac{1}{x}$ με $D_f = (-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$ είναι περιττή.

Απάντηση: Πρώτα το πεδίο ορισμού της είναι συμμετρικό ως προς το 0. Επίσης,

$$f(-x) = \frac{1}{-x} = -\frac{1}{x} = -f(x)$$

Άρα , είναι περιττή. ■

Παράδειγμα **7.4.8** Οι συναρτήσεις $f(x) = x^{2k}$, $\forall k \in \mathbb{N}$ είναι άρτιες, γιατί το πεδίο ορισμού είναι όλο το $\mathbb{R}$ και $f(-x) = (-x)^{2k} = x^{2k} = f(x)$.

Όλες οι συναρτήσεις $f(x) = x^{2k+1}$, $\forall k \in \mathbb{N}$ είναι περιττές, γιατί το πεδίο ορισμού είναι όλο το $\mathbb{R}$ και $f(-x) = (-x)^{2k+1} = -x^{2k} = -f(x)$.

Παράδειγμα **7.4.9** Όλες οι συναρτήσεις είναι ορισμένες στο $\mathbb{R}$. Να εξετάσετε αν είναι συμμετρικές ως προς τον άξονα $x'x$ ή το ως προς το σημείο $(0,0)$.

1. $f(x) = x^2 - 3$ **2.** $g(x) = (x-3)^2 + 6x$ **3.** $h(x) = x - \dfrac{1}{2+x^2}$ **4.** $k(x) = \dfrac{x}{1+x^2}$

Απάντηση: Όλες οι συναρτήσεις έχουν πεδίο ορισμού συμμετρικό ως προς 0. Για να δούμε την συμμετρία τους αρκεί να διαπυστωθεί αν είναι άρτιες ή περιττές.

1. $f(-x) = (-x)^2 - 3 = x^2 - 3 = f(x)$. Άρα , είναι άρτια και συνεπώς είναι συμμετρική ως προς τον άξονα $y'y$.

7.5 Η ΣΥΝΑΡΤΗΣΗ $f(x) = \alpha \cdot x + \beta$

7.5.1 Η ευθεία στη Γεωμετρία και στα Μαθηματικά

Ένα αντικείμενο που δεν μπορείτε με τις γνώσεις σας να δώσετε έναν αυστηρό καθαρά μαθηματικό ορισμό είναι το απλούστερο όλων, η ευθεία. Ο Ευκλείδης προσπάθησε να προσεγγίσει την ευθεία με δύο ορισμούς στα Στοιχεία:

1. Ορισμός 2: Γραμμή είναι αυτό που έχει μήκος χωρίς πλάτος.

2. Ορισμός 4: Ευθεία γραμμή είναι εκείνη η γραμμή, που κείται ομοιόμορφα μεταξύ των άκρων της.

S. Weil, Pisot, A. Weil, Dieudonné, Chabauty, Ehresmann, Delsarte

Αν παρακάμψουμε στον ορισμό της ευθείας τον πλατωνικό χαρακτήρα της έντασης, θα μείνει ένας οπτικός ορισμός που γενικεύεται σε οποιοδήποτε ζεύγος σημείων που επιλέγεται πάνω στη γραμμή. Μπορούμε να δούμε λοιπόν ότι μόνο η ομοιομέρεια θέτει την συνύπαρξη των επιμέρους τμημάτων πάνω στην ευθεία. Αυτό όμως δεν είναι μόνο χαρακτηριστικό της ευθείας αλλά και της περιφέρειας ενός κύκλου. Έτσι η αξιέπαινη πρόθεση αξιωματικοποίησης του Ευκλείδη μας οδηγεί σε μια αμφίβολη τυποποίηση. Υπάρχει μαθηματικός ορισμός της ευθείας στο πνεύμα των Νέων Μαθηματικών των Bourbaki, δείτε το μαθηματικό διάλογο, και την απόπειρα ενός συμβατικού ορισμού της ευθείας, σχετικό με το θέμα του μαθηματικού ορισμού της ευθείας στο: Gustave Choquet:*L'enseignement de la géométrie.* Hermann, Paris, 1964.

7.5.2 Η ευθεία σαν εξίσωση

Αν εξαιρέσουμε τον ορισμό, τα επόμενα σας είναι γνωστά από το Γυμνάσιο. Εμείς θα εμπλουτίσουμε το περιεχόμενο με τα μαθηματικά όπως κάναμε μέχρι τώρα.

Η εξίσωση που θα αναπαριστά μια ευθεία αντιστοιχεί κάθε φορά στο διαφορετικό γεωμετρικό πλαίσιο που βρισκόμαστε. Δηλαδή αν το σύστημά μας είναι καρτεσιανό ή πολικό τότε η εξίσωση θα είναι διαφορετική. Σημειώστε ότι το δικό μας γεωμετρικό πλαίσιο θα είναι το καρτεσιανό επίπεδο.

Μία ευθεία θα ορισθεί είτε από ένα σημείο A και μια κατεύθυνση που υλοποιείται από τη γωνία που ορίζεται από την ευθεία και τον οριζόντιο άξονα, είτε από δύο σημεία της. Στο καρτεσιανό σύστημα συντεταγμένων η εξίσωση μιας ευθείας είναι

$$y = \alpha \cdot x + \beta,\ \alpha, \beta \in \mathbb{R}$$

Τα σημεία $M(x, y)$ του επιπέδου που ικανοποιούν μια τέτοια γραμμική εξίσωση ορίζουν μια συνάρτηση. Πράγματι, αν πάρουμε δύο διαφορετικές τιμές του y τότε (α΄) Δείξτε ότι $\forall y \geq 5,\ \exists x \leq 0 :\ f(x) = y$.

(β΄) Να λυθεί η εξίσωση $x^2 + f(x) = 23$

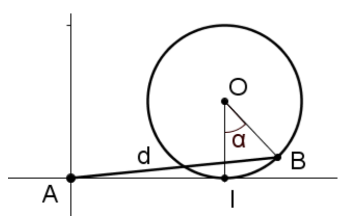
13. Έστω ορθογώνιο $AB\Gamma\Delta$ με $AB = 10cm$ και $B\Gamma = 4cm$. Έστω σημείο M της πλευράς AB. Η άσκηση ζητάει να κατασκευάσουμε το μοντέλο της συνάρτησης που να απεικονίζει την μεταβολή του εμβαδού του ημικυκλίου με διάμετρο το AM και το εμβαδόν του τριγώνου $MB\Gamma$.

    (α΄) Να αναπαραστήστε στο Geogebra την μεταβολή του εμβαδού του ημικυκλίου και του τριγώνου συναρτήσει της μεταβολής του M μέσα στην AB.

    (β΄) Υπάρχει περίπτωση τα δύο αυτά εμβαδά να γίνουν ίσα σε μια θέση του M; Πως φαίνεται αυτό στο μοντέλο που κατασκευάσατε στο Geogebra;

    (γ΄) Τώρα, θέλουμε να απαντήσετε στο δεύτερο ερώτημα χρησιμοποιώντας την άλγεβρα.

14. Ένας ωρολογοποιός μελετά την αντίσταση ενός ελατηρίου που έχει σταθερά άκρα A και B. Το άκρο B βρίσκεται στην περιφέρεια ενός τροχού με κεντρο περιστροφής το O και ακτίνα $1\ mm$. Η θέση εκκίνησης είναι το σημείο I του τροχού, όπως φαίνεται στο σχήμα:



Έστω α το μέτρο της γωνίας $\widehat{IOB}$. Ορίζουμε μια απεικόνιση $d(\alpha) = AB$ με $\alpha \in [0, 2\pi]$ ή $\alpha \in [0^o, 360^o]$.

    (α΄) Κατασκευάστε το μοντέλο της απεικόνισης d στο Geogebra. Η d είναι συνάρτηση;

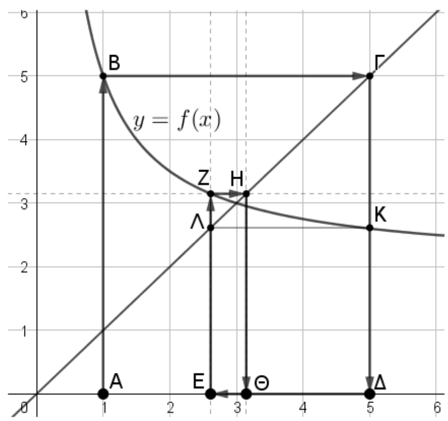
    (β΄) Βρείτε την μονοτονία και τα ακρότατα κατά προσέγγιση της καμπύλης $\mathscr{G}_d$.

    (γ΄) Υποθέτουμε ότι το ελατήριο έχει τις εξής οριακές καταστάσεις:

    i. σε θέση ηρεμίας έχει μήκος $2\ mm$, $d(0) = 2$,

    ii. δέχεται πιέσεις όταν το μήκος γίνει μικρότερο του $1.4\ mm$, $d(\alpha) \leq 1.4$, και θα υπολογίσουμε με την βοήθεια μιας βοηθητικής γεωμετρικής προόδου v_n το σημείο M που τείνει η αρχική ακολουθία. Τα βήματα 32β′, 32γ′ και 32δ′ είναι τεχνικά έτσι ώστε να ορίσουμε την γεωμετρική ακολουθία v_n η οποία μπορεί να δώσει τον γενικό όρο συναρτήσει του n. Έτσι, είναι εύκολο να ορίσουμε την αρχική ακολουθία συναρτήσει του n και να υπολογίσουμε το σημείο M.

(α′) i. Χαράσσουμε την καμπύλη στο Geogebra.



ii. $u_0 = 1$, μετά το $u_1 = f(u_0) = 2 + \dfrac{3}{u_0} = 5$. Η κατασκευή θα ακολουθήσει την πορεία $AB \to B\Gamma \to \Gamma\Delta$. Το $u_2 = f(u_1) = 2 + \dfrac{3}{u_1} = 2 + \dfrac{3}{5} = \dfrac{13}{5} = 2.6$. Η κατασκευή θα ακολουθήσει την πορεία ΔE. Στη συνέχεια, ο εντοπισμός του $u_3 = f(u_2) = 2 + \dfrac{3}{u_2} = 2 + \dfrac{3}{\frac{13}{5}} = \dfrac{41}{13} = 3.15$ και θα ακολουθήσει την πορεία $EZ \to ZH \to H\Theta$, κοκ.

iii. Η ακολουθία δεν είναι ούτε αύξουσα ούτε φθίνουσα. Αυτό φαίνεται από την μεταβολή των όρων $1, 5, 2.6, 3.15, \ldots$.

(β′) Οι τρείς πρώτοι όροι της ακολουθίας v_n είναι $v_0 = -1$, $v_1 = \dfrac{1}{3}$, $v_2 = -\dfrac{1}{9}$, $v_3 = \dfrac{1}{27}$, κοκ. Μπορούμε να ισχυρισθούμε ότι η ακολουθία είναι γεωμετρική με λόγο $\lambda = -\dfrac{1}{3}$.

(γ′) Αν $v_0 = -1$ και $\lambda = -\dfrac{1}{3}$ θα δείξουμε ότι $v_{n+1} = v_n\lambda$.

$$\begin{aligned} v_{n+1} =& \frac{u_{n+1}-3}{u_{n+1}+1} = \frac{2+\frac{3}{u_n}-3}{3+\frac{3}{u_n}+1} = \frac{-1+\frac{3}{u_n}}{4+\frac{3}{u_n}} \\ =& \frac{-u_n+3}{3u_n+3} = -\frac{1}{3}\cdot\frac{u_n-3}{1+u_n} = v_n\lambda \end{aligned}$$

(δ′) Ο n-οστός όρος της v_n είναι

$$v_n = \left(-\frac{1}{3}\right) v_0 = -\left(-\frac{1}{3}\right)^n$$

Άρα,

$$-\left(-\frac{1}{3}\right)^n = \frac{u_n-3}{u_n+1} \Leftrightarrow u_n = \frac{3-\left(-\frac{1}{3}\right)^n}{1+\left(-\frac{1}{3}\right)^n}$$

(ε′) Μπορούμε να ισχυρισθούμε ότι η ακολουθία για πολύ μεγάλα n τείνει στο σημείο τομής της f και της $y = x$.

Πράγματι, ο γενικός όρος της ακολουθίας

$$u_n == \frac{3-\left(-\frac{1}{3}\right)^n}{1+\left(-\frac{1}{3}\right)^n}$$

ο οποίος όταν το n αυξάνει απεριόριστα ο όρος $\left(-\dfrac{1}{3}\right)^n$ γίνεται 0. Άρα, $u_n = \dfrac{3}{1} = 3$.

Συμπέρασμα, η ακολουθία u_n τείνει στο 3 για n απείρως μεγάλο.

33. (α′) Παρατηρώ ότι $f_e(x) = f_e(-x)$.

(β′) Παρατηρώ ότι $f_o(x) = -f_o(-x)$.

(γ′) Ας υποθέσουμε ότι υπάρχουν δύο συναρτήσεις G και H άρτια και περιττή αντίστοιχα έτσι ώστε

$$\forall x: \; f(x) = G(x) + H(x) = f_e(x) + f_o(x)$$

Άρα,

$$G(x) + H(x) = f_e(x) + f_o(x) \Leftrightarrow G(x) - f_e(x) = f_o(x) - H(x)$$

Προφανώς: $p(\Omega) = \dfrac{N(\Omega)}{N(\Omega)} = 1$ *και το ενδεχόμενο* Ω *είναι βέβαιο ενώ το ενδεχόμενο* $\emptyset$ *είναι αδύνατο αφού* $p(\emptyset) = \dfrac{0}{N(\Omega)} = 0.$

Εκλαϊκευση του Νόμου των Μεγάλων Αριθμών

Με δύο λόγια ο Νόμος αυτός λέει ότι, αν σε ένα πείραμα τύχης το πλήθος των αποτελεσμάτων του δειγματικού χώρου είναι n αρκετά μεγάλο, τότε η συχνότητα ενός αποτελέσματος του δειγματικού χώρου είναι ίση με την πιθανότητά του.

Jacob Bernoulli
Εισήγαγε το 1713 τον Νόμο των μεγάλων αριθμών

Ας πάρουμε ένα κάλπικο νόμισμα. Ρίχνουμε n φορές το νόμισμα και σημειώνουμε πόσες φορές φέρνουμε κορώνα ή γράμματα.
Επαναλαμβάνουμε την ρίψη του νομίσματος για πολύ μεγάλες τιμές του n και μετρώντας τη συχνότητα εμφάνισης κορώνας ας υποθέσουμε ότι είναι 0.3. Τότε, μπορούμε να πούμε ότι η πιθανότητα να εμφανισθεί κορώνα είναι 0.3.

Έτσι αν θεωρήσουμε ένα πείραμα τύχης και παρατηρήσουμε σε ένα μεγάλο αριθμό N ενδεχομένων με εξίσου μεγάλο πλήθος n αποτελεσμάτων το καθένα, τότε αν κάθε αποτέλεσμα έχει πιθανότητα p η οποία δεν πλησιάζει ούτε στο 0 ούτε στο 1, τότε η διαφορά του p από την συχνότητα f του αποτελέσματος είναι της τάξης του $\dfrac{1}{\sqrt{n}}$ στο 95% των ενδεχομένων. Με άλλα λόγια, η συχνότητα f βρίσκεται στο διάστημα $\left[p - \dfrac{1}{\sqrt{n}}, p + \dfrac{1}{\sqrt{n}}\right]$.

10.3.1 Παραδείγματα

***Παράδειγμα* 10.3.1 Νόμος πιθανότητας:** Ας πάρουμε λοιπόν ένα ζάρι όχι αμερόληπτο. Ρίχνουμε πολλές φορές το ζάρι και γράφουμε τα αποτελέσματα της εμφάνισης των αριθμών $1, 2, \ldots, 6$ στον παρακάτω πίνακα.

Αριθμός	1	2	3	4	5	6
Συχνότητα του αριθμού	0.2	0.1	0.4	0.1	0.1	0.1

Τα αποτελέσματα του πειράματος τύχης είναι οι αριθμοί $1, 2, \ldots, 6$. Ο Νόμος των μεγάλων αριθμών μας επιτρέπει να επιλέξουμε το μοντέλο πιθανότητας να είναι η συχνότητα f_i κάθε αποτελέσματος a_i. Πράγματι το μοντέλο μας ικανοποιεί την σχέση

$$p(1) + p(2) + p(3) + p(4) + p(5) + p(6) = 0.2 + 0.1 + 0.4 + 0.1 + 0.1 + 0.1 + 0.1 = 1$$

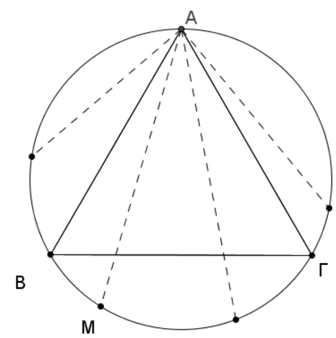
10.5.2 Το παράδοξο του Bertrand

Joseph Bertrand

Το παράδοξο του Bertrand είναι ένα πρόβλημα στη θεωρία πιθανοτήτων που τονίζει τους περιορισμούς της διαίσθησης στην θεωρία.

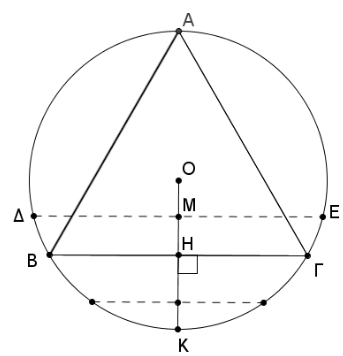
Ένα ισόπλευρο τρίγωνο είναι εγγεγραμμένο σε ένα κύκλο. Ζητάμε να βρούμε την πιθανότητα να χαράξουμε μια χορδή έτσι ώστε να είναι μεγαλύτερη της πλευράς του τριγώνου[5].

Ας θεωρήσουμε το ενδεχόμενο A να είναι χορφή του κύκλου μεγαλύτερου μήκους από την πλευρά του ισοπλεύρου τριγώνου.



1η Περίπτωση: Παρατηρείστε ότι αν επιλέξουμε δύο τυχαία σημεία στον κύκλο δεν αποκλείεται το ένα από αυτά να είναι μια κορυφή του τριγώνου. Οπότε για να είναι μεγαλύτερη η επιλεχθείσα χορδή πρέπει να βρίσκεται στο τόξο $\widehat{BM}\Gamma$.

Τότε όμως η πιθανότητα να βρίσκεται στο τόξο $\widehat{BM}\Gamma$ είναι ίση με $\frac{1}{3}$. Άρα , η πιθανότητα στην περίπτωση αυτή είναι $p(A) = \frac{1}{3}$.



2η Περίπτωση: Έστω OK μια τυχαία ακτίνα του κύκλου και $AB\Gamma$ το ισοσκελές τρίγωνο που έχει την πλευρά του $B\Gamma$ κάθετη στην OK. Έστω M ένα τυχαίο σημείο πάνω στην ακτίνα OK και η χορδή ΔE που έχει μέσο το σημείο M είναι μεγαλύτερη της πλευράς του τριγώνου αν βρίσκεται στο εσωτερικό του ευθ. τμήματος OH. Αλλά $OH = \frac{OK}{2}$, άρα η πιθανότητα να βρεθεί το σημείο στο εσωτερικό του OH είναι $\frac{1}{2}$. Άρα , η πιθανότητα στην περίπτωση αυτή είναι $p(A) = \frac{1}{2}$.

3η Περίπτωση: Έστω M ένα σημείο επιλεγμένο τυχαία στο εσωτερικό του κύκλου $\mathscr{G}$. Η χορδή θα είναι κάθετη στην OM . Η χορδή θα είναι μεγαλύτερη της πλευράς του τριγώνου αν η θέση του σημείου M θα είναι στο εσωτερικό του εγγεγραμμένου κύκλου $\mathscr{C}$. Αν R είναι η ακτίνα του κύκλου $\mathscr{G}$, τότε η ακτίνα

[5]Μπορεί επίσης να παρουσιαασθεί σαν δραστηριότητα ανα ομάδες.