

Όρια Συνάρτησης

Λυγάτσικας Ζήνων
Πρότυπο Γ.Ε.Λ. Βαρβακείου Σχολής

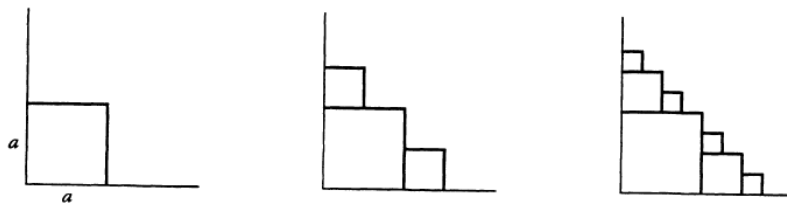
25 Μαΐου 2023

Κεφάλαιο 1

ΟΡΙΟ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗΣ ΣΤΟ x_0 .

1.1 Η έννοια του ορίου - Ιδιότητες

Ας υποθέσουμε ότι έχουμε ένα τετράγωνο πλευράς a . Κατασκευάζουμε τετράγωνα με μήκος πλευράς το $1/2a$ όπως στο παρακάτω σχήμα:



Συνεχίζοντας τη διαδικασία κατασκευής των τετραγώνων επ' άπειρο μας ενδιαφέρει το τελικό αποτέλεσμα. Μπορούμε να θέσουμε 3 ερωτήματα:

1. Αν συνεχίσουμε επ' άπειρο τη διαδικασία, μπορείτε να σκεφτείτε ποιό θα είναι το τελικό αποτέλεσμα;
2. Πόσα ενδιαμέσα βήματα πρέπει να κάνουμε έτσι ώστε να πάρουμε αυτό το τελικό;
3. Ποιό είναι το εμβαδόν του τελευταίου αυτού σχήματος σε συνάρτηση με το μήκος a , της πλευράς του αρχικού τετραγώνου;
4. Ας θεωρήσουμε ότι στο n -οστό βήμα το εμβαδόν που παράγεται από τη διαδικασία, είναι E_n . Έστω $(E_n)_{n \in \mathbb{N}}$ η ακολουθία αυτή. Το εμβαδόν του τελευταίου σχήματος είναι όρος της ακολουθίας E_n ;

Ας προσπαθήσουμε να απαντήσουμε στα ερωτήματα:

1. Το τελικό αποτέλεσμα (το όριο όπως θα λέμε στη συνέχεια) είναι μια ευθεία, εντελώς ξένη με τα σχήματα που την παράγουν. Αυτό έχει σημασία.
2. Προφανώς κάποιος θα πεί *άπειρα*. Αλλά, πως προσεγγίζω άπειρως έναν πραγματικό αριθμό; Πόσο άπειρο είναι το διάστημα μεταξύ $0.99999 \dots 9$ και 1 ;
3. Αν a^2 είναι το εμβαδόν του αρχικού τετραγώνου, στο τέλος της πρώτης διαδικασίας προσθέτουμε $2^1 \cdot a^2 \left(\frac{1}{2^1}\right)^2$ τ.μ. στη δεύτερη

Λύση: Έστω $\epsilon > 0$. Θεωρούμε $\delta = \epsilon$ και έχουμε: $0 < |x - 1| < \delta \Rightarrow \left| \frac{x^2 - 1}{x - 1} - 2 \right| = |x - 1| < \delta = \epsilon$.

$$\text{Άρα } \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 1}{x - 1} = 2.$$

Ορισμός 1.1.2 Έστω μια συνάρτηση $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$. Θεωρείστε $\beta \in \mathbb{R}$. Λέμε ότι το όριο της $f(x)$ είναι το β όταν το x τείνει στο α **απο αριστερά** και το συμβολίζουμε με $\lim_{x \rightarrow \alpha^-} f(x) = \beta$ αν και μόνον αν:

$$\begin{cases} \forall \epsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 : \\ \alpha - \delta < x < \alpha \Rightarrow |f(x) - \beta| < \epsilon \end{cases}$$

Ορισμός 1.1.3 Έστω μια συνάρτηση $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, και έστω επίσης $\beta \in \mathbb{R}$. Λέμε ότι το όριο της $f(x)$ είναι το β όταν το x τείνει στο α **απο δεξιά** και το συμβολίζουμε με $\lim_{x \rightarrow \alpha^+} f(x) = \beta$ αν και μόνον αν:

$$\begin{cases} \forall \epsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 : \\ \alpha < x < \alpha + \delta \Rightarrow |f(x) - \beta| < \epsilon \end{cases}$$

Θεώρημα 1.1.1 Έστω μια πραγματική συνάρτηση f με $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Τότε ισχύει ότι:

$$\lim_{x \rightarrow \alpha} f(x) = \beta \iff \lim_{x \rightarrow \alpha^-} f(x) = \beta \wedge \lim_{x \rightarrow \alpha^+} f(x) = \beta$$

■

Πόρισμα 1.1.2 Έστω f , $\alpha \in \mathbb{R}$, υποθέστε ότι είτε κάποιο από τα $\lim_{x \rightarrow \alpha^-} f(x)$, $\lim_{x \rightarrow \alpha^+} f(x)$ δεν υπάρχει ή ότι υπάρχουν και τα δύο αλλά δεν είναι ίσα. Τότε λέμε ότι το $\lim_{x \rightarrow \alpha} f(x)$ **δεν υπάρχει**. ■

Σημείωση 1.1.1 1. Απο τον ορισμό του ορίου, δες 1.1.1, δεν προκύπτει ότι το α πρέπει να ανήκει στο πεδίο ορισμού της συνάρτησης.

2. Το μήκος των διαστημάτων $(\alpha, \gamma) \cup (\gamma, \beta)$ στα οποία αναζητούμε το όριο μιας συνάρτησης όταν $x \rightarrow \alpha$, δεν παίζει ρόλο στην εύρεση του ορίου, για τον λόγο αυτό μπορούμε να πάμε όσο κοντά θέλουμε στο α .

3. Η μαθηματική ανάλυση είναι ο κλάδος των μαθηματικών στον οποίο οι ολικές και οι τοπικές ιδιότητες ενός μαθηματικού αντικειμένου είναι σημαντικές.

Θα λέμε **περιοχή του x_0** κάθε ένωση διαστημάτων $(x_0 - \delta, x_0) \cup (x_0, x_0 + \delta)$ με δ έναν θετικό πραγματικό. Έτσι για παράδειγμα, θα λέμε ότι μια συνάρτηση f έχει μια ιδιότητα **κοντά** στο x_0 , αν έχει μια από τις τρεις ιδιότητες:

(α') είτε να είναι ορισμένη στο $(x_0 - \delta, x_0) \cup (x_0, x_0 + \delta)$ για κάποιο δ και να έχει την ιδιότητα στο $(x_0 - \delta, x_0) \cup (x_0, x_0 + \delta)$,

(β') είτε να είναι ορισμένη στο $(x_0 - \delta, x_0)$ για κάποιο δ και να έχει την ιδιότητα στο $(x_0 - \delta, x_0)$,

(γ') είτε να είναι ορισμένη στο $(x_0, x_0 + \delta)$ για κάποιο δ και να έχει την ιδιότητα στο $(x_0, x_0 + \delta)$.

άρα,

$$-|x| \leq x \cdot \eta\mu\left(\frac{1}{x}\right) \leq |x|$$

$$\text{Άρα, } \lim_{x \rightarrow 0} \left(x \cdot \eta\mu\left(\frac{1}{x}\right) \right) = 0$$

■

Σημείωση 1.1.2 1. Αν τα όρια $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$ και $\lim_{x \rightarrow x_0} (f(x) + g(x))$ υπάρχουν, τότε υπάρχει και το όριο $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x)$ αφού $g(x) = (f(x) + g(x)) - f(x)$.

2. Αν το όριο $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$ υπάρχει και το όριο $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x)$ δεν υπάρχει, τότε δεν υπάρχει το όριο $\lim_{x \rightarrow x_0} (f(x) + g(x))$, αφού τότε θα υπήρχε το όριο της $g(x) = (f(x) + g(x)) - f(x)$.

3. Μπορεί τα όρια $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$ και $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x)$ να μην υπάρχουν, ενώ το όριο $\lim_{x \rightarrow x_0} (f(x) + g(x))$ να υπάρχει.

Για παράδειγμα: αν $f(x) = \begin{cases} 1 & \text{αν } x \geq 0 \\ -1 & \text{αν } x < 0 \end{cases}$ και $g(x) = \begin{cases} -1 & \text{αν } x \geq 0 \\ 1 & \text{αν } x < 0 \end{cases}$ τότε τα όρια των συναρτήσεων $f(x)$ και $g(x)$ για $x \rightarrow 0$ δεν υπάρχουν, ενώ το όριο της

$$f(x) + g(x) = \begin{cases} 0 & \text{αν } x \geq 0 \\ 0 & \text{αν } x < 0 \end{cases}$$

υπάρχει για $x \rightarrow 0$.

Ένα άλλο παράδειγμα συναρτήσεων με το ίδιο effect είναι οι συναρτήσεις

$$f(x) = \frac{1}{x}, \text{ και } g(x) = 1 - \frac{1}{x}$$

Τα όρια των δύο συναρτήσεων για $x \rightarrow 0$ δεν υπάρχουν, ενώ το όριο της $f(x) + g(x)$ στο 0 υπάρχει είναι ίσο με 1.

4. Αν τα πλευρικά όρια για $x \rightarrow x_0$ είναι διαφορετικά τότε το όριο $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$ δεν υπάρχει. Αλλά, μπορεί να συμβαίνει και το όριο και τα πλευρικά όρια απλά να μην υπάρχουν όπως στη συνάρτηση $f(x) = \eta\mu\frac{1}{x}$ για $x \rightarrow 0$. Το όριο της συνάρτησης αυτής (και τα πλευρικά όρια) **ΔΕΝ** υπάρχουν όπως θα δούμε παρακάτω.

5. Η ύπαρξη του ορίου **δεν συνεπάγεται μονοτονία!** Η συνάρτηση

$$f(x) = \begin{cases} x \cdot \eta\mu\frac{1}{x} & \text{αν } x \neq 0 \\ 0 & \text{αν } x = 0 \end{cases}$$

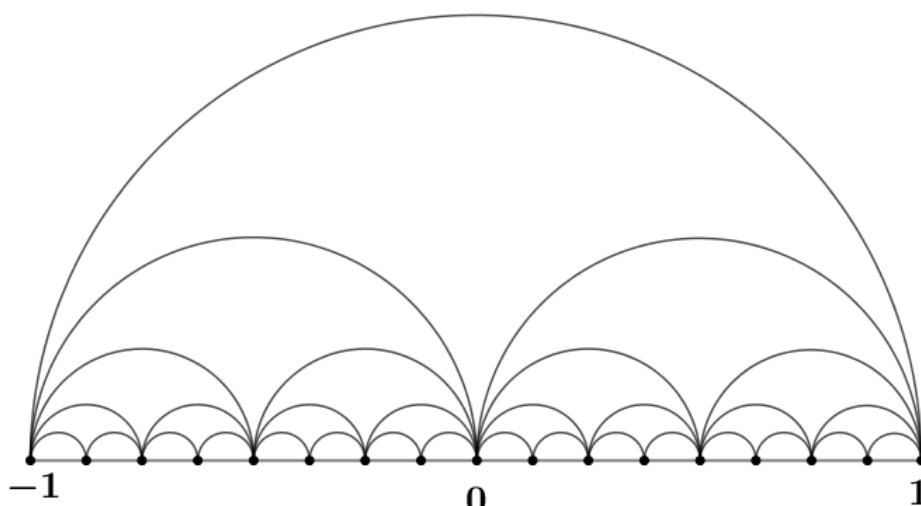
αριστερά και δεξιά του 0 δεν είναι μονότονη. Ενώ το όριο στο 0 υπάρχει και όπως ήδη έχουμε δει παραπάνω είναι 0.

1.2.3 Φύλλο Εργασίας

18. Για να δείτε το πόσο προσεκτικοί πρέπει να είμαστε στη διαισθητική παγίδα της μεταβολής του x και του $f(x)$, όταν λέμε ότι το $x \rightarrow x_0$, σας προτείνουμε να αιτιολογήσετε την αντίφαση στο εξής παράδοξο:

Θεωρείστε μια ημιπεριφέρεια κύκλου ακτίνας 1μ . Τότε, το μήκος αυτής είναι ίσο με π . Διαιρέστε την ακτίνα του κύκλου και πάρτε μια ακολουθία ημιπεριφερειών όπως στο σχήμα 1.1.

Τότε, η ημιπεριφέρεια με μήκος π είναι ίση με το άθροισμα των 2 ημιπεριφερειών ακτίνας $\frac{1}{2}$, αφού $\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2} = \pi$, το οποίο είναι ίσο με το άθροισμα των 4 ημιπεριφερειών με ακτίνα $\frac{1}{4}$, το οποίο είναι ίσο με το άθροισμα των 8 ημιπεριφερειών με ακτίνα $\frac{1}{8}$, το οποίο είναι ίσο με το άθροισμα των 16 ημιπεριφερειών με ακτίνα $\frac{1}{16}$ κοκ. Σε κάποια άπειρη επανάληψη της διαδικασίας το μήκος των ημιπεριφερειών θα γίνει πεπλατυσμένο έτσι ώστε να είναι οριακά ίσο με την διάμετρο του αρχικού κύκλου που είναι ίση με 2. Άρα, οριακά μπορούμε να πούμε ότι $\pi = 2$.



Σχήμα 1.1: Το παράδοξο του κύκλου που θέλει να γίνει ευθεία.

19. Έστω δύο συναρτήσεις:

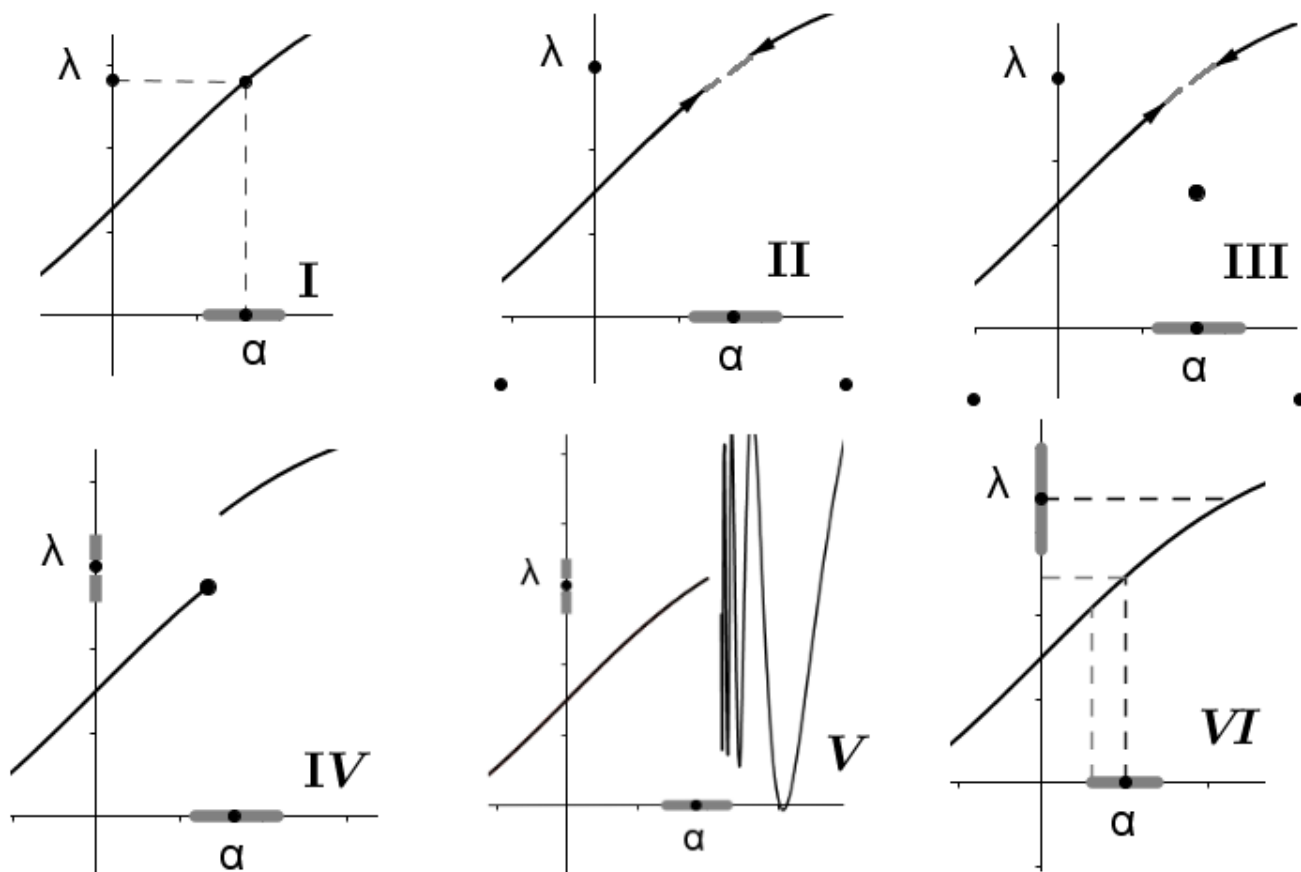
$$f(x) = 1 + x^4, \quad g(x) = \begin{cases} x^5 & , \quad x < 0 \\ 1 & , \quad x \geq 0 \end{cases}$$

να βρείτε τις τιμές του α ώστε να ισχύει

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - \alpha}{g(x)} = 0$$

1.2.6 Φύλλο Εργασίας

31. Όπως φαίνεται από τα παρακάτω διαγράμματα, ποιές συναρτήσεις έχουν όριο το λ όταν το x τείνει στο α ; Να αιτιολογήσετε.



Σχήμα 1.2: Ποιές από τις συναρτήσεις έχει όριο στο α ;

Κεφάλαιο 3

ΟΡΙΟ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗΣ ΣΤΟ ΑΠΕΙΡΟ

3.1 Όριο στο άπειρο

Ορισμός 3.1.1 Έστω f μια συνάρτηση.

1. Λέμε ότι η $f(x)$ έχει όριο το $+\infty$ όταν το x τείνει στο $+\infty$ (αντιστοιχα $-\infty$) ανν:
για κάθε διάστημα $I = (\lambda, +\infty)$, $\lambda \in \mathbb{R}$, όλα τα $f(x)$ είναι στο διάστημα I για οποιοδήποτε x αρκετά μεγάλο (αντίστοιχα $-x$ πολύ μεγάλο).
2. Λέμε ότι η $f(x)$ έχει όριο το $-\infty$ όταν το x τείνει στο $+\infty$ (αντιστοιχα $-\infty$) ανν:
για κάθε διάστημα $I = (-\infty, \lambda)$, $\lambda \in \mathbb{R}$, όλα τα $f(x)$ είναι στο διάστημα I για οποιοδήποτε x αρκετά μεγάλο (αντίστοιχα $-x$ πολύ μεγάλο).

Και στις δύο περιπτώσεις γράφουμε αντίστοιχα:

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = \pm\infty$$

3. Έστω a ένας πραγματικός αριθμός. Λέμε ότι η συνάρτηση f έχει όριο το a όταν το x τείνει στο $+\infty$ (αντίστοιχα στο $-\infty$), ανν:
σε κάθε ανοικτό διάστημα I που περιέχει το a , για οποιοδήποτε θετικό πραγματικό A οι τιμές $f(x)$ είναι όλες μέσα στο I για $A < x$ αρκετά μεγάλο (αντίστοιχα $x < -A$ πολύ μικρό). Λέμε επίσης, στην περίπτωση αυτή, ότι η $y = a$ είναι ασύπτωτη στην καμπύλη της συνάρτησης $f(x)$.
Γράφουμε δε:

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = a$$

Θεώρημα 3.1.1 (Sandwich) Έστω $f(x)$, $g(x)$, $h(x)$ με $f(x) \leq g(x) \leq h(x)$ για όλα τα $x \in (0, +\infty)$ ή $x \in (-\infty, 0)$, και υποθεθίστω ότι $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} h(x) = \lambda \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$. Τότε το $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} g(x)$ υπάρχει και είναι ίσο με το λ .

3.1.1 Πράξεις

Ισχύουν οι γνωστές ιδιότητες των ορίων στο x_0 με την προϋπόθεση ότι οι συναρτήσεις είναι καλά ορισμένες σε κατάλληλα σύνολα και δεν καταλήγουμε σε απροσδιόριστες μορφές.

3.2.2 Φύλλο Εργασίας

Λογαριθμικές συναρτήσεις

9. Υπάρχει το όριο $\lim_{x \rightarrow -\infty} \ln x$; Πως θα διακιοιολογούσατε μια τέτοια απάντηση;

10. Να βρεθούν τα όρια:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{\ln x - 2},$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2 \ln x - 1}{\ln x + 1}.$$

11. Να αποδείξετε ότι:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\ln(e^{x+1} + 1) - \ln(e^x + 2) + 5 \right) = 6$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left[\ln(5x - 2) - 3 \ln(x + 1) \right] = -\infty.$$

Τριγωνομετρικά όρια

12. Να αποδείξετε ότι δεν υπάρχουν τα παρακάτω όρια:

$$(a') \lim_{x \rightarrow +\infty} \eta\mu(x)$$

$$(\beta') \lim_{x \rightarrow 0} \eta\mu\left(\frac{1}{x}\right)$$

$$(\gamma') \lim_{x \rightarrow +\infty} \sigma\upsilon\nu(x)$$

$$(\delta') \lim_{x \rightarrow 0} \sigma\upsilon\nu\left(\frac{1}{x}\right)$$

Αλλαγή μεταβλητής

13. Να βρεθούν τα όρια:

$$(a') \lim_{y \rightarrow +\infty} \left(x \eta\mu \frac{1}{x} \right)$$

$$(\beta') \lim_{x \rightarrow +\infty} \eta\mu \left(\sqrt{x+1} - \sqrt{x} \right), \quad x \geq 0$$

$$(\gamma') \lim_{x \rightarrow -\infty} e^{x^2-x}$$

14. Να υπολογίσετε το όριο $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\sqrt{x^3 + x^2 + x + 1} - x\sqrt{x+1} \right).$

Κεφάλαιο 5

ΔΑΓΩΝΙΣΜΑΤΑ ΚΑΙ tapas

5.1 Μαθηματικά Διαγωνίσματα

1. Να βρείτε σε ποια γραφήματα αντιστοιχούν οι συναρτήσεις που ικανοποιούν τις παρακάτω ιδιότητες:

(α') i. $D_f = [-1, 1]$.

ii. $f(-1) = f(0) = f(1) = 0$.

iii. $\lim_{x \rightarrow -1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1^-} f(x) = 1$.

(β') i. $D_f = [-2, 1]$.

ii. $f(-2) = f(0) = f(1) = 0$.

iii. $\lim_{x \rightarrow -2^+} f(x) = 2, \lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 0$ και $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = 1$.

(γ') i. $D_f = (-\infty, 0]$.

ii. $f(-2) = f(0) = 1$.

iii. $\lim_{x \rightarrow -2} f(x) = +\infty$.

(δ') i. $D_f = (0, +\infty)$.

ii. $f(1) = 0$.

iii. $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = -\infty$.

(ε') i. $f(-3) = f(0) = f(2) = 0$.

ii. $\lim_{x \rightarrow -2^-} f(x) = +\infty, \lim_{x \rightarrow -2^+} f(x) = -\infty$ και $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = +\infty$.

(ς') i. $f(-1) = 0, f(0) = 1$ και $f(1) = 0$.

ii. $\lim_{x \rightarrow -1^-} f(x) = 0, \lim_{x \rightarrow -1^+} f(x) = +\infty$.

iii. $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = 1$ και $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = +\infty$.

7. Να δώσετε ένα παράδειγμα που δεν ισχύει η παρακάτω ιδιότητα των ορίων:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} (f(x) + g(x)) = \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) + \lim_{x \rightarrow x_0} g(x)$$

8. Να βρείτε τα όρια, εφ' όσον υπάρχουν, των συναρτήσεων:

$$(α') \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{|x^2 - 5x| + x}{x^2 - 3x + 2}$$

$$(β') \lim_{x \rightarrow 1} f(x) \text{ αν } \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x - 4}{f(x)} = +\infty$$

$$(γ') \lim_{x \rightarrow +\infty} (|x| + 1)^{\sigma_{\mathbb{N}}(x) + 2}$$

9. Δίδεται συνεχής συνάρτηση $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ τέτοια ώστε

$$f(2) = 6 \text{ και } f(x) - f(f(x)) = 8$$

$$\text{Να υπολογισθεί το } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-f(2)x^8 + 2x - 100}{f(6)x^{35} - 100x^2 + 2x - 100}.$$

12. Αν $f(x) = \begin{cases} x - \frac{\eta\mu(x)}{x} & , \quad x \neq 0 \\ 0 & , \quad x = 0 \end{cases}$. Να βρεθεί το όριο $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^k f(x)$, $k \in \mathbb{Z}$.

Απάντηση: Επειδή

$$-1 \leq \eta\mu(x) \leq 1 \Rightarrow -\frac{1}{x} \leq \frac{\eta\mu(x)}{x} \leq \frac{1}{x}, \quad x \gg 0$$

Άρα, $\boxed{\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\eta\mu(x)}{x} = 0}$.

Για $k \in \mathbb{Z}$ διακρίνουμε τις εξής περιπτώσεις που διαφοροποιούν το όριο της συνάρτησης:

$$k < -1, \quad k = -1, \quad k = 0, \quad k > 0$$

1. $k > -1$

$$\frac{1}{x^{-k}} \left(x - \frac{\eta\mu(x)}{x} \right) = \frac{1}{x^{-k-1}} - \frac{1}{x^{-k}} \frac{\eta\mu(x)}{x}$$

Άρα,

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} x^k f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{x^{-k-1}} - \frac{1}{x^{-k}} \frac{\eta\mu(x)}{x} \right) = 0 - 0 \cdot 0 = 0$$

2. $k = -1$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} x^k f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} \left(x - \frac{\eta\mu(x)}{x} \right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 - \frac{1}{x} \frac{\eta\mu(x)}{x} \right) = 1 - 0 \cdot 0 = 1$$

3. $k = 0$ $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^k f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(x - \frac{\eta\mu(x)}{x} \right) = +\infty - 0 = +\infty$.

4. $k > 0$ $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^k f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} x^k \left(x - \frac{\eta\mu(x)}{x} \right) = +\infty(+\infty - 0) = +\infty$.

■