

Συνέχεια Συναρτήσεων



Λυγάτσικας Ζήνων
Πρότυπο Γ.Ε.Λ. Βαρβακείου Σχολής

25 Μαΐου 2023

Κεφάλαιο 1

Θεωρία

1.1 Ορισμός

Ορισμός 1.1.1 Μια πραγματική συνάρτηση $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ λέμε ότι είναι **συνεχής στο** $x_0 \in A$ αν και μόνο αν:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$$

Με άλλα λόγια

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f\left(\lim_{x \rightarrow x_0} x\right)$$

Γραφικά αυτό σημαίνει ότι δεν θα σηκώσουμε το μολύβι από το χαρτί για να χαράξουμε σε όλο το μήκος τη γραφική παράσταση της συνάρτησης.

Ορισμός 1.1.2 Μια συνάρτηση f θα λέμε ότι είναι **συνεχής σε ένα ανοικτό διάστημα** (α, β) του πεδίου ορισμού της, αν είναι συνεχής σε κάθε σημείο του (α, β) .

Μια συνάρτηση f θα λέμε ότι είναι **συνεχής σε ένα κλειστό διάστημα** $[\alpha, \beta]$ του πεδίου ορισμού της, αν είναι συνεχής σε κάθε σημείο του (α, β) και:

$$\lim_{x \rightarrow \alpha^+} f(x) = f(\alpha) \text{ και } \lim_{x \rightarrow \beta^-} f(x) = f(\beta)$$

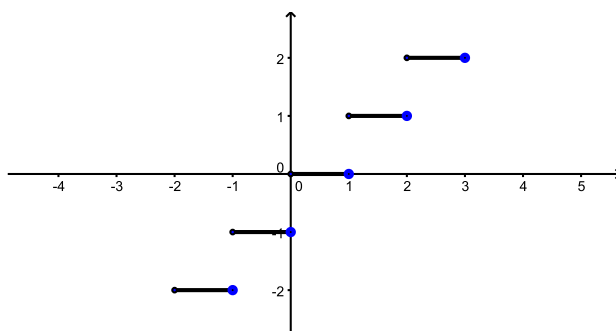
1.1.1 Παραδείγματα

Παράδειγμα 1.1.1 Όλες οι πολυωνυμικές συναρτήσεις είναι συνεχείς αφού:

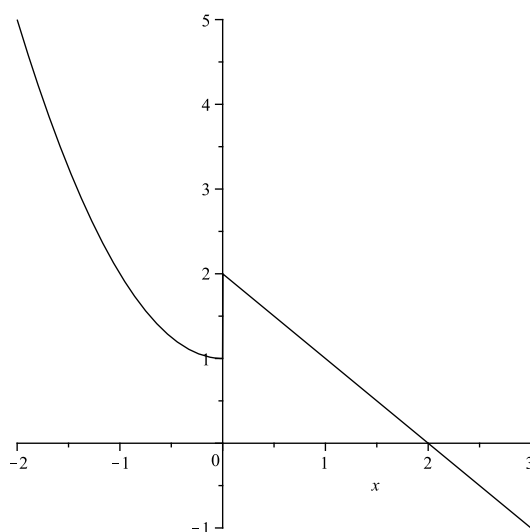
$$\lim_{x \rightarrow x_0} p(x) = p(x_0)$$

Παράδειγμα 1.1.2 Όλες οι ρητές πολυωνυμικές συναρτήσεις $f(x) = \frac{p(x)}{q(x)}$ είναι συνεχείς αφού $\forall x_0 \in D_f$:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{p(x)}{q(x)} = \frac{p(x_0)}{q(x_0)}$$



Σχήμα 1.2: Αντιπαράδειγμα 1.1.1



Σχήμα 1.3: Αντιπαράδειγμα 1.1.2

Αντιπαράδειγμα 1.1.3 Η συνάρτηση $f(x) = \begin{cases} \frac{x^2 - 1}{x - 1} & \text{αν } x \neq 1 \\ 3 & \text{αν } x = 1 \end{cases}$ επειδή δεν είναι συνεχής στο 1, δες σχήμα 1.4, αφού:

$$\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = 2 \neq f(1) = 3$$

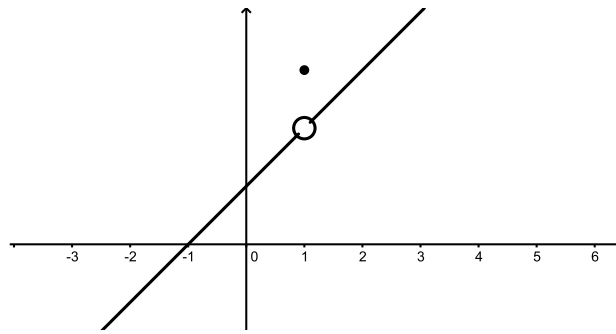
Αντιπαράδειγμα 1.1.4 Η συνάρτηση του *Dirichlet*. Η συνάρτηση $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ορισμένη από τον τύπο

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{αν } x \in \mathbb{Q} \\ 0 & \text{αν } x \in \mathbb{Q}_a \end{cases}$$

δεν είναι συνεχής στο πεδίο ορισμού της.

Για να αποδείξουμε ότι δεν είναι συνεχής χρειαζόμαστε 2 πράγματα:

1. Γνώση της πυκνότητας των ρητών και αρρήτων σε ένα διάστημα του συνόλου $\mathbb{R}$, δηλαδή το θεώρημα:



Σχήμα 1.4: Αντιπαράδειγμα 1.1.3

Θεώρημα 1.1.1 *Ανάμεσα από δύο πραγματικούς αριθμούς a και b με $a < b$, υπάρχουν τουλάχιστον ένας ρητός και ένας άρρητος αριθμός.*

και

2. τον αυστηρό ορισμό της συνέχειας.

$$\forall \epsilon > 0 \exists \delta(\epsilon) > 0 \quad |x - x_0| < \delta(\epsilon) \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \epsilon \quad (1.1)$$

Η ασυνέχεια σε ένα σημείο x_0 του ορισμού της συνάρτησης θα είναι η άρνηση της πρότασης 1.1, ή

$$\exists \epsilon > 0 \forall \delta(\epsilon) > 0 \quad |x - x_0| < \delta(\epsilon) \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| > \epsilon \quad (1.2)$$

Άρα, το παράδειγμα ζητάει να βρούμε ουσιαστικά ένα ϵ έτσι ώστε $|f(x) - f(x_0)| > \epsilon$ της πρότασης (1.2).

Ας υποθέσουμε ότι ο x_0 είναι ρητός (άρρητος). Τότε σε μια περιοχή του x_0 υπάρχει x άρρητος (ρητός) έτσι ώστε:

$$x_0 - \delta < x < x_0 + \delta$$

Τότε όμως $|f(x) - f(x_0)| = |0 - 1| = 1$ ($|1 - 0| = 1$). Άρα, υπάρχει $\epsilon < 1$ έτσι ώστε να ισχύει η πρόταση (1.2) και η συνάρτηση f δεν είναι συνεχής! ■

Απόδειξη του θεωρήματος 1.1.1

1. Ύπαρξη ρητού

Ας υποθέσουμε ότι $a \geq 0$ και $a < b$. Τότε $b - a \neq 0$. Έτσι,

$$\frac{1}{b-a} \in \mathbb{R}$$

Από την ιδιότητα του Αρχιμήδη

$$\exists n \in \mathbb{N} : n > \frac{1}{b-a}$$

$$\text{Έστω: } M := \left\{ x \in \mathbb{R} : \frac{x}{n} > a \right\}.$$

1.1.3 Πράξεις

1. Αν οι συναρτήσεις f και g είναι συνεχείς στο x_0 , τότε είναι επίσης συνεχείς οι συναρτήσεις:

$$f + g, \quad c \cdot f \text{ όπου } c \in \mathbb{R}, \quad f \cdot g, \quad |f|, \quad \frac{f}{g}, \quad \sqrt[n]{f}$$

2. Αν η συνάρτηση f είναι συνεχής στο x_0 και η g συνεχής στο $f(x_0)$, τότε είναι συνεχής και η σύνθεσή τους $g \circ f$ στο x_0 .

Θεώρημα 1.1.2 *Αν f μια γνησίως φθίνουσα (γν. αύξουσα) στα διαστήματα $(\alpha, \beta]$, (β, γ) και συνεχής στο β (όπως θα δούμε στην απόδειξη, αρκεί να είναι συνεχής δεξιά του β). Τότε η f είναι γνησίως φθίνουσα (γν. αύξουσα) στην ένωση $(\alpha, \beta] \cup (\beta, \gamma) = (\alpha, \gamma)$.*

Απόδειξη: Έστω f γν. φθίνουσα στα διαστήματα $(\alpha, \beta]$ και (β, γ) . Για να δείξουμε ότι είναι γν. φθίνουσα και στην ένωση (α, γ) αρκεί να δείξουμε ότι είναι φθίνουσα στο $[\beta, \gamma)$ δηλ. αν $\beta < c < \gamma$ τότε $f(\beta) > f(c)$.

Ας εκμεταλλευτούμε το ότι η f είναι γν. φθίνουσα στο (β, γ) . Έστω $\beta < d < \frac{\beta + c}{2}$, τότε

$$f(d) > f\left(\frac{\beta + c}{2}\right) > f(c) > f(\gamma)$$

Αλλά η f είναι συνεχής στο β , άρα,

$$\lim_{d \rightarrow \beta^+} f(d) > \lim_{d \rightarrow \beta^+} f\left(\frac{\beta + c}{2}\right)$$

Τότε όμως $f(\beta) > f\left(\frac{\beta + c}{2}\right) > f(\gamma)$. ■

Θεώρημα 1.1.3 *Μία συνεχή συνάρτηση ορισμένη σε διάστημα I είναι 1-1 αν και μόνο αν είναι γνησίως μονότονη.*

Απόδειξη: Δες Άσκηση 7 ερώτημα 7β' σελίδα 34. Θα δείξουμε ότι

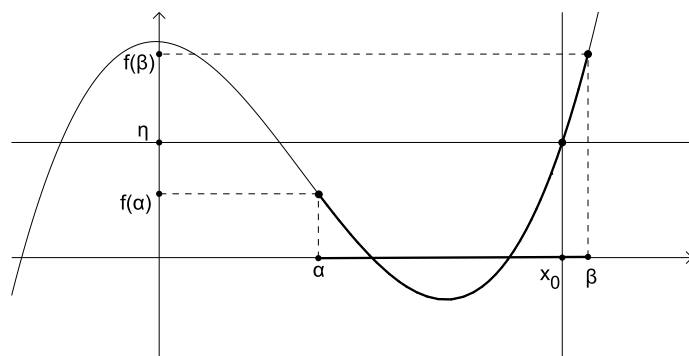
$$\forall a, b, c \in I \text{ } b \text{ ανάμεσα από τα } a \text{ και } c \Rightarrow f(b) \text{ είναι ανάμεσα από } f(a) \text{ και } f(c) \quad (1.3)$$

Υποθέτουμε, με απαγωγή σε άτοπο, ότι $a < b < c$ και ότι το $f(b)$ είναι εξωτερικό του διαστήματος $f(a)$ και $f(c)$, για παράδειγμα $f(b) < f(a) < f(c)$. Έστω $v \in (f(b), f(a))$. Το θεώρημα των ενδιάμεσων τιμών βεβαιώνει την ύπαρξη του $\alpha \in (a, b)$ και $\beta \in (b, c)$ έτσι ώστε $v = f(\alpha) = f(\beta)$ το οποίο είναι αντίθετο με το ότι η f είναι 1-1.

Δείξαμε λοιπόν ότι η σχέση 1.3 ικανοποιείται. Θα δείξουμε ότι η συνάρτηση είναι γνησίως μονότονη.

Επιλέγουμε $a, b \in I$ με $a < b$ και υποθέτουμε για παράδειγμα $f(a) < f(b)$. Θα δείξουμε ότι:

$$\forall x, y \in I, \quad x < y \Rightarrow f(x) < f(y)$$



Σχήμα 1.8: Θεώρημα 1.3.1.

Σημείωση 1.3.1 Το θεώρημα βεβαιώνει ότι η εικόνα ενός διαστήματος μέσω μιας συνεχούς συνάρτησης είναι διάστημα, αλλά **δεν βεβαιώνει τη φύση** του διαστήματος. Αν ένα διάστημα για παράδειγμα είναι κλειστό - ανοικτό τότε η εικόνα του μέσω μιας συνεχούς συνάρτησης δεν γνωρίζουμε αν αείναι κλειστό - ανοικτό ή κλειστό ή οτιδήποτε άλλο. Για παράδειγμα η εικόνα του $(-1, 1)$ μέσω της συνάρτησης $f(x) = x^2$ είναι το διάστημα $[0, 1)$.

Σημείωση 1.3.2 Είναι εύλογο να αναρωτηθούμε αν το ότι η εικόνα ενός διαστήματος είναι διάστημα διαμέσου μιας συνάρτησης, είναι αποτέλεσμα της συνέχειας της συνάρτησης στο διάστημα αυτό ή όχι.

Η απάντηση είναι αρνητική: αν η συνάρτηση **δεν είναι συνεχής στο διάστημα Δ δεν συνεπάγεται ότι η εικόνα $f(\Delta)$ δεν είναι διάστημα! Δηλαδή μπορεί και να είναι διάστημα.**

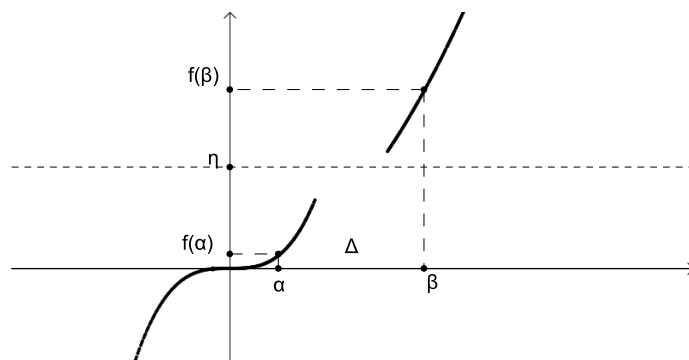
Πρόκειται για το γνωστό επιχείρημα **πλάνης του αντιθέτου**.

$$\begin{array}{c} p \Rightarrow q \\ \hline \neg p \\ \hline \therefore \neg q \end{array}$$

Το επιχείρημα αυτό, όπως λέει και η λέξη, είναι ψευδές γενικά. Στο παράδειγμά μας λοιπόν, αν $p := "$ f συνεχής στο διάστημα Δ " και $q := "$ $f(\Delta)$ είναι διάστημα ", τότε η άρνηση $\neg p$ δεν συνεπάγεται την άρνηση της q !

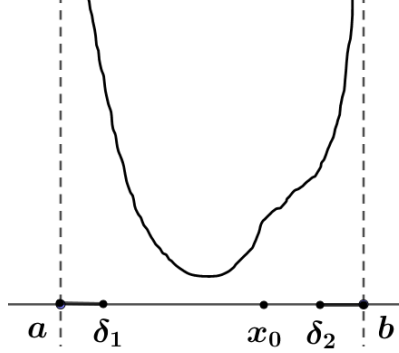
Για να το δούμε αυτό θα δώσουμε ένα παράδειγμα.

Ας προσέξουμε τα δύο σχήματα: στο σχήμα 1.9 η συνάρτηση δεν είναι συνεχής στο διάστημα Δ και για την συγκεκριμένη συνάρτηση, το θεώρημα 1.3.1 δεν ισχύει, αφού για το σημείο η της εικόνας $f(\Delta)$, δεν υπάρχει x_0 έτσι ώστε $f(x_0) = \eta$. Αλλά δεν είναι υπεύθυνη η ασυνέχεια για αυτό, όπως δείχνει το παράδειγμα της συνάρτησης στο σχήμα 1.10!



Σχήμα 1.9: Σημείωση 1.3.2, περίπτωση ασυνέχειας και μονοτονίας.

Λέμε ότι η $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = +\infty$ αν $\forall M > 0$ υπάρχει περιοχή του a έτσι ώστε $\forall x$ στην περιοχή αυτή, $f(x) > M$.



Αυτό θα μας δώσει τον τρόπο να επιλέξουμε τα δύο άκρα δ_1 και δ_2 . Ας πάρουμε ένα τυχαίο σημείο x_0 του (a, b) . Τότε αφού

$$\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = +\infty, \text{ υπάρχει } \delta_1 \in (a, x_0) \text{ έτσι ώστε } \forall x \in (a, \delta_1), f(x) > f(x_0) \quad (2.1)$$

Ομοίως,

$$\lim_{x \rightarrow b^-} f(x) = +\infty, \text{ υπάρχει } \delta_2 \in (x_0, b) \text{ έτσι ώστε } \forall x \in (\delta_2, b), f(x) > f(x_0) \quad (2.2)$$

Αλλά στο διάστημα $[\delta_1, \delta_2]$ υπάρχει ελάχιστο

$$\exists \zeta \in [\delta_1, \delta_2] : m = f(\zeta), \text{ με } f(x) \geq m, \forall x \in [\delta_1, \delta_2] \quad (2.3)$$

Απο (2.9), (2.10) και (2.11) έχουμε:

$$f(x) > f(x_0) \geq m = f(\zeta), \forall x \in (a, x_0)$$

και

$$f(x) > f(x_0) \geq m = f(\zeta), \forall x \in (x_0, b)$$

Άρα, $\forall x \in (a, b), \exists \zeta \in [\delta_1, \delta_2] : f(x) \geq f(\zeta)$. ■

2. **Αν μια συνεχής συνάρτηση $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ είναι περιοδική με περίοδο $T > 0$, τότε έχει ολική μέγιστη και ελάχιστη τιμή;**

Απόδειξη: Αφού η f είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$, είναι επίσης συνεχής και στο $[0, T]$. Αλλά τότε έχει μέγιστη M και ελάχιστη m τιμή με:

- $\exists c \in [0, T]$ έτσι ώστε $\forall x \in [0, T] : f(c) = M \geq f(x)$ και
- $\exists d \in [0, T]$ έτσι ώστε $\forall x \in [0, T] : f(d) = m \leq f(x)$.

Αλλά η f είναι περιοδική

Επίσης: $\forall x \in D_f, e^{x^2} - 1 < e^{x^2} - \eta\mu(x)$, άρα:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln(e^{x^2} - 1) \leq \lim_{x \rightarrow +\infty} \ln(e^{x^2} - \eta\mu(x)) \quad (2.5)$$

Αλλά, $\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln(e^{x^2} - 1) = +\infty$. Επομένως, από 2.4 και 2.5,

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$$

Επομένως, $\exists x \in (0, +\infty)$ έτσι ώστε $\forall r > 0, f(x) > r$. Επίσης, $f(0) = 0$, άρα από το θεώρημα των ενδιαμέσων τιμών η συνάρτηση παίρνει τουλάχιστον μια φορά όλες τις τιμές $r > 0$. Επομένως υπάρχει τουλάχιστον μια ρίζα της εξίσωσης $f(x) = r$.

- ii. Για $x \in (-\infty, 0)$: $f(0) = 0$. Το δε όριο στο $-\infty$ είναι, όπως και προηγουμένως, $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty$.

Επομένως, $\exists x \in (-\infty, 0)$ έτσι ώστε $\forall r > 0, f(x) > r$. Επίσης, $f(0) = 0$, άρα από το θεώρημα των ενδιαμέσων τιμών η συνάρτηση παίρνει τουλάχιστον μια φορά όλες τις τιμές $r > 0$. Επομένως υπάρχει τουλάχιστον μια ρίζα της εξίσωσης $f(x) = r$.

■

5. Αν $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ είναι μια συνεχής και γνησίως φθίνουσα συνάρτηση, δείξτε τότε ότι η f έχει ένα και μόνο ένα σταθερό σημείο. Δηλαδή, $\exists! x \in \mathbb{R}$ τέτοιο ώστε $f(x) = x$.

Απόδειξη: **Μοναδικότητα:** Έστω $g(x) = f(x) - x$. Η g είναι γνησίως φθίνουσα και $1 - 1$ άρα δεν μπορεί να μηδενίζεται σε περισσότερα από ένα σημεία.

Υπαρξη: Με απαγωγή σε άτοπο. Αν η g δεν μηδενίζεται είναι αυστηρά θετική ή αυστηρά αρνητική. Αν $\forall x \in \mathbb{R}$ έχουμε $g(x) > 0$ τότε $f(x) > x$ και επειδή $\lim_{x \rightarrow +\infty} x = +\infty, \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$. Αλλά αυτό είναι άτοπο γιατί αφού η f είναι γνησίως φθίνουσα το $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \inf f(x)$ που είναι ένα μέγιστο κάτω φράγμα, ($\inf$), στους πραγματικούς αριθμούς δεν μπορεί να είναι το ελάχιστο μέγιστο φράγμα $+\infty$ ($\sup$), ταυτόχρονα. ■

6. Έστω $A = \{x/x \in \mathbb{R} \wedge x \in (-1, +\infty)\}$. Να βρεθούν οι συναρτήσεις $f: A \rightarrow A$ έτσι ώστε:

$$(\alpha') f(x + f(y) + xf(y)) = y + f(x) + yf(x)$$

$$(\beta') \text{ Η } \frac{f(x)}{x} \text{ είναι αυστηρώς αύξουσα στα } (-1, 0) \text{ και } (0, +\infty).$$

Λύση: Θέτω στην (6α') $x = y > -1$

$$f(x + f(x) + xf(x)) = x + f(x) + xf(x) \quad (2.6)$$

Άρα, για κάθε $x > -1$ το σημείο $x + f(x) + xf(x)$ είναι ένα σταθερό σημείο της f . Αν $\alpha \neq 0$ είναι ένα σταθερό σημείο της f τότε $\frac{f(\alpha)}{\alpha} = 1$. Από το (6β') η μονοτονία της $\frac{f(x)}{x}$ επιτρέπει,

Επίσης, $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = -\infty$ και $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$. Άρα, από το θεώρημα ενδιάμεσων τιμών επειδή $0 \in (-\infty, +\infty)$, υπάρχει $\xi \in (0, +\infty)$ έτσι ώστε $f(\xi) = 0$. ■

4. Να βρεθεί ο αριθμός των ριζών της $f(x) = x^5 - x^2 + 3$ και για κάθε μια ρίζα να βρείτε το διάστημα στο οποίο αυτή ανήκει.

Απάντηση: Η f είναι 1-1 και γνησίως αύξουσα στο $(-\infty, 0)$ γιατί και η $x^5 + 3$ και η $-x^2$ είναι γνησίως αύξουσες.

Για $x < 0$. Επειδή $f(-2) = -2^5 - 4 + 3 = -33$ και $f(-1) = 1$ από ΘΕΤ και τη μονοτονία της f υπάρχει μοναδική ρίζα $\rho_1 \in (-2, -1)$.

Για $x \in [0, 1]$, $-1 \leq x^3 - 1 \leq 0 \Leftrightarrow |x^2(x^3 - 1)| \leq x^2 \leq 1 \Rightarrow -1 + 3 \leq x^2(x^3 - 1) + 3 < 1 + 3 \Rightarrow 0 < 2 \leq x^2(x^3 - 1) + 3$. Άρα, δεν υπάρχουν ρίζες στο διάστημα αυτό.

Για $x \in (1, +\infty)$ τότε $f(x) = x^2(x^3 - 1) + 3 > 0$. Άρα, δεν έχει ρίζες στο διάστημα αυτό.

Συμπέρασμα: Η μοναδική ρίζα λοιπόν βρίσκεται στο διάστημα $(-2, -1)$. ■

5.

(α') i. Δείξτε ότι η $g(x) = -2(x-3)(x-4) - (x-2)(x-4) - 3(x-2)(x-3) = 0$ έχει μόνο δύο πραγματικές ρίζες.

ii. Βρείτε τις ρίζες και τα ακρότατα της εξίσωσης $g^2(x) = 0$.

(β') Έστω $\alpha, \beta, \gamma > 0$ και $\lambda < \mu < \nu$ και

$$f(x) = \alpha(x-\mu)(x-\nu) + \beta(x-\lambda)(x-\nu) + \gamma(x-\lambda)(x-\mu)$$

i. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $f(x) = 0$ έχει δύο ρίζες άνισες, μια στο διάστημα (λ, μ) και μια στο διάστημα (μ, ν) .

ii. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση $f^2(x)$ έχει 2 ρίζες οι οποίες είναι και ολικά ελάχιστα, και ένα τοπικό μέγιστο.

Απάντηση:

(α') i. Η συνάρτηση είναι πολυωνυμική και κατ' επέκταση συνεχής σε όλο το πεδίο ορισμού της που είναι το $\mathbb{R}$. Επίσης, $g(2) = -4 > 0$, $g(3) = 1 > 0$ και $g(4) = -6 < 0$. Άρα, η $g(x) = 0$ έχει δύο ρίζες μια στο διάστημα $(2, 3)$ και μία στο διάστημα $(3, 4)$. Δεν υπάρχουν άλλες αφού το πολυώνυμο είναι 2ου βαθμού.

ii. Αν υποθέσουμε ότι $\rho_1 < \rho_2$ οι δύο ρίζες της $g(x) = 0$ τότε προφανώς οι ρίζες αυτές είναι και ρίζες της εξίσωσης $g^2(x) = 0$. Προφανώς η εξίσωση $g^2(x) = 0$ δεν έχει άλλες ρίζες γιατί αυτές θα έπρεπε να είναι και ρίζες της $g(x) = 0$. Αυτό που διαφοροποιεί τις ρίζες της από την $g(x) = 0$ είναι πολλαπλότητά τους. Η $g(x)$ έχει θετικό μέγιστο το $\left(\frac{35}{12}, \frac{25}{24}\right)$ άρα, και η $g^2(x)$ θα έχει μέγιστο τοπικό όμως τη φορά αυτή και ίσο με $\left(\frac{25}{24}\right)^2 = \frac{625}{576}$. Τέλος η $g^2(x)$ έχει δύο ολικά ελάχιστα που είναι οι ρίζες της αφού $\forall x \in \mathbb{R} : g^2(\rho_{1,2}) = 0 < g^2(x)$.

9. (α') Αν μια συνάρτηση $f : [0, 5] \rightarrow \mathbb{R}$ είναι συνεχής και ισχύει $f(0) = f(5)$ να αποδείξετε ότι υπάρχουν $x_1, x_2 \in [0, 5]$ με $x_2 - x_1 = 5$ ή $x_2 - x_1 = 3$, τέτοια ώστε $f(x_1) = f(x_2)$. Δηλαδή να αποδείξετε ότι υπάρχει οριζόντια χορδή μήκους 2 ή 3.
- (β') Να δώσετε ένα παράδειγμα συνεχούς συνάρτησης $f : [0, 5] \rightarrow \mathbb{R}$ με $f(0) = f(5)$ για κάθε μία από τις παρακάτω τρεις περιπτώσεις:
- Να μην υπάρχουν $x_1, x_2 \in [0, 5]$ με $x_2 - x_1 = 2$ τέτοια ώστε να ισχύει $f(x_2) = f(x_1)$. Δηλαδή, να μην υπάρχει οριζόντια χορδή της $\mathcal{G}_f$ με μήκος 2.
 - Να μην υπάρχουν $x_1, x_2 \in [0, 5]$ με $x_2 - x_1 = 3$ τέτοια ώστε να ισχύει $f(x_2) = f(x_1)$. Δηλαδή, να μην υπάρχει οριζόντια χορδή της $\mathcal{G}_f$ με μήκος 3.
 - Να υπάρχουν $x_1, x_2, x_3, x_4 \in [0, 5]$ με $x_2 - x_1 = 2$ και $x_4 - x_3 = 3$ τέτοια ώστε να ισχύει $f(x_2) = f(x_1)$ και $f(x_4) = f(x_3)$. Δηλαδή, να υπάρχουν οριζόντιες χορδές της $\mathcal{G}_f$ με μήκος 2 και 3.

Απάντηση:

- (α') Χωρίζουμε το διάστημα $[0, 5]$ σε 2 υποδιαστήματα $[0, 3]$ και $[3, 5]$ που έχουν μήκος 3 και 2 αντίστοιχα. Η άσκησης ζητάει να αποδείξουμε την πρόταση:

$$\begin{cases} \exists x_1 \in [0, 3] & : f(x_1) = f(x_1 + 2) \\ \vee \\ \exists x_2 \in [3, 5] & : f(x_2) = f(x_2 - 3) \end{cases} \quad (2.12)$$

Αν δεν ισχύει η (2.12) τότε:

$$\begin{cases} \forall x_1 \in [0, 3] & : f(x_1) \neq f(x_1 + 2) \\ \wedge \\ \forall x_2 \in [3, 5] & : f(x_2) \neq f(x_2 - 3) \end{cases}$$

Έστω $\forall x \in [0, 3] : h(x) = f(x) - f(x + 2)$ και $\forall x \in [3, 5] : g(x) = f(x) - f(x - 3)$. Αν δεν μηδενίζονται πουθενά τότε διατηρούν πρόσημο και έχουμε τις εξής περιπτώσεις:

$$\begin{aligned} \forall x \in [0, 3] & \wedge f(x + 2) > f(x) \quad \vee \quad f(x + 2) < f(x) \\ \forall x \in [3, 5] & \wedge f(x - 3) > f(x) \quad \vee \quad f(x - 3) < f(x) \end{aligned}$$

Διακρίνουμε 4 περιπτώσεις:

- i. $\forall x \in [0, 3] : f(x + 2) > f(x) \wedge \forall x \in [3, 5] : f(x - 3) > f(x)$.

Άρα:

$$f(0) < f(2) < f(4) \wedge f(1) < f(3) < f(5) = f(0)$$

$$f(0) > f(3) \wedge f(1) > f(4) \wedge f(2) > f(5) = f(0)$$

Άρα, $f(1) < f(0) < f(3) < f(5) = f(0)$, άτοπο.

- ii. $\forall x \in [0, 3] : f(x + 2) > f(x) \wedge \forall x \in [3, 5] : f(x - 3) < f(x)$.

Άρα,

$$f(0) = f(5) > f(3) \wedge f(0) < f(3) \Rightarrow f(0) > f(3) \wedge f(0) < f(3)$$

Άτοπο.