ΕΛΛΗΝΙΚΗ ΔΗΜΟΚΡΑΤΙΑ
Εθνικόν και Καποδιστριακόν Πανεπιστήμιον Αθηνών
ΙΔΡΥΘΕΝ ΤΟ 1837

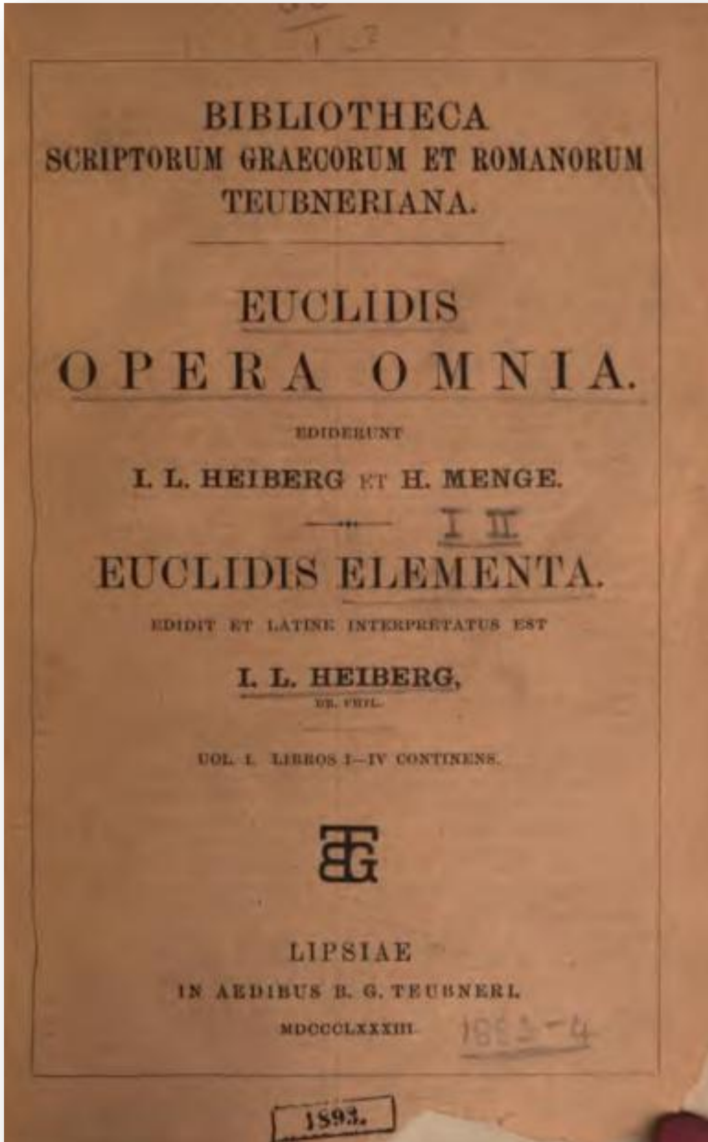
Από την Ευκλείδεια Γεωμετρία

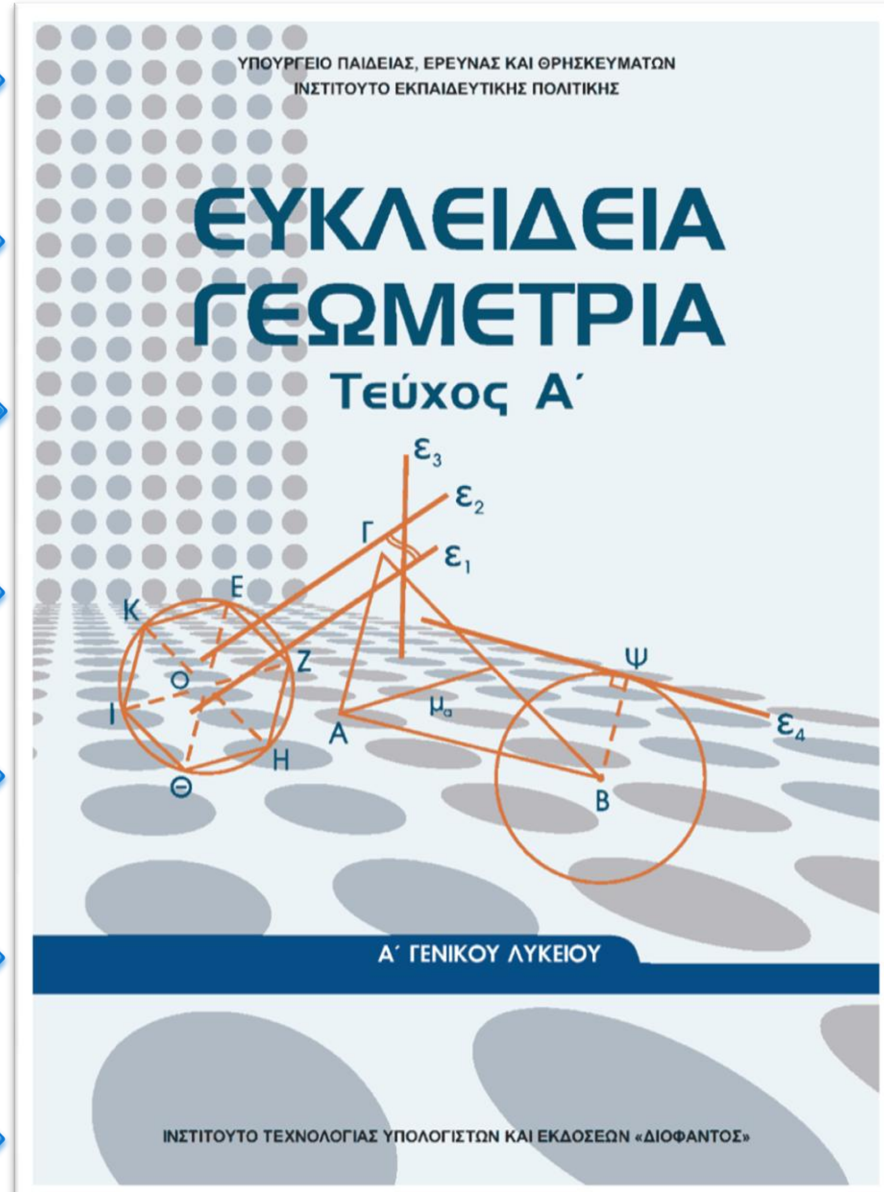
ΕΛ.Ι.Δ.Ε.Κ.
Ελληνικό Ίδρυμα Έρευνας & Καινοτομίας

Στη Δυναμική Ευκλείδεια Γεωμετρία

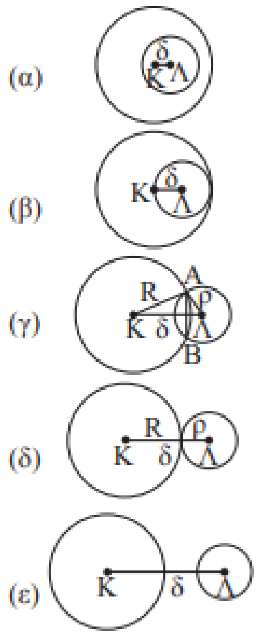
Μή εἶναι βασιλικήν ἀτραπόν ἐπί γεωμετρίαν

Πρόκλος, Σχόλια στο πρώτο βιβλίο των Στοιχείων 68,13-17





από τον Ευκλείδη…στο Ι.Ε.Π



Σχήμα 62

▶ Κύκλοι χωρίς κοινά σημεία

i) Ο κύκλος (Λ, ρ) βρίσκεται στο **εσωτερικό** του (Κ, R), αν και μόνο αν $\boldsymbol{\delta < R - \rho}$ (σχ.62α).

ii) Οι κύκλοι (Κ, R) και (Λ, ρ) βρίσκεται ο ένας στο **εξωτερικό** του άλλου, αν και μόνο αν $\boldsymbol{\delta > R + \rho}$ (σχ.62ε).

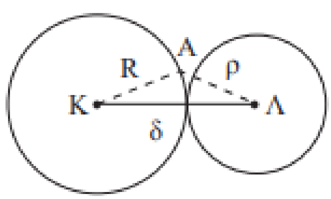
▶ Εφαπτόμενοι κύκλοι

i) Οι κύκλοι **εφάπτονται εσωτερικά**, δηλαδή έχουν **ένα** κοινό σημείο και ο κύκλος (Λ, ρ) βρίσκεται στο εσωτερικό του (Κ, R), αν και μόνο αν $\boldsymbol{\delta = R - \rho}$ (σχ.62β).

ii) Οι κύκλοι **εφάπτονται εξωτερικά**, δηλαδή έχουν **ένα** κοινό σημείο και ο ένας βρίσκεται στο εξωτερικό του άλλου, αν και μόνο αν $\boldsymbol{\delta = R + \rho}$ (σχ.62δ).

Το κοινό σημείο δύο εφαπτόμενων κύκλων λέγεται ***σημείο επαφής*** και είναι σημείο της διακέντρου.

Πράγματι, αν το σημείο επαφής Α (σχ.63) δεν είναι σημείο της διακέντρου, τότε από το τρίγωνο ΑΚΛ έχουμε $ΚΛ < ΚΑ + ΑΛ$, δηλαδή $\delta < R + \rho$, που είναι άτοπο.



▶ Τεμνόμενοι κύκλοι

Οι κύκλοι **τέμνονται**, δηλαδή έχουν **δύο** κοινά σημεία, αν και μόνο αν $\boldsymbol{R - \rho < \delta < R + \rho}$ (σχ.62γ). Το ευθύγραμμο τμήμα ΑΒ που ενώνει τα κοινά σημεία λέγεται ***κοινή χορδή*** των δύο κύκλων. Ισχύει το επόμενο θεώρημα.


BIBLIOTHECA
SCRIPTORUM GRAECORUM ET ROMANORUM
TEUBNERIANA.

EUCLIDIS
OPERA OMNIA.

EDIDERUNT
I. L. HEIBERG ET H. MENGE.

EUCLIDIS ELEMENTA.

EDIDIT ET LATINE INTERPRETATUS EST
I. L. HEIBERG,
DR. PHIL.

UOL. I. LIBROS I—IV CONTINENS.

LIPSIAE
IN AEDIBUS B. G. TEUBNERI.
MDCCCLXXXIII.

1893.

Τα *Στοιχεία* του Ευκλείδη μπορούν να διαβαστούν ως οδηγίες στην κατασκευή:

ενός ισοπλεύρου τριγώνου (I.1)

διχοτόμου γωνίας (I.9)

διχοτόμησης ευθυγράμμου τμήματος (I.10)

κάθετης σε σημείο μιας ευθείας (I.11)

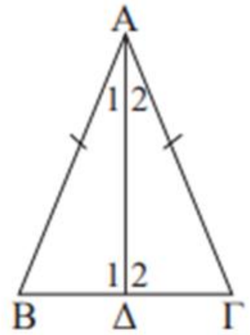
κάθετης σε ευθεία από σημείο εκτός αυτής (I.12)

παράλληλης σε ευθεία από σημείο εκτός αυτής (I.31)

εφαπτομένης από σημείο εκτός του κύκλου (III.17)

εγγεγραμμένου κύκλου τριγώνου (IV.4)

περιγεγραμμένου κύκλου τριγώνου (IV.5)



Σχήμα 12

ΠΟΡΙΣΜΑ Ι

Σε κάθε ισοσκελές τρίγωνο:

- Οι προσκείμενες στη βάση γωνίες είναι ίσες.
- Η διχοτόμος της γωνίας της κορυφής είναι διάμεσος και ύψος.

ΑΠΟΔΕΙΞΗ

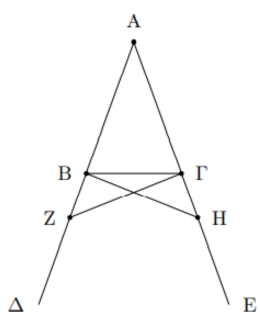
Έστω ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ με ΑΒ = ΑΓ (σχ.12).

Φέρουμε τη διχοτόμο του ΑΔ. Τα τρίγωνα ΑΔΒ και ΑΔΓ έχουν ΑΒ = ΑΓ, ΑΔ κοινή και $\hat{A}_1 = \hat{A}_2$ (ΠΓΠ), επομένως είναι ίσα, οπότε $\hat{B} = \hat{\Gamma}$.

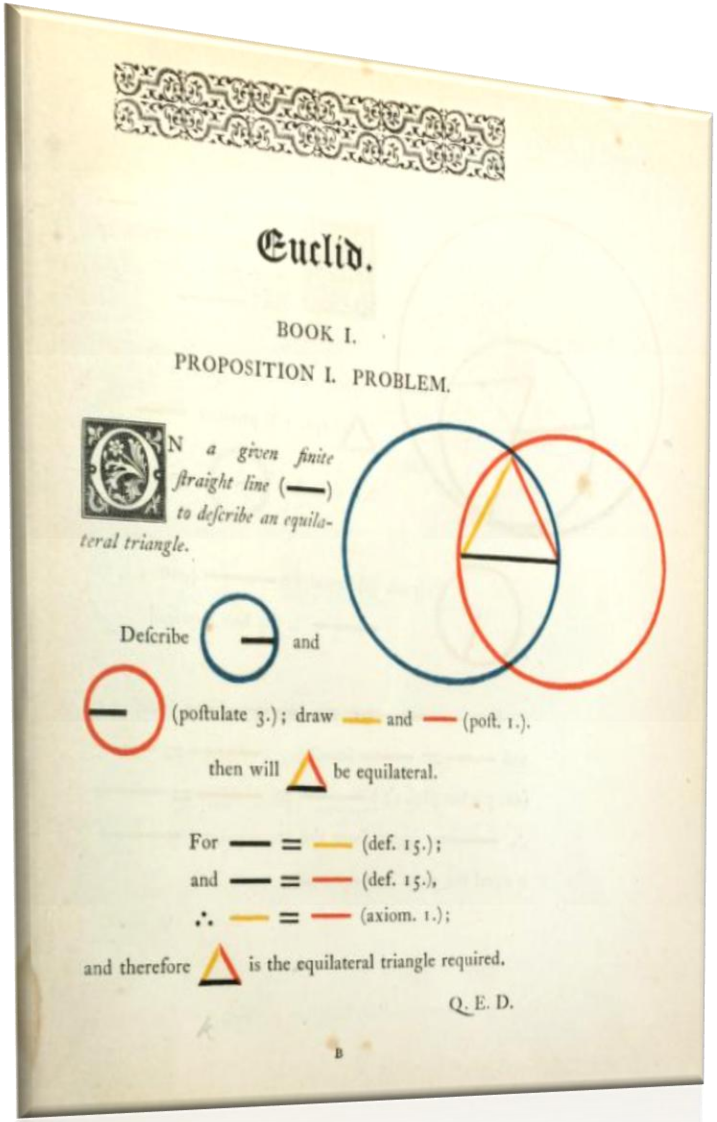
Από την ίδια ισότητα τριγώνων προκύπτει ότι ΒΔ = ΔΓ, οπότε η ΑΔ είναι διάμεσος και $\hat{\Delta}_1 = \hat{\Delta}_2$. Από την τελευταία ισότητα και επειδή $\hat{\Delta}_1 + \hat{\Delta}_2 = 180°$ προκύπτει ότι $\hat{\Delta}_1 = \hat{\Delta}_2 = 90°$, οπότε συμπεραίνουμε ότι το ΑΔ είναι ύψος του τριγώνου.

Α΄.ε΄

Τῶν ἰσοσκελῶν τριγώνων αἱ πρὸς τῇ βάσει γωνίαι ἴσαι ἀλλήλαις εἰσίν, καὶ προσεκβληθεισῶν τῶν ἴσων εὐθειῶν αἱ ὑπὸ τὴν βάσιν γωνίαι ἴσαι ἀλλήλαις ἔσονται.



Ἔστω τρίγωνον ἰσοσκελὲς τὸ ΑΒΓ ἴσην ἔχον τὴν ΑΒ πλευρὰν τῇ ΑΓ πλευρᾷ, καὶ προσεκβεβλήσθωσαν ἐπ' εὐθείας ταῖς ΑΒ, ΑΓ εὐθεῖαι αἱ ΒΔ, ΓΕ· λέγω, ὅτι ἡ μὲν ὑπὸ ΑΒΓ γωνία τῇ ὑπὸ ΑΓΒ ἴση ἐστίν, ἡ δὲ ὑπὸ ΓΒΔ τῇ ὑπὸ ΒΓΕ.

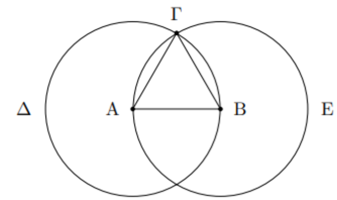


Α΄.α΄

Ἐπὶ τῆς δοθείσης εὐθείας πεπερασμένης τρίγωνον ἰσόπλευρον συστήσασθαι.

Ἔστω ἡ δοθεῖσα εὐθεῖα πεπερασμένη ἡ ΑΒ.

Δεῖ δὴ ἐπὶ τῆς ΑΒ εὐθείας τρίγωνον ἰσόπλευρον συστήσασθαι.

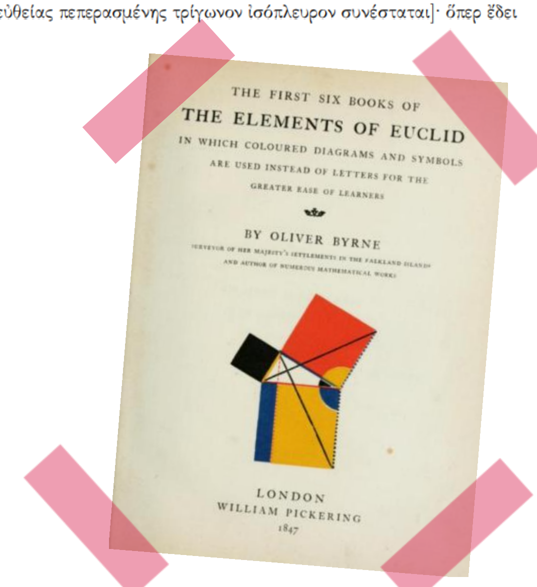


Κέντρῳ μὲν τῷ Α διαστήματι δὲ τῷ ΑΒ κύκλος γεγράφθω ὁ ΒΓΔ, καὶ πάλιν κέντρῳ μὲν τῷ Β διαστήματι δὲ τῷ ΒΑ κύκλος γεγράφθω ὁ ΑΓΕ, καὶ ἀπὸ τοῦ Γ σημείου, καθ' ὃ τέμνουσιν ἀλλήλους οἱ κύκλοι, ἐπὶ τὰ Α, Β σημεῖα ἐπεζεύχθωσαν εὐθεῖαι αἱ ΓΑ, ΓΒ.

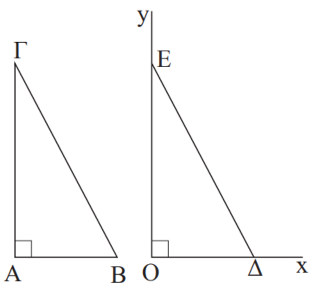
Καὶ ἐπεὶ τὸ Α σημεῖον κέντρον ἐστὶ τοῦ ΓΔΒ κύκλου, ἴση ἐστὶν ἡ ΑΓ τῇ ΑΒ· πάλιν, ἐπεὶ τὸ Β σημεῖον κέντρον ἐστὶ τοῦ ΓΑΕ κύκλου, ἴση ἐστὶν ἡ ΒΓ τῇ ΒΑ. ἐδείχθη δὲ καὶ ἡ ΓΑ τῇ ΑΒ ἴση· ἑκατέρα ἄρα τῶν ΓΑ, ΓΒ τῇ ΑΒ ἐστιν ἴση. τὰ δὲ τῷ αὐτῷ ἴσα καὶ ἀλλήλοις ἐστὶν ἴσα· καὶ ἡ ΓΑ ἄρα τῇ ΓΒ ἐστιν ἴση· αἱ τρεῖς ἄρα αἱ ΓΑ, ΑΒ, ΒΓ ἴσαι ἀλλήλαις εἰσίν.

Ἰσόπλευρον ἄρα ἐστὶ τὸ ΑΒΓ τρίγωνον, καὶ συνέσταται ἐπὶ τῆς δοθείσης εὐθείας πεπερασμένης τῆς ΑΒ.

[Ἐπὶ τῆς δοθείσης ἄρα εὐθείας πεπερασμένης τρίγωνον ἰσόπλευρον συνέσταται]· ὅπερ ἔδει ποιῆσαι.



ένα(02) παράδειγμα(τα)



Σχήμα 3

ΘΕΩΡΗΜΑ ΙΙΙ (Αντίστροφο του Πυθαγορείου)

Αν σε τρίγωνο ΑΒΓ ισχύει $ΑΒ^2 + ΑΓ^2 = ΒΓ^2$, τότε $\hat{Α} = 1∟$.

ΑΠΟΔΕΙΞΗ

Πάνω στις πλευρές Οx, Oy ορθής γωνίας xÔy θεωρούμε αντίστοιχα τμήματα ΟΔ = ΑΒ και ΟΕ = ΑΓ. Επειδή το τρίγωνο ΟΔΕ είναι ορθογώνιο σύμφωνα με το Πυθαγόρειο θεώρημα και την υπόθεση, έχουμε

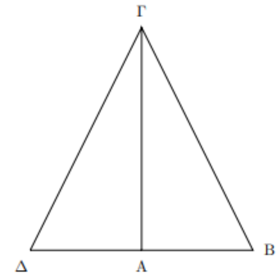
$$ΔΕ^2 = ΟΔ^2 + ΟΕ^2 = ΑΒ^2 + ΑΓ^2 = ΒΓ^2.$$

Άρα ΔΕ = ΒΓ. Επομένως τα τρίγωνα ΑΒΓ και ΟΔΕ είναι ίσα, γιατί έχουν και τις τρεις πλευρές ίσες, οπότε θα είναι $\hat{Α} = \hat{Ο} = 1∟$, που είναι το ζητούμενο.

Α΄.μη΄

Ἐὰν τριγώνου τὸ ἀπὸ μιᾶς τῶν πλευρῶν τετράγωνον ἴσον ᾖ τοῖς ἀπὸ τῶν λοιπῶν τοῦ τριγώνου δύο πλευρῶν τετραγώνοις, ἡ περιεχομένη γωνία ὑπὸ τῶν λοιπῶν τοῦ τριγώνου δύο πλευρῶν ὀρθή ἐστιν.

Τριγώνου γὰρ τοῦ ΑΒΓ τὸ ἀπὸ μιᾶς τῆς ΒΓ πλευρᾶς τετράγωνον ἴσον ἔστω τοῖς ἀπὸ τῶν ΒΑ, ΑΓ πλευρῶν τετραγώνοις· λέγω, ὅτι ὀρθή ἐστιν ἡ ὑπὸ ΒΑΓ γωνία.

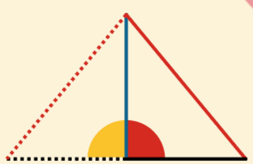


Ἤχθω γὰρ ἀπὸ τοῦ Α σημείου τῇ ΑΓ εὐθείᾳ πρὸς ὀρθὰς ἡ ΑΔ καὶ κείσθω τῇ ΒΑ ἴση ἡ ΑΔ, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ ΔΓ. ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ ΔΑ τῇ ΑΒ, ἴσον ἐστὶ καὶ τὸ ἀπὸ τῆς ΔΑ τετράγωνον τῷ ἀπὸ τῆς ΑΒ τετραγώνῳ. κοινὸν προσκείσθω τὸ ἀπὸ τῆς ΑΓ τετράγωνον· τὰ ἄρα ἀπὸ τῶν ΔΑ, ΑΓ τετράγωνα ἴσα ἐστὶ τοῖς ἀπὸ τῶν ΒΑ, ΑΓ τετραγώνοις. ἀλλὰ τοῖς μὲν ἀπὸ τῶν ΔΑ, ΑΓ ἴσον ἐστὶ τὸ ἀπὸ τῆς ΔΓ· ὀρθὴ γάρ ἐστιν ἡ ὑπὸ ΔΑΓ γωνία· τοῖς δὲ ἀπὸ τῶν ΒΑ, ΑΓ ἴσον ἐστὶ τὸ ἀπὸ ΒΓ· ὑπόκειται γάρ· τὸ ἄρα ἀπὸ τῆς ΔΓ τετράγωνον ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς ΒΓ τετραγώνῳ· ὥστε καὶ πλευρὰ ἡ ΔΓ τῇ ΒΓ ἐστιν ἴση· καὶ ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ ΔΑ τῇ ΑΒ, κοινὴ δὲ ἡ ΑΓ, δύο δὴ αἱ ΔΑ, ΑΓ δύο ταῖς ΒΑ, ΑΓ ἴσαι εἰσίν· καὶ βάσις ἡ ΔΓ βάσει τῇ ΒΓ ἴση· γωνία ἄρα ἡ ὑπὸ ΔΑΓ γωνίᾳ τῇ ὑπὸ ΒΑΓ [ἐστιν] ἴση. ὀρθὴ δὲ ἡ ὑπὸ ΔΑΓ· ὀρθὴ ἄρα καὶ ἡ ὑπὸ ΒΑΓ.

Ἐὰν ἄρα τριγώνου τὸ ἀπὸ μιᾶς τῶν πλευρῶν τετράγωνον ἴσον ᾖ τοῖς ἀπὸ τῶν λοιπῶν τοῦ τριγώνου δύο πλευρῶν τετραγώνοις, ἡ περιεχομένη γωνία ὑπὸ τῶν λοιπῶν τοῦ τριγώνου δύο πλευρῶν ὀρθή ἐστιν· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

PROPOSITION XLVIII. THEOREM.

IF *the ſquare of one ſide ( ) of a triangle is equal to the ſquares of the other two ſides (and), the angle ( ) ſubtended by that ſide is a right angle.*



Draw ⊥ and = (prs. 11. 3.)
and draw alſo.

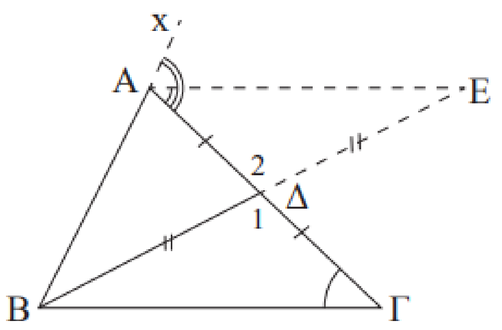
Since = (conſt.)
^{2} = ^{2};
∴ ^{2} + ^{2} = ^{2} + ^{2},
but ^{2} + ^{2} = ^{2} (pr. 47.),
and ^{2} + ^{2} = ^{2} (hyp.)
∴ ^{2} = ^{2},
∴ = ;

and ∴ = (pr. 8.),

3.10 Σχέση εξωτερικής και απέναντι γωνίας

ΘΕΩΡΗΜΑ

Κάθε εξωτερική γωνία ενός τριγώνου είναι μεγαλύτερη από καθεμία από τις απέναντι γωνίες του τριγώνου.



Σχήμα 47

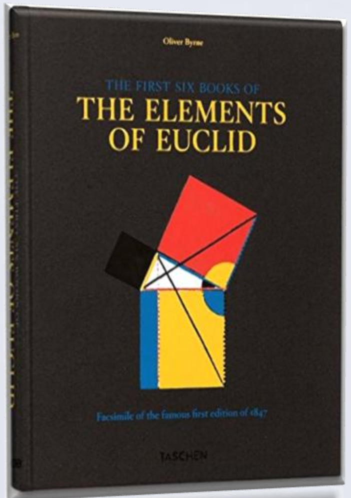
ΑΠΟΔΕΙΞΗ

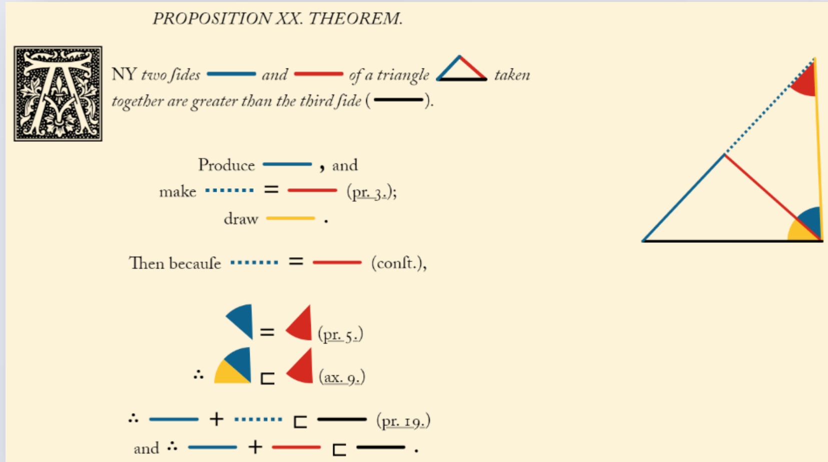
Έστω τρίγωνο ΑΒΓ. Φέρουμε τη διάμεσο ΒΔ (σχ.47) και στην προέκτασή της, προς το Δ, θεωρούμε σημείο Ε, ώστε $\Delta E = B\Delta$. Επειδή το Ε βρίσκεται στο εσωτερικό της γωνίας $\Gamma\hat{A}x$ έχουμε $\Gamma\hat{A}E < \Gamma\hat{A}x = \hat{A}_{\varepsilon\xi}$. Όμως τα τρίγωνα ΒΔΓ και ΕΔΑ είναι ίσα γιατί έχουν: $B\Delta = \Delta E$, $A\Delta = \Delta\Gamma$ και $\hat{\Delta}_1 = \hat{\Delta}_2$, οπότε $\hat{\Gamma} = \Gamma\hat{A}E$. Από την τελευταία ισότητα και την $\Gamma\hat{A}E < \hat{A}_{\varepsilon\xi}$ προκύπτει ότι $\hat{A}_{\varepsilon\xi} > \hat{\Gamma}$. Όμοια αποδεικνύεται ότι και $\hat{A}_{\varepsilon\xi} > \hat{B}$.

ΠΟΡΙΣΜΑΤΑ

i) Κάθε τρίγωνο έχει το πολύ μια γωνία ορθή ή αμβλεία.

ii) Το άθροισμα δύο γωνιών κάθε τριγώνου είναι μικρότερο των 180°.





PROPOSITION XX. THEOREM.

ANY *two sides* and *of a triangle* taken *together are greater than the third side* ( ).

Produce , and
make = (pr. 3.);
draw .

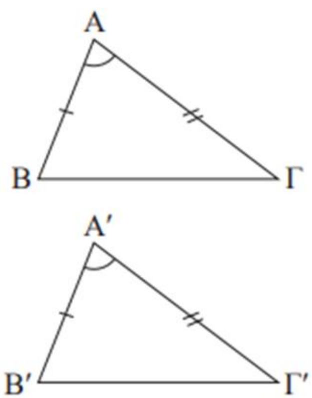
Then because = (const.),

= (pr. 5.)
∴ ⊏ (ax. 9.)

∴ + ⊏ (pr. 19.)
and ∴ + ⊏ .

ΣΧΟΛΙΟ

Η συντομογραφία ΠΓΠ σημαίνει πλευρά, γωνία, πλευρά.



Σχήμα 11

3.2 1ο Κριτήριο ισότητας τριγώνων

ΘΕΩΡΗΜΑ Ι (1ο Κριτήριο – ΠΓΠ)

Αν δύο τρίγωνα έχουν δύο πλευρές ίσες μία προς μία και τις περιεχόμενες σε αυτές γωνίες ίσες, τότε είναι ίσα.

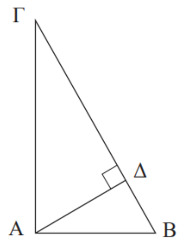
ΑΠΟΔΕΙΞΗ

Ας υποθέσουμε ότι τα τρίγωνα ΑΒΓ και Α′Β′Γ′ έχουν ΑΒ = Α′Β′, ΑΓ = Α′Γ′ και $\hat{A} = \hat{A}'$ (σχ.11). Μετατοπίζουμε το τρίγωνο Α′Β′Γ′, ώστε το σημείο Α′ να ταυτιστεί με το Α και η ημιευθεία Α′Β′ να ταυτιστεί με την ΑΒ. Επειδή $\hat{A} = \hat{A}'$ και η ημιευθεία Α′Γ′ θα ταυτισθεί με την ΑΓ. Τότε, αφού ΑΒ = Α′Β′ και ΑΓ = Α′Γ′, το σημείο Β′ ταυτίζεται με το Β και το Γ′ με το Γ. Επομένως τα δύο τρίγωνα συμπίπτουν, άρα είναι ίσα.

9.2 Το Πυθαγόρειο θεώρημα

ΘΕΩΡΗΜΑ Ι

Σε κάθε ορθογώνιο τρίγωνο, το τετράγωνο μιας κάθετης πλευράς του είναι ίσο με το γινόμενο της υποτείνουσας επί την προβολή της πλευράς αυτής στην υποτείνουσα.



Σχήμα 2

ΑΠΟΔΕΙΞΗ

Έστω λοιπόν ένα ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ και Δ η προβολή της κορυφής Α στην υποτείνουσα ΒΓ. Θέλουμε να αποδείξουμε ότι $\boxed{\mathbf{AB^2 = B\Gamma \cdot B\Delta}}$ και $\boxed{\mathbf{A\Gamma^2 = B\Gamma \cdot \Gamma\Delta}}$.

Για την πρώτη σχέση αρκεί να αποδείξουμε ότι $\frac{AB}{B\Delta} = \frac{B\Gamma}{AB}$, δηλαδή ότι τα τρίγωνα ΑΒΓ και ΔΒΑ είναι όμοια, το οποίο ισχύει αφού $\hat{A} = \hat{\Delta} = 1\llcorner$ και η $\hat{B}$ είναι κοινή. Όμοια αποδεικνύεται και η σχέση $A\Gamma^2 = B\Gamma \cdot \Gamma\Delta$.

ΘΕΩΡΗΜΑ ΙΙ (Πυθαγόρειο)

Σε κάθε ορθογώνιο τρίγωνο, το άθροισμα των τετραγώνων των κάθετων πλευρών του είναι ίσο με το τετράγωνο της υποτείνουσας.

ΑΠΟΔΕΙΞΗ

Θέλουμε δηλαδή (σχ.2) να αποδείξουμε ότι

$$\mathbf{AB^2 + A\Gamma^2 = B\Gamma^2 \text{ ή } \alpha^2 = \beta^2 + \gamma^2}$$

Σύμφωνα με το προηγούμενο θεώρημα έχουμε:

$$\boxed{AB^2 = B\Gamma \cdot B\Delta} \quad \text{και} \quad \boxed{A\Gamma^2 = B\Gamma \cdot \Gamma\Delta}.$$

Με πρόσθεση των ισοτήτων κατά μέλη προκύπτει ότι:

$$AB^2 + A\Gamma^2 = B\Gamma \cdot B\Delta + B\Gamma \cdot \Gamma\Delta =$$

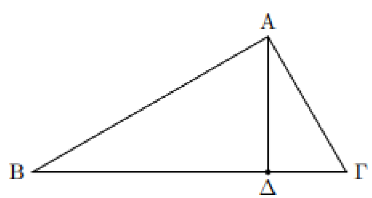
$$B\Gamma(B\Delta + \Gamma\Delta) = B\Gamma \cdot B\Gamma = B\Gamma^2.$$

F΄.η΄

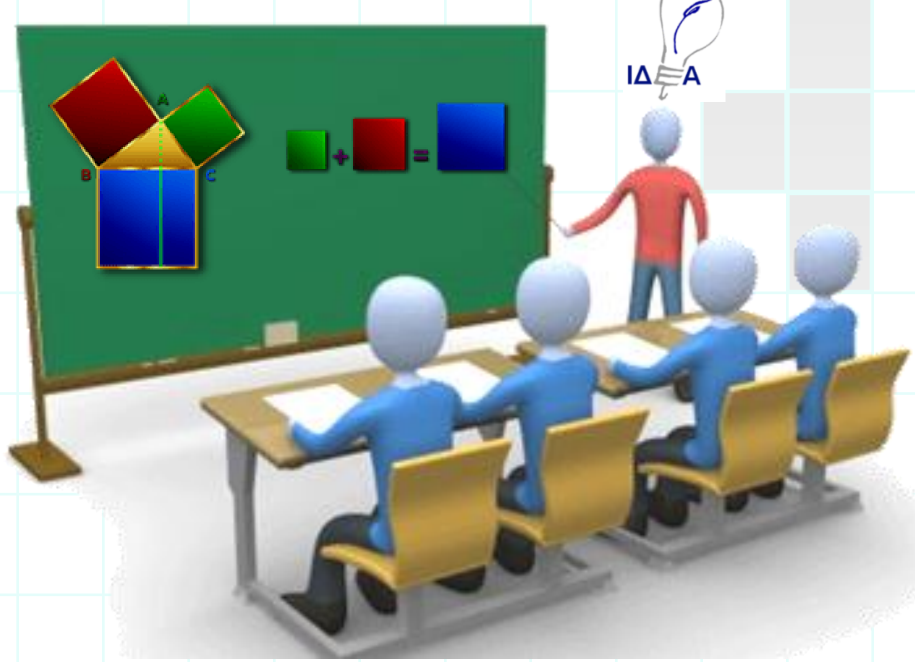
Ἐὰν ἐν ὀρθογωνίῳ τριγώνῳ ἀπὸ τῆς ὀρθῆς γωνίας ἐπὶ τὴν βάσιν κάθετος ἀχθῇ, τὰ πρὸς τῇ καθέτῳ τρίγωνα ὅμοιά ἐστι τῷ τε ὅλῳ καὶ ἀλλήλοις.

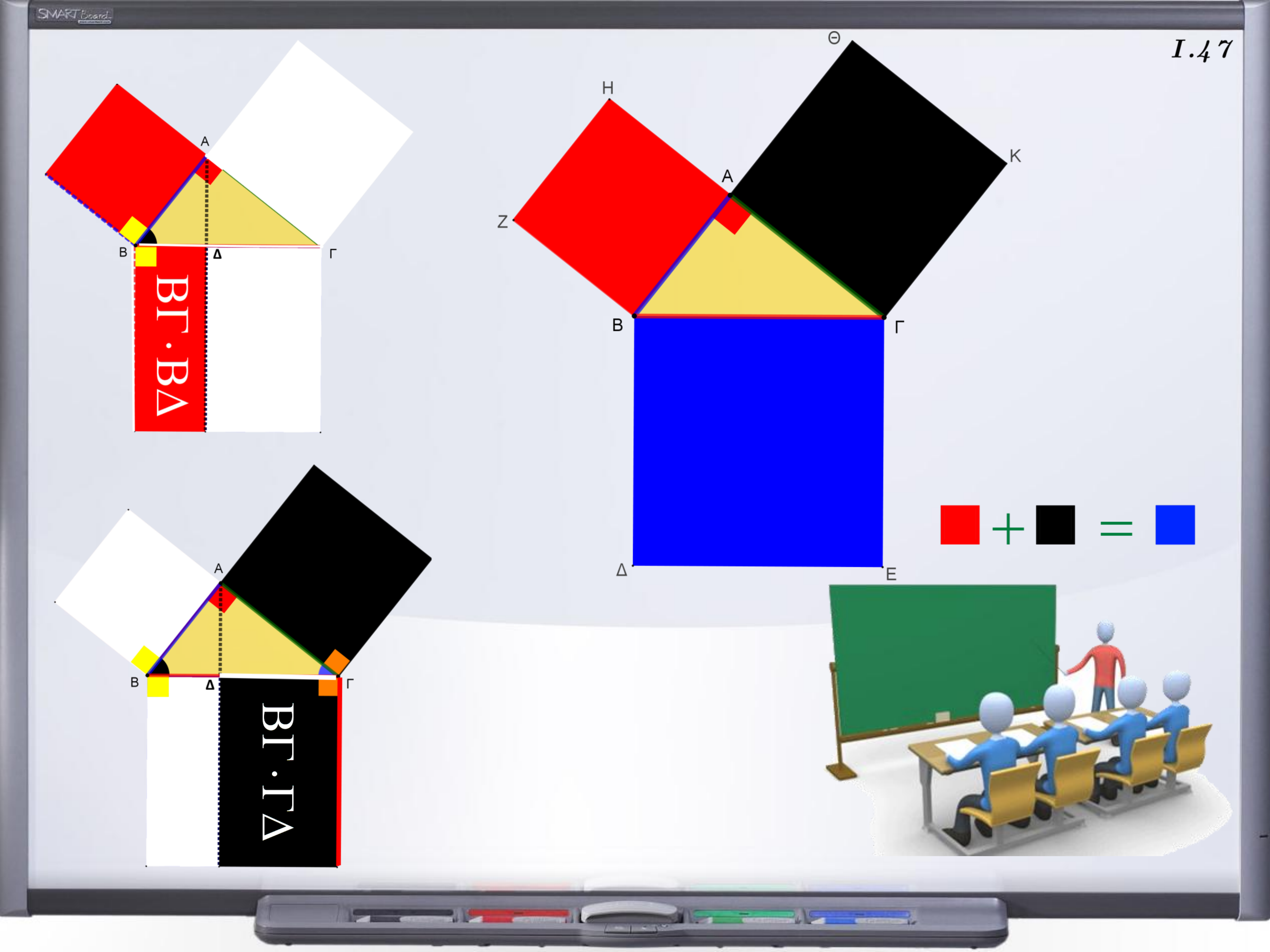
Ἔστω τρίγωνον ὀρθογώνιον τὸ ΑΒΓ ὀρθὴν ἔχον τὴν ὑπὸ ΒΑΓ γωνίαν, καὶ ἤχθω ἀπὸ τοῦ Α ἐπὶ τὴν ΒΓ κάθετος ἡ ΑΔ· λέγω, ὅτι ὅμοιόν ἐστιν ἑκάτερον τῶν ΑΒΔ, ΑΔΓ τριγώνων ὅλῳ τῷ ΑΒΓ καὶ ἔτι ἀλλήλοις.

Ἐπεὶ γὰρ ἴση ἐστὶν ἡ ὑπὸ ΒΑΓ



τῇ ὑπὸ ΑΔΒ· ὀρθὴ γὰρ ἑκατέρα· καὶ κοινὴ τῶν δύο τριγώνων τοῦ τε ΑΒΓ καὶ τοῦ ΑΒΔ ἡ πρὸς τῷ Β, λοιπὴ ἄρα ἡ ὑπὸ ΑΓΒ λοιπῇ τῇ ὑπὸ ΒΑΔ ἐστιν ἴση· ἰσογώνιον ἄρα ἐστὶ τὸ ΑΒΓ τρίγωνον τῷ ΑΒΔ τριγώνῳ. ἔστιν ἄρα ὡς ἡ ΒΓ ὑποτείνουσα τὴν ὀρθὴν τοῦ ΑΒΓ τριγώνου πρὸς τὴν ΒΑ ὑποτείνουσαν τὴν ὀρθὴν τοῦ ΑΒΔ τριγώνου, οὕτως αὐτὴ ἡ ΑΒ ὑποτείνουσα τὴν πρὸς τῷ Γ γωνίαν τοῦ ΑΒΓ τριγώνου πρὸς τὴν ΒΔ ὑποτείνουσαν τὴν ἴσην τὴν ὑπὸ ΒΑΔ τοῦ ΑΒΔ τριγώνου, καὶ ἔτι ἡ ΑΓ πρὸς τὴν ΑΔ ὑποτείνουσαν τὴν πρὸς τῷ Β γωνίαν κοινὴν τῶν δύο τριγώνων. τὸ ΑΒΓ ἄρα τρίγωνον τῷ ΑΒΔ τριγώνῳ ἰσογώνιόν τέ ἐστι καὶ τὰς περὶ τὰς ἴσας γωνίας πλευρὰς ἀνάλογον ἔχει. ὅμοιον ἄρα [ἐστὶ] τὸ ΑΒΓ τρίγωνον τῷ ΑΒΔ τριγώνῳ. ὁμοίως δὴ δείξομεν, ὅτι καὶ τῷ ΑΔΓ τριγώνῳ ὅμοιόν ἐστι τὸ ΑΒΓ τρίγωνον· ἑκάτερον ἄρα τῶν ΑΒΔ, ΑΔΓ [τριγώνων] ὅμοιόν ἐστιν ὅλῳ τῷ ΑΒΓ.





SMART Board
I.47
ΒΓ·ΒΔ
A
B
Δ
Γ
Θ
H
K
A
Z
B
Γ
Δ
E
A
B
Δ
Γ
ΒΓ·ΓΔ

Κεφ. 12ο: Ευθείες και επίπεδα στο χώρο

12.1. Εισαγωγή

12.2. Η έννοια του επιπέδου και ο καθορισμός του

12.3. Σχετικές θέσεις ευθειών και επιπέδων

ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ ΚΑΙ ΘΡΗΣΚΕΥΜΑΤΩΝ
ΙΝΣΤΙΤΟΥΤΟ ΕΚΠΑΙΔΕΥΤΙΚΗΣ ΠΟΛΙΤΙΚΗΣ

12.4. Ευθείες και επίπεδα παράλληλα – Θεώρημα του Θαλή

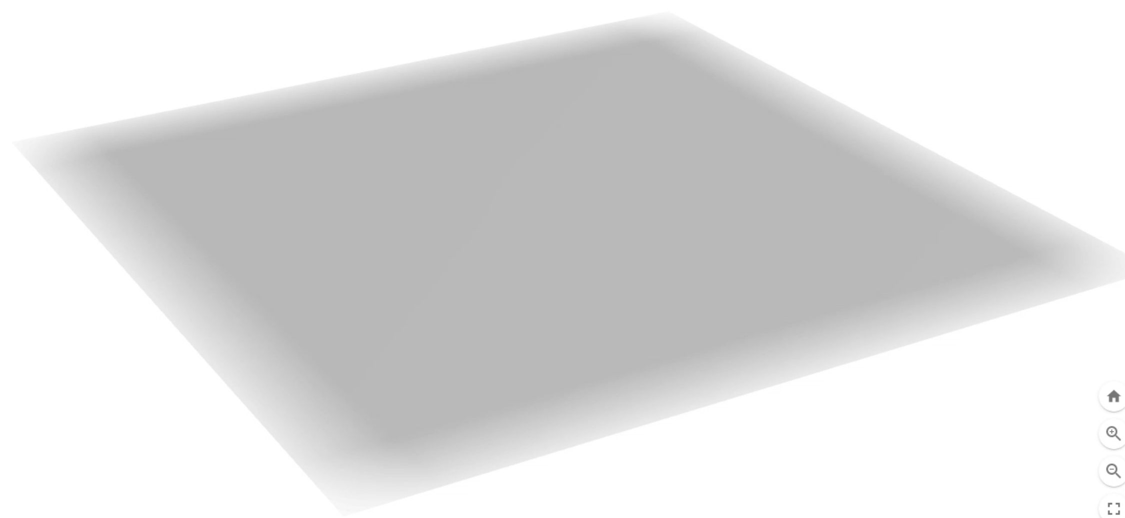
12.5. Γωνία δύο ευθειών – Ορθογώνιες ευθείες

12.6. Απόσταση σημείου από επίπεδο – Απόσταση δύο παραλλήλων επιπέδων

Πρόταση XI.8

Εάν δύο ευθείες είναι παράλληλες και η μια απο αυτές είναι κάθετη σε επίπεδο, τότε και η άλλη θα είναι κάθετη προς αυτό

- ☐ έστω οι παράλληλες ευθείες ΓΔ, ΑΒ με ΑΒ κάθετη σε επίπεδο
- ☐ τότε θα είναι και η ΓΔ κάθετη σε αυτό
- φέρνουμε την ΒΔ
- φέρνουμε την ΔΕ κάθετη στο ΒΔ και ίση με την ΑΒ
- φέρνουμε την ΑΕ
- την ΒΕ
- και την ΑΔ
- ☐ η γωνία ΑΒΔ είναι ορθή, άρα και η γωνία ΓΔΒ θα είναι ορθή
- ☐ τότε τρίγωνο ΑΒΔ = τρίγωνο ΒΔΕ
- ☐ επομένως ΑΔ = ΒΕ
- ☐ είναι τρίγωνο ΑΔΕ = τρίγωνο ΑΒΕ
- ☐ άρα και η γωνία ΑΔΕ είναι ορθή
- ☐ οπότε η ΕΔ είναι κάθετη στο επίπεδο των ΑΒ και ΓΔ
- ☐ επομένως η ΓΔ είναι κάθετη στην ΔΕ, άρα και στο επίπεδο



ευχαριστώ

για την προσοχή σας