Τα *Αριθμητικά* του Διοφάντου
Ένα παρεξηγημένο έργο ενός παρωχημένου αλγεβριστή

Γιάννης Χριστιανίδης

Καθηγητής Ιστορίας των Μαθηματικών, Πανεπιστήμιο Αθηνών

Μέλος του Centre de recherches d'histoire des sciences et des techniques 'Alexandre Koyré' (Paris)

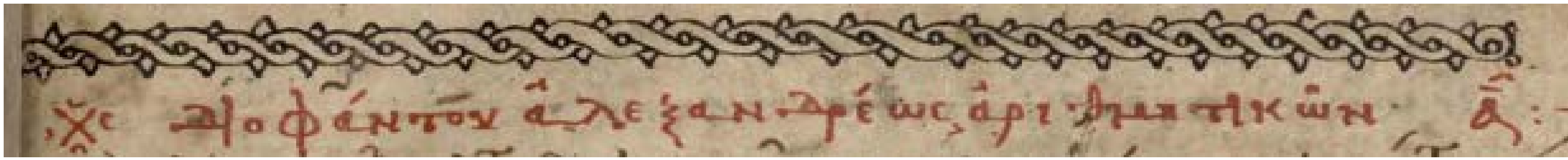
Μέλος της Académie Internationale d'Histoire des Sciences

ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ

- Διόφαντος: Η ζωή και το έργο του.
- Αλγεβριστής ή αριθμοθεωρητικός;
- Τι είναι η προ-μοντέρνα άλγεβρα;
- *Αριθμητικά*: ένα βιβλίο προ-μοντέρνας άλγεβρας.
- Η άλγεβρα προ του Διοφάντου.
- Η πρόσληψη: Από τον αλγεβριστή Διόφαντο (προ του 17^{ου} αι.) στον Διόφαντο της Θεωρίας Αριθμών (μετά τον 17^{ο} αι.).

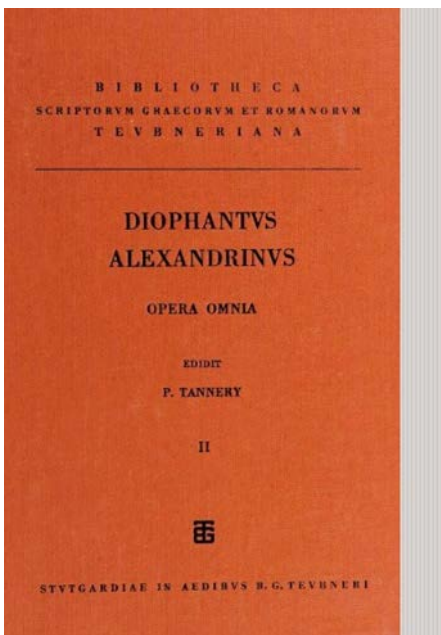
Διόφαντος: Η ζωή και το έργο του

- Η εποχή: Έζησε περί το 300 μ.Χ. (;)
- Ο τόπος: Αλεξάνδρεια (;)

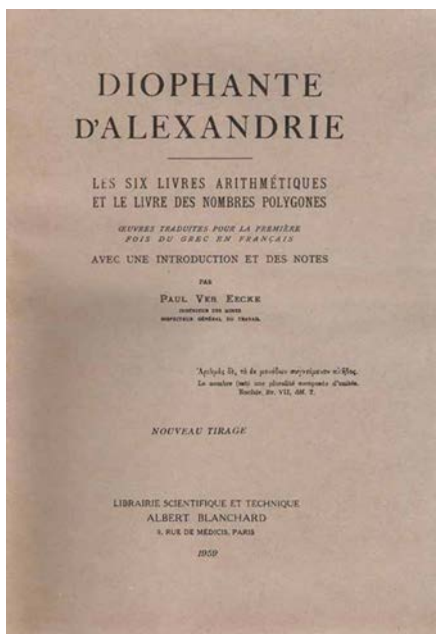


- Τα έργα: *Αριθμητικά, Περί πολυγώνων αριθμών*

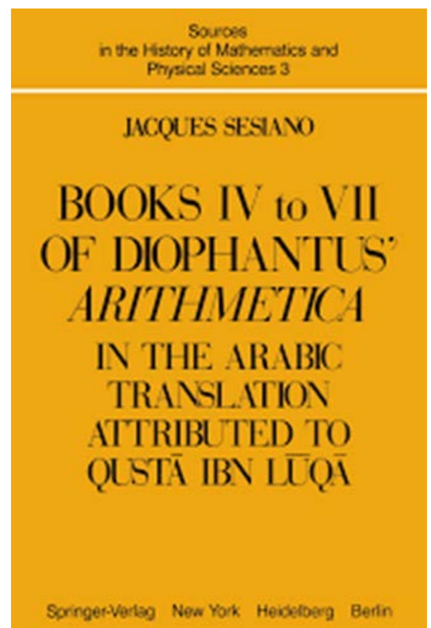
1893-95



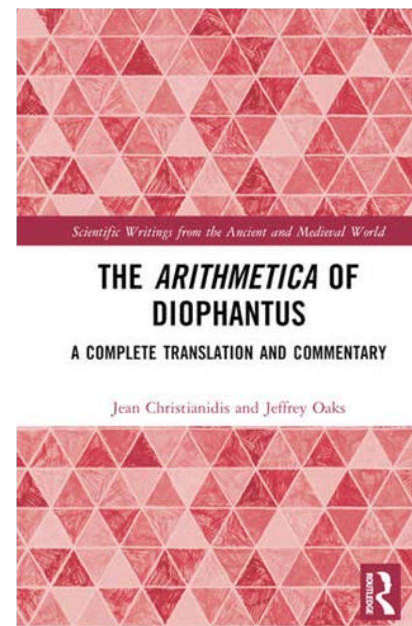
1926



1982



2023

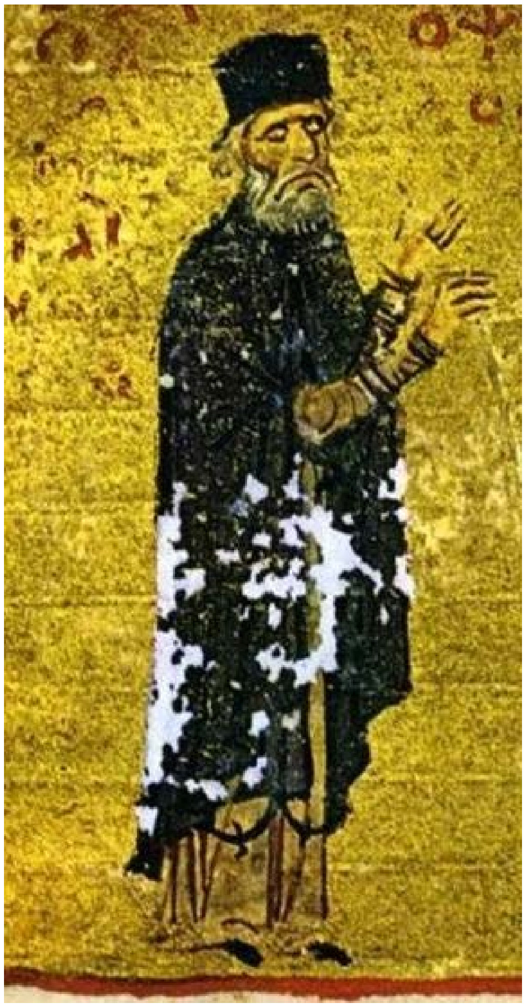


Ένα επίγραμμα της Παλατινής Ανθολογίας

Σε αυτόν εδώ τον τάφο κείται ο Διόφαντος. Ω, τι μέγα θαύμα!
Ο τάφος μας λέγει εντέχνως τις περιόδους του βίου του.
Το έκτο μέρος του βίου του ο θεός του χάρισε να είναι παιδί,
και το δωδέκατο μέρος μετά από αυτό να βγάλει τρίχες στις παρειές.
Μετά το έβδομο μέρος του έδωσε τη χαρά να νυμφευθεί,
και πέντε χρόνια μετά τον γάμο του τού χάρισε ένα παιδί.
Αχ! Αργογέννητο, άτυχο παιδί˙ στο μισό της ηλικίας του πατέρα του σαν έφτασε, ο παγερός θάνατος το πήρε μαζί του.
Παρηγορώντας από τότε το πένθος του για τέσσερα χρόνια με αυτή την επιστήμη (των αριθμών), επήλθε το τέρμα του βίου του.

$$\frac{1}{6}x+\frac{1}{12}x+\frac{1}{7}x+5+\frac{1}{2}x+4=x, \quad x=84$$

Μια αναφορά του Μιχαήλ Ψελλού (11^{ος} αι.)



Μιχαήλ Ψελλός

«Για αυτή την αιγυπτιακή μέθοδο γράφει ανάμεσα σε άλλα ο **Διόφαντος**, ενώ ο λογιότατος **Ανατόλιος**, αφού περισυνέλεξε τα πιο ουσιώδη μέρη της διδασκαλίας εκείνου του ανδρός, τα αφιέρωσε πολύ συνοπτικά σε έναν **άλλο Διόφαντο**.»

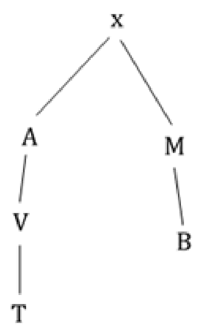
Ο Tannery ταύτισε τον Ανατόλιο με τον χριστιανό εκκλησιαστικό συγγραφέα και λόγιο Ανατόλιο της Αλεξάνδρειας († περ. 282), ο οποίος έγινε επίσκοπος Λαοδικείας περί το 269. Έτσι, τοποθέτησε τον Διόφαντο στα μέσα του 3^{ου} αι. μ.Χ.

Tannery

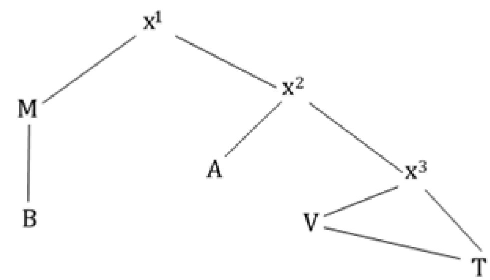
Τα 33 ελληνικά χειρόγραφα των *Αριθμητικών*

Matrit. Bibl. Nat. 4678 (φ. 58r–130v)	XI (β΄ μισό)	**A**
Ambros. Et 157 sup. (φ. 13, 14, 8, 18, 20, 15, 9, 16, 17, 19)*	1292/1293	**M**
Vat. gr. 191 (φ. 360r–390r)	1296–1298	**V**
Vat. gr. 304 (φ. 77r–118r)	XIV (α΄ μισό)	**T**
Marc. gr. 308 (φ. 50v–263r)	XIII (τέλος)	**B**

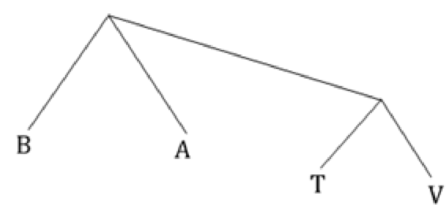
Tannery



Allard



Acerbi



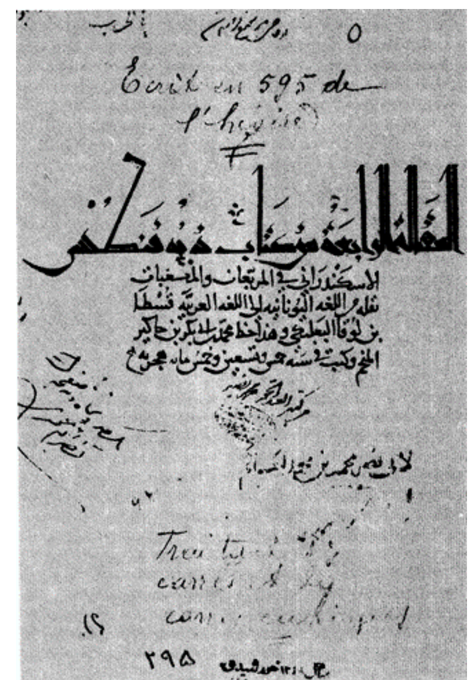
Το μοναδικό αραβικό χειρόγραφο των *Αριθμητικών*

Κώδικας 295 (Βιβλιοθήκη Astān Quds, Mashhad, Ιράν), 1198
Ανακαλύφθηκε το 1968

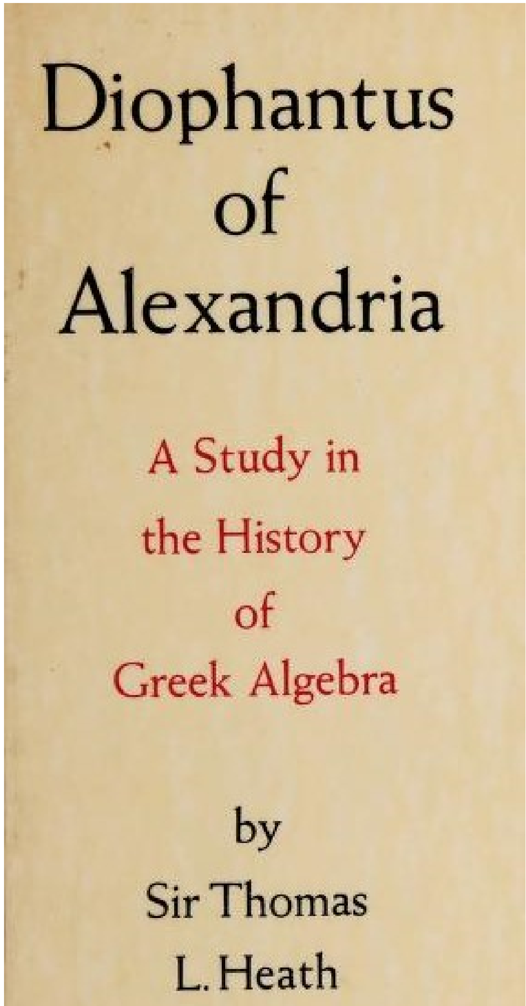
Τα βιβλία των *Αριθμητικών*

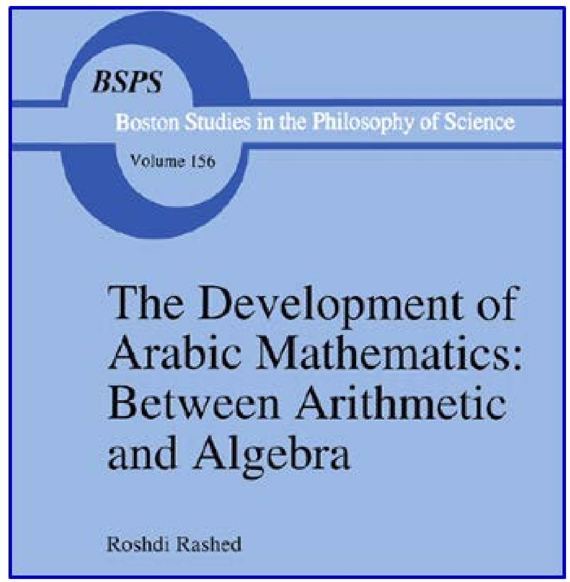
(σώζονται δέκα από τα δεκατρία)

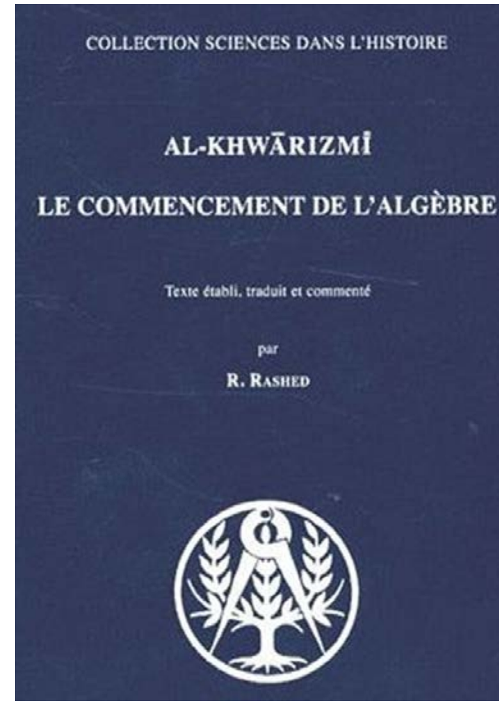
Ελληνικά	Αραβικά	Η σειρά
Α		Α
Β		Β
Γ		Γ
Δ	4	4
Ε	5	5
ΣΤ	6	6
	7	7
		Δ, Ε, ΣΤ



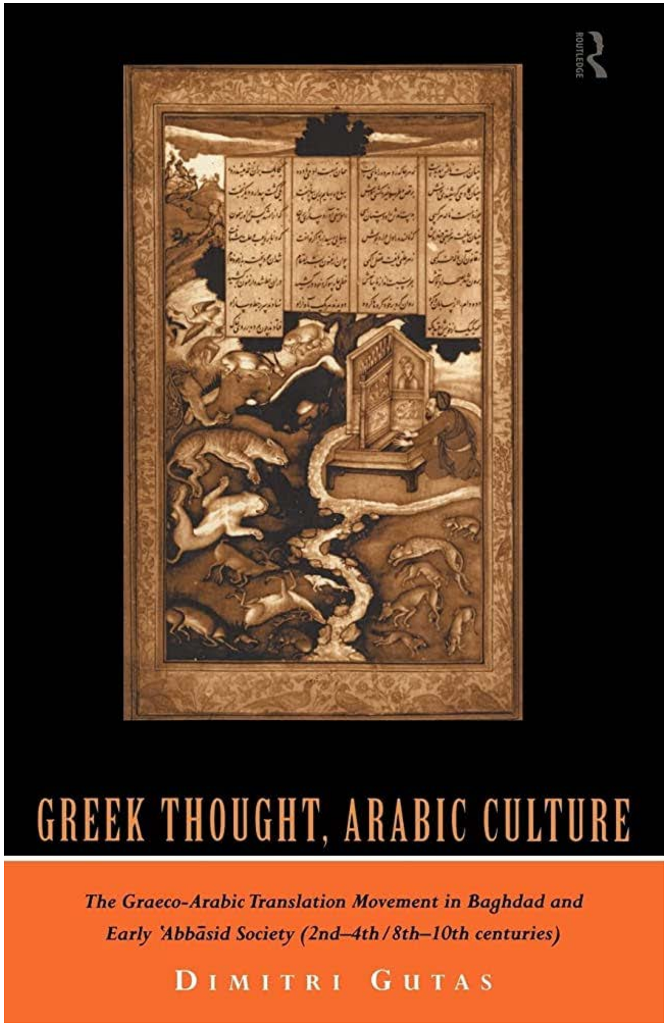
Άλγεβρα ή Θεωρία Αριθμών;
Η διαμάχη για τον χαρακτήρα του έργου του Διοφάντου







If, in the course of his solution, Diophantus proceeded with the substitution, elimination and displacement of species, in short using algebraic techniques, the *Arithmetica* is not a treatise on algebra. According to our terminology, it is definitely a book on arithmetic, not



των επιφανειών.[20] Το έργο του Ḫwārizmī, με τη σειρά του, και η περαιτέρω εξέλιξη της άλγεβρας, είχαν τελικά ως αποτέλεσμα την αραβική μετάφραση της Αριθμητικής του Διόφαντου. Είναι σημαντικό, όμως, ότι παρόλο που η Αριθμητική του Διόφαντου είναι ένα έργο για την αριθμητική, μεταφράστηκε υπό το φως του έργου του al-Ḫwārizmī για την άλγεβρα και με τη χρησιμοποίηση τεχνικών όρων δανεισμένων από αυτό. Ένα παρόμοιο παράδειγμα μπορεί να δοθεί από το συναφή επιστημονικό τομέα της οπτικής. Τα οπτικά έργα του Διοκλή, του Ανθεμίου του Τραλλιανού και του Διδύμου μεταφράστηκαν στα Αραβικά λόγω του πρακτικού ενδιαφέροντος που έδειχναν οι λόγιοι και οι ηγέτες για τα πυρεία.* Ο

Τελικά, το έργο του Διόφαντου είναι έργο αριθμητικής ή άλγεβρας;
Απάντηση: Και τα δύο και τίποτα από τα δύο.

★ ★★ ★ Είναι έργο προ-μοντέρνας άλγεβρας ★ ★★ ★

Η άλγεβρα που ασκούνταν πριν τον 17^{o} αι. δεν ήταν ίδια με τη σημερινή άλγεβρα. Λειτουργούσε σε μια θεμελιωδώς διαφορετική εννοιολογική βάση σε σύγκριση με την άλγεβρα που εγκαινιάζεται με τον Viète το 1591 και βρίσκει την πρώτη της ολοκληρωμένη έκφραση στην περίφημη *La Geometrie* του Descartes (1637). Αποδείξεις για τις εν λόγω εννοιολογικές διαφορές βρίσκουμε στους τρόπους με τους οποίους οι προ του 1600 αλγεβριστές πραγματεύονταν τα προβλήματα. **Δομούσαν τις λύσεις διαφορετικά**, εξέφραζαν ορισμένες **πράξεις με τρόπους που στον σημερινό αναγνώστη είτε φαίνονται σαν να μην έχουν νόημα είτε συνυφαίνονται με τον σύγχρονο συμβολισμό**, **απέφευγαν τους άρρητους συντελεστές** στις εξισώσεις κ.ά. Αυτές οι ανωμαλίες, στο σύνολό τους, αποτελούν τεκμήρια ενός **διαφορετικού τρόπου κατανόησης των μονωνύμων, των πολυωνύμων και των εξισώσεων**.

Αυτή την άλγεβρα που ασκούνταν προ του Viète θα την ονομάζουμε «**προ-μοντέρνα άλγεβρα**» για να τη διακρίνουμε από τη μοντέρνα στοιχειώδη άλγεβρα.

Γρίφοι: πτώσεις, γένος, αριθμός (ενικός, πληθυντικός) και ο ‘συντελεστής’ 1

Μοντέρνο πολυώνυμο $x^2 + 4x + 4$

Bombelli (1572) $1\,\overset{2}{\smile}$ p. $4\,\overset{1}{\smile}$ p. 4

p. = più (επιπλέον)

Al-Khwarazmī (περ. 830)

ένα μαλ τέσσερα πράγματα τέσσερα ντιράμ

Διόφαντος

δύναμις $\overline{\alpha}$ αριθμοί $\overline{\delta}$ μονάδες $\overline{\delta}$

$\Delta^{\Upsilon}\,\overline{\alpha}$ ς $\overline{\delta}$ $\overset{\circ}{M}$ $\overline{\delta}$

Μοντέρνο πολυώνυμο $2x^3 + x^2 - 4x - 4$

Bombelli (1572) $2\,\overset{3}{\smile}$ p. $1\,\overset{2}{\smile}$ m. $4\,\overset{1}{\smile}$ m. 4

m. = meno (με έλλειψη)

Al-Khwarazmī (περ. 830)

Δύο κύβοι ένα μαλ με έλλειψη τεσσάρων πραγμάτων και τεσσάρων ντιράμ

Διόφαντος

κύβοι $\overline{\beta}$ δύναμις $\overline{\alpha}$ λείψει αριθμών $\overline{\delta}$ μονάδων $\overline{\delta}$

$K^{\Upsilon}\overline{\beta}\ \Delta^{\Upsilon}\overline{\alpha}$ ⋔ ς $\overline{\delta}$ $\mathring{M}$ $\overline{\delta}$

Το μοντέρνο + είτε δεν υπάρχει στα προ-μοντέρνα πολυώνυμα είτε αντ’ αυτού υπάρχει το «και».

Το μοντέρνο – δεν υπάρχει στα προ-μοντέρνα πολυώνυμα. Αντ’ αυτού υπάρχουν λέξεις, όπως η λέξη «λείψει» του Διοφάντου, που σημαίνουν «με έλλειψη», «εκτός» (‘όλη η τάξη εκτός από τον Μάνο’), «παρά» (‘παρά 5 λεπτά 2 ώρες’).

Η λύση των γρίφων: Η διάκριση δύο σταδίων στην ιστορία της άλγεβρας: προ-μοντέρνα και μοντέρνα άλγεβρα

Προ-μοντέρνα άλγεβρα

Τα ονόματα των δυνάμεων / Αλγεβρικοί όροι

Ελληνικά	**Αραβικά**	**Ιταλικά**	**Μοντέρνα**
μονάς	μονάδα / ντιράμ	numero / dragma	1
ἀριθμός	πράγμα / ρίζα	cosa (πράγμα)	x
δύναμις	*μαλ*	censo (χρηματικό ποσό)	x^2
κύβος	κύβος	cubo (κύβος)	x^3
δυναμοδύναμις	*μαλ-μάλ*	censo di censo	x^4

Matrit. 4678 (φ. 123v)

Tannery $\Delta^{Y}\bar{\alpha}\ \mathring{M}\ \overline{\iota\beta}\ \delta^{\chi}\ \pitchfork\ \varsigma\ \bar{\xi}\ \boxed{\text{ἴσ.}}\ \Delta^{Y}\bar{\alpha}\ \mathring{M}\ \bar{\alpha}$

Σήμερα $x^2 + 12\frac{1}{4} - 7x \boxed{=} x^2 + 1$

Το προ-μοντέρνο μονώνυμο είναι ζεύγος αποτελούμενο από πλήθος-και-είδος

Παράδειγμα 1: $2^\circ\ 1'\ 12''$

2 μοίρες, 1 πρώτο λεπτό, 12 δεύτερα λεπτά

- Οι ‘συντελεστές’ 2, 1, 12 δηλώνουν πλήθη.
- Ο ‘συντελεστής’ 1 γράφεται.
- Τα $^\circ$, $'$, $''$ είναι είδη. Δεν είναι τιμές.
- Ενικός και πληθυντικός αριθμός όταν πρέπει.

Παράδειγμα 2:

Στο μοντέρνο μονώνυμο ax^n:

- Τα a και x είναι αριθμοί.
- Υπάρχουν πράξεις (βαθμωτός πολλαπλασιασμός και ύψωση σε δύναμη).

Στο αντίστοιχο προ-μοντέρνο μονώνυμο:

- Μόνο το a είναι αριθμός.
- Το x δεν είναι αριθμός, αλλά είδος αριθμού.
- Δεν υπάρχει καμία πράξη.
- Είναι ζεύγος από πλήθος-και-είδος.
- Ο ‘συντελεστής’ 1 είναι αναγκαίος.
- Ο πληθυντικός (όταν $a > 1$) είναι αναγκαίος.

Οι πράξεις στην προ-μοντέρνα άλγεβρα και αριθμητική

Τετάχθω ὁ προστιθέμενος ἑκατέρῳ ἀριθμῷ ς ᾱ. κἂν μὲν τῷ ρ̄ προστεθῇ, ἔσται ς ᾱ Μ̊ ρ̄ · ἐὰν δὲ τῷ κ̄, γίνεται ς ᾱ Μ̊ κ̄. καὶ δεήσει τὰ μείζονα τῶν ἐλασσόνων εἶναι

«Έστω ότι ο προστιθέμενος στον κάθε αριθμό έχει οριστεί να είναι 1 Αριθμός. Και αν **προστεθεί** στον 100, **θα είναι** 1 Αριθμός, 100 μονάδες, ενώ αν (**προστεθεί**) στον 20, **γίνεται** 1 Αριθμός, 20 μονάδες.»

Με τον συμβολισμό της μοντέρνας άλγεβρας την πρώτη πρόσθεση θα τη γράφαμε $x + 100 = x + 100$. Ταυτολογία.

Τι είναι το $a + b$; Πρόσθεση; Αποτέλεσμα πρόσθεσης; **Και τα δύο**;

Η ίδια πρόσθεση στην προ-μοντέρνα άλγεβρα:
Προσθέτω 1Α και 100μ → 1Α 100μ. Η πράξη γίνεται *εν χρόνω*.

Τετάχθω δ· ἀφαιρούμενος ἀφ' ἑκατέρου· ἀριθμοῦ, ϛ ᾱ. κἂν μὲν ἀπὸ τοῦ ρ̄ ἀφαιρεθῇ, λοιπαὶ Μ̊ ρ̄ ⋔ ϛ ᾱ· ἐὰν δὲ ἀπὸ τοῦ κ̄, λοιπαὶ Μ̊ κ̄ ⋔ ϛ ᾱ. καὶ δεήσει τὰ

«Έστω ότι ο αφαιρούμενος από τον κάθε αριθμό έχει οριστεί να είναι 1 Αριθμός. Και αν **αφαιρεθεί** από τον 100, **απομένουν** 100 μονάδες με έλλειψη 1 Αριθμού, ενώ αν (**αφαιρεθεί**) από τον 20, **απομένουν** 20 μονάδες με έλλειψη 1 Αριθμού.»

Στη μοντέρνα άλγεβρα την πρώτη αφαίρεση θα τη γράφαμε $100 - x = 100 - x$.

Η ίδια αφαίρεση στην προ-μοντέρνα άλγεβρα:
Αφαιρώ 100μ από 1Α → 100μ με έλλειψη 1Α.

Al-Qalaṣādī: «Πρόσθεσε μια ρίζα του έξι σε μια ρίζα του πέντε· λες ότι το αποτέλεσμα είναι μια ρίζα του έξι και μια ρίζα του πέντε».
Μοντέρνα αριθμητική: $\sqrt{6} + \sqrt{5} = \sqrt{6} + \sqrt{5}$. Ταυτολογία.
Προ-μοντέρνα αριθμητική: Προσθέτω $\sqrt{6}$ και $\sqrt{5}$ → $\sqrt{6}$ και $\sqrt{5}$

Το μοντέρνο πολυώνυμο $ax^n \pm bx^m$:

- Είναι ένας αριθμός γραμμένος σαν γραμμικός συνδυασμός που περιέχει πράξεις (βαθμωτούς πολ/μούς, πολλαπλασιασμούς, προσθέσεις, αφαιρέσεις).

Το αντίστοιχο προ-μοντέρνο πολυώνυμο:

- Δεν περιέχει καμία πράξη.
- Δεν περιέχει $\pm$ αλλά το συμπλεκτικό «και» και το «με έλλειψη».
- Δεν είναι αριθμός αλλά συλλογή (aggregation).

Ένα προ-μοντέρνο πολυώνυμο σαν το σημερινό $2x^3 + 9x^2$ είναι μια συλλογή **έντεκα** αντικειμένων **δύο** διαφορετικών **ειδών**. Σαν το «2° και $1'$», το «2 βιβλία και 9 τετράδια», ή το «σαλάτες 2, σουβλάκια 9».

- Η προ-μοντέρνα (πολυωνυμική) εξίσωση είναι εξίσωση μεταξύ δύο συλλογών (aggregations).
- Δεν περιέχει καμία πράξη.
- Όταν λύνεται ένα πρόβλημα με τη μέθοδο της προ-μοντέρνας άλγεβρας, οι πράξεις που επιτάσσει η εκφώνηση του προβλήματος πρέπει να γίνουν στη διαδικασία κατάστρωσης της εξίσωσης και όχι στο πλαίσιο της εξίσωσης. Η εξίσωση είναι ελεύθερη πράξεων.

- Η προ-μοντέρνα άλγεβρα δεν ήταν θεωρία εξισώσεων (όπως ήταν η μοντέρνα άλγεβρα μέχρι τον $19^{ο}$ αι.).
- Ήταν μέθοδος επίλυσης προβλημάτων δια της μετατροπής τους σε εξισώσεις.

Επίλυση προβλημάτων

Η επίλυση ενός προβλήματος με προ-μοντέρνα άλγεβρα περιλαμβάνει τα ακόλουθα βασικά στάδια:
(1) Οι άγνωστοι λαμβάνουν αλγεβρικά ονόματα από μια προκαθορισμένη λίστα ονομάτων των δυνάμεων, επί των οποίων εφαρμόζονται οι πράξεις που επιτάσσει η εκφώνηση. Το πρόβλημα να μετατρέπεται σε μια – στην ιδανική περίπτωση – πολυωνυμική εξίσωση.
(2) Η εξίσωση απλοποιείται. Στην προ-μοντέρνα άλγεβρα μια εξίσωση θεωρείται ότι έχει απλοποιηθεί όταν (α) δεν περιέχει όρους που λείπουν και (β) δεν υπάρχουν δύο ή περισσότεροι όροι της ίδιας δύναμης. Έτσι, η απλοποίηση περιλαμβάνει δύο βασικά βήματα: (α) Οι όροι της μορφής «Α με έλλειψη Β» πρέπει να αποκατασταθούν ώστε να γίνουν πλήρη Α (al-jabr) και συγχρόνως το Β πρέπει να προστεθεί στο άλλο μέλος της εξίσωσης˙ και (β) οι όμοιοι όροι στις δύο πλευρές της εξίσωσης πρέπει να αντιπαραβληθούν, ώστε να απομείνει η διαφορά τους στην πλευρά του μεγαλύτερου όρου (al-muqābala).
(3) Κατόπιν επιλύεται η απλοποιημένη εξίσωση, με τη χρήση ενός έτοιμου εκ των προτέρων κανόνα.
(4) Αφού βρεθεί η τιμή του αλγεβρικού αγνώστου, υπολογίζονται οι άγνωστοι αριθμοί του προβλήματος.

Το πρόβλημα Β.20 του Διοφάντου

Εὑρεῖν δύο ἀριθμοὺς ὅπως ὁ ἀπὸ τοῦ ἑκατέρου αὐτῶν τετράγωνος, προσλαβὼν τὸν λοιπόν, ποιῇ τετράγωνον.

Τετάχθω ὁ α^{ος} ς $\bar{α}$, ὁ δὲ β^{ος} $\mathring{Μ}\,\bar{α}$ ς $\bar{β}$, ἵνα ὁ ἀπὸ τοῦ α^{ου} $\square^{ος}$, προσλαβὼν τὸν β^{ον}, ποιῇ $\square^{ον}$. λοιπόν ἐστι καὶ τὸν ἀπὸ τοῦ β^{ου} $\square^{ον}$, προσλαβόντα τὸν α^{ον}, ποιεῖν $\square^{ον}$· ἀλλ' ὁ ἀπὸ τοῦ β^{ου} $\square^{ος}$, προσλαβὼν τὸν α^{ον}, ποιεῖ $Δ^{Y}\bar{δ}$ ς $\bar{ε}$ $\mathring{Μ}\,\bar{α}$· ταῦτα ἴσα $\square^{ῳ}$.

πλάσσω τὸν $\square^{ον}$ ἀπὸ ς $\bar{β}$ $\pitchfork$ $\mathring{Μ}\,\bar{β}$· αὐτὸς ἄρα ἔσται $Δ^{Y}\bar{δ}$ $\mathring{Μ}\,\bar{δ}$ $\pitchfork$ ς $\bar{η}$· καὶ γίνεται ὁ ς $\frac{ιγ}{γ}$.

ἔσται ὁ μὲν α^{ος} $\frac{ιγ}{γ}$, ὁ δὲ β^{ος} $\frac{ιγ}{ιθ}$, καὶ ποιοῦσι τὸ πρόβλημα.

Να βρεθούν δύο αριθμοί ώστε ο τετράγωνος καθενός από τους δύο, αν προσλάβει τον άλλο, να σχηματίζει τετράγωνο.

Έστω ότι ο πρώτος έχει οριστεί να είναι 1 Αριθμός και ο δεύτερος 1 μονάδα, 2 Αριθμοί, προκειμένου ο τετράγωνος του πρώτου, αν προσλάβει τον δεύτερο, να σχηματίζει τετράγωνο. Απομένει και ο τετράγωνος του δεύτερου, αν προσλάβει τον πρώτο, να σχηματίζει τετράγωνο. Αλλά ο τετράγωνος του δεύτερου, όταν προσλάβει τον πρώτο, γίνεται 4 Δυνάμεις, 5 Αριθμοί, 1 μονάδα. Αυτά είναι ίσα προς έναν τετράγωνο. Σχηματίζω τον τετράγωνο από (πλευράς) 2 Αριθμών με έλλειψη 2 μονάδων. Άρα ο ίδιος θα είναι 4 Δυνάμεις, 4 μονάδες με έλλειψη 8 Αριθμών, οπότε ο Αριθμός γίνεται 3 13^{α}.

Ο πρώτος θα είναι 3 13^{α}, ο δεύτερος 19 13^{α}, και ικανοποιούν το πρόβλημα.

$$\begin{cases} (1\text{ος στο τετράγωνο}) + (2\text{ος}) = \square \\ (2\text{ος στο τετράγωνο}) + (1\text{ος}) = \square' \end{cases} \qquad \begin{cases} x^2 + y = \square \\ y^2 + x = \square' \end{cases}$$

Ονόματα	**Πράξεις με τα ονόματα**	**Εξίσωση**
1ος ≔ 1Α		
2ος ≔ 1μ 2Α		
	Τετραγωνίζω το 1μ 2Α → 4Δ 4Α 1μ	
	Προσθέτω 1Α → 4Δ 5Α 1μ	
		4Δ 5Α 1μ = $\square'$
$\sqrt{\square'}$ ≔ 2Α λ 2μ		
	Τετραγωνίζω το 2Α λ 2μ → 4Δ 4μ λ 8Α	
		4Δ 5Α 1μ = 4Δ 4μ λ 8Α

Οι δύο πρώτες ονομασίες έχουν επιλεγεί με μοντέλο την ταυτότητα που θα γράφαμε σήμερα ως $m^2 + (1 + 2m) = (m + 1)^2$, προς την οποία εξομοιώνεται η πρώτη συνθήκη, ενώ η εξίσωση κατασκευάζεται από τη δεύτερη συνθήκη.

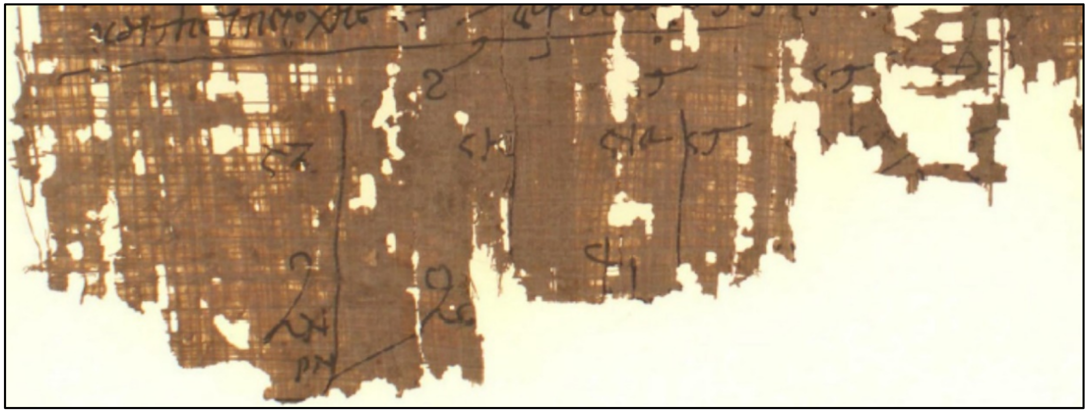
Τα πρόσωπα: Προ-μοντέρνα άλγεβρα

- p.Michigan 620 (περ. 120 μ.Χ.)
- Διόφαντος (περ. 300 μ.Χ.). Θέων (περ. 375 μ.Χ.) και σχολιαστές Ύστερης Αρχαιότητας και του Βυζαντίου
- Al-Khwārazmī (περ. 830 μ.Χ.) και λοιποί αλγεβριστές στο μεσαιωνικό Ισλάμ (Ibn Turk, Abū Kāmil, al-Karajī, al-Sulamī, al-Khayyām κ.ά.)
- Leonardo Fibonacci (1202: πρώτη έκδοση του *Liber Abbaci*)
- Ιταλοί αββακιστές του ύστερου Μεσαίωνα (14ος-15ος αι.)
- Ιταλοί αλγεβριστές της Αναγέννησης: Girolamo Cardano, Nicolo Tartaglia, Ludovico Ferrari, Rafael Bombelli κ.ά.
- Γάλλοι ουμανιστές της Αναγέννησης: Jacques Peletier, Guillaume Gosselin κ.ά.

Τα πρόσωπα: Μοντέρνα άλγεβρα

- François Viète (1591: *In artem analyticem Isagoge*)
- Post-Vietan αλγεβριστές: René Descartes, Pierre Fermat, Isaac Newton, Leonhard Euler, Niels Henrik Abel κ.ά.

Η άλγεβρα προ του Διοφάντου



p.Michigan 620 (2ος αι. μ.Χ.)

Πρώτο πρόβλημα

	ζ'	ςτ	ςτ	ςΘτ	
ς̇ζ	ςη	ς̇ιε	ςτ [ς̇]λ	ςχ	
				ς̇ξ	[ςτ]
				ρ̣[ν]	
Aν	Aσ	Bφν	Ε̣[ρ]	[Θτ]	
ρν					

«9900 δραχμές να διαιρεθούν σε τέσσερα μέρη, ώστε το δεύτερο να είναι μεγαλύτερο του πρώτου κατά το ένα έβδομο του πρώτου, το τρίτο να υπερέχει των δύο πρώτων κατά 300 δραχμές, και το τέταρτο να υπερέχει των τριών πρώτων κατά 300 δραχμές. Να βρεθούν οι αριθμοί.»

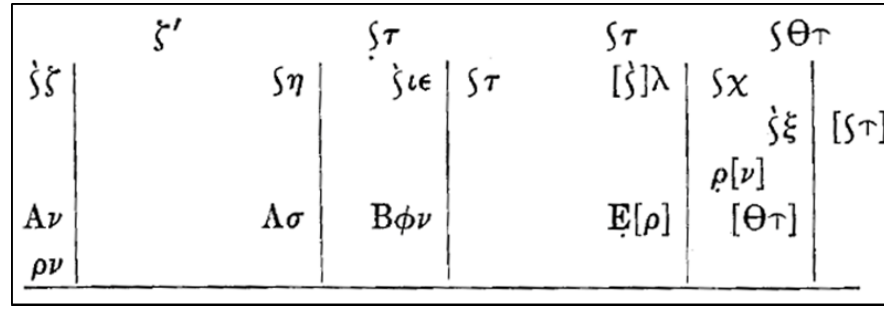
Το πρόβλημα (με μοντέρνο συμβολισμό):

$$a + b + c + d = 9900,$$

$$b = a + \frac{1}{7}a,$$

$$c = a + b + 300,$$

$$d = a + b + c + 300.$$

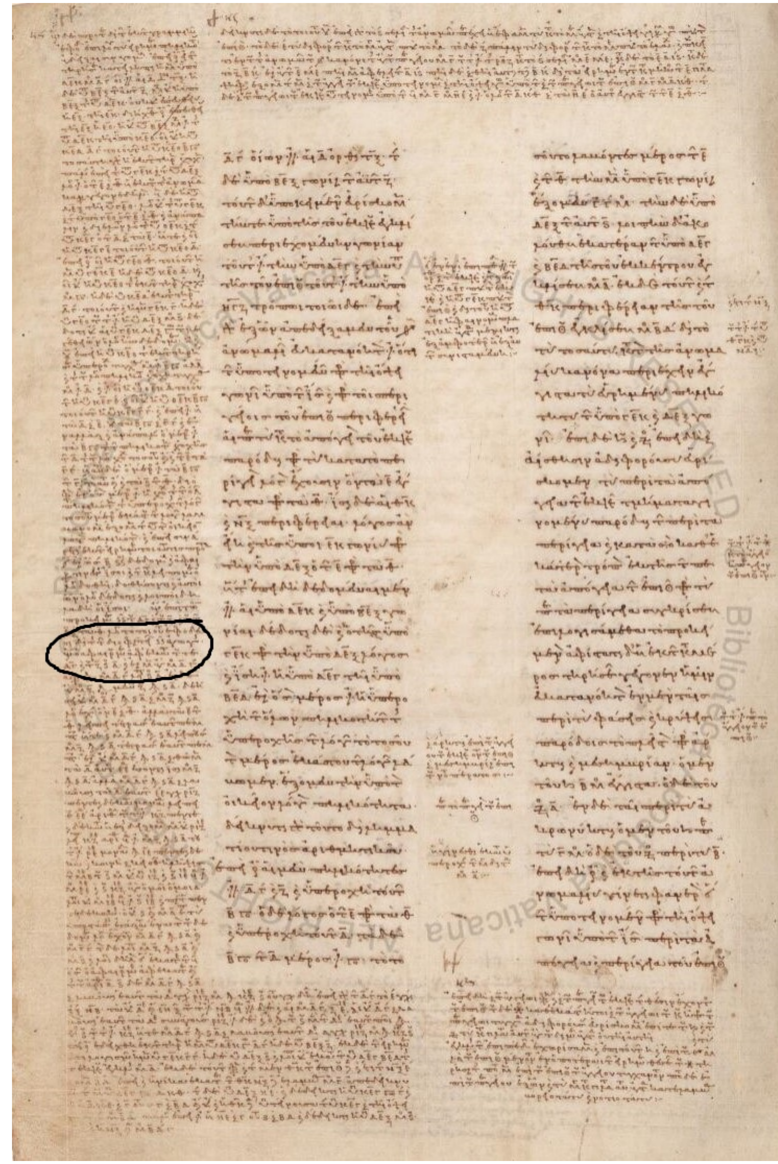


Ονοματοδοσία	**Πράξεις με ονόματα**	**Εξίσωση**
a ≔ 7Α		
	1/7 του 7Α → 1Α	
	Πρόσθ. 7Α, 1Α → 8Α	
b ≔ 8Α		
	Πρόσθ. 7Α, 8Α → 15Α	
	Πρόσθ. 15Α, 300δ → 15Α 300δ	
c ≔ 15Α 300δ		
	Πρόσθ. 7Α, 8Α, και 15Α 300δ → 30Α 300δ	
	Πρόσθ. 30Α 300δ, και 300δ → 30Α 600δ	
d ≔ 30Α 600δ		
	Πρόσθ. 7Α, 8Α, 15Α 300δ, και 30Α 600δ → 60Α 900δ	
		60Α 900δ = 9900δ

Συντομογραφίες:
Α είναι «Αριθμός»
δ είναι «δραχμή»

Η άλγεβρα μετά τον Διόφαντο: Θέων και Υπατία

166 Ὑπατία: ἡ Θέωνοϲ τοῦ γεωμέτρου θυγάτηρ, τοῦ Ἀλεξανδρέωϲ
φιλοϲόφου, καὶ αὐτὴ φιλόϲοφοϲ καὶ πολλοῖϲ γνώριμοϲ· γυνὴ Ἰϲιδώρου
τοῦ φιλοϲόφου. ἤκμαϲεν ἐπὶ τῆϲ βαϲιλείαϲ Ἀρκαδίου. ἔγραψεν ὑπό-
μνημα εἰϲ Διόφαντον, τὸν ἀϲτρονομικὸν Κανόνα, εἰϲ τὰ Κωνικὰ Ἀπολ-
λωνίου ὑπόμνημα. αὕτη διεϲπάϲθη παρὰ τῶν Ἀλεξανδρέων, καὶ τὸ



Vat. gr. 1594 (9^{ος} αι.)

Η άλγεβρα μετά τον Διόφαντο: Ύστερη Αρχαιότητα

«– Πες μου Διόδωρε, που είσαι τόσο διάσημος στη γνωμονική τέχνη, την ώρα από τότε που στην Ανατολή σηκώθηκαν οι χρυσοί τροχοί του άρματος του ήλιου.
– Τέσσερις φορές όσο είναι τα τρία πέμπτα του δρόμου που έχει διανύσει, τόσο υπολείπεται να διανύσει μέχρι να χαθεί στη δυτική θάλασσα».

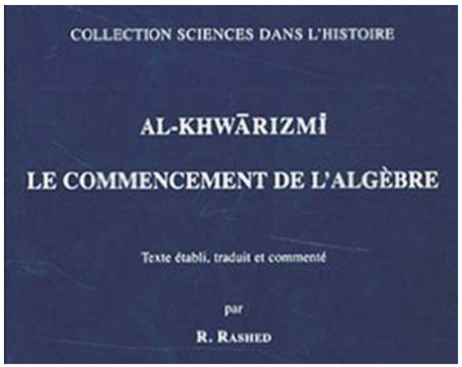
«Αυτό επιλύεται μεθοδικά σύμφωνα με το δεύτερο (πρόβλημα) του πρώτου βιβλίου των *Αριθμητικών* του Διοφάντου. Διότι πρέπει να διαιρέσουμε τον αριθμό 12 σε δύο αριθμούς που έχουν τον λόγο που έχουν τα 5 προς τα 12. Και ο Αριθμός γίνεται 12 17^{α}. Άρα, τα μέρη της ημέρας που έχουν παρέλθει θα είναι 60 17^{α}, ενώ αυτά που υπολείπονται, 144 17^{α}, και το πρόβλημα έχει επιλυθεί.»

Ψευδο-Ηλίας (Ψευδο-Δαβίδ), εξήγηση της *Εισαγωγής* του Πορφυρίου

«Ας αναφέρουμε λοιπόν τους εφευρέτες αυτών των επιμέρους (επιστημών), οι οποίοι αρίστευσαν σε αυτές. Ο Νικόμαχος, λοιπόν, κατείχε την πρώτη θέση στην αριθμητική και ο Διόφαντος στη λογιστική˙ πάλι, την πρώτη θέση στη μουσική κατείχαν οι Πυθαγόρειοι, ⟨ενώ στην ένυλη μουσική ο Αριστόξενος˙ και ο Ευκλείδης στη γεωμετρία,⟩ ενώ ο Ήρων στη γεωδαισία˙ και ο Παύλος στην αστρονομία, ενώ ο Θεοδόσιος στη σφαιρική.»

Η άλγεβρα μετά τον Διόφαντο: Κλασικό Ισλάμ

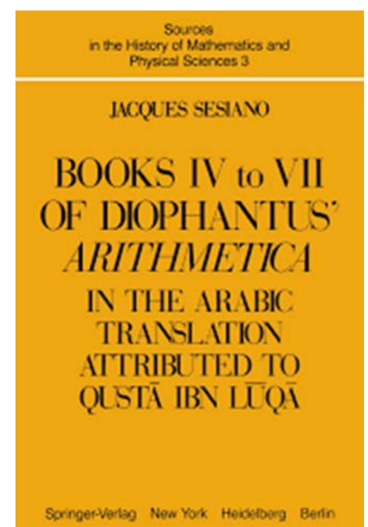
Η αραβική άλγεβρα πριν τη μετάφραση του Qusṭā ibn Lūqā:
al-Khwārazmī (περ. 830) και Abū Kāmil (όψιμος $9^{\text{ος}}$ αι.)



Διόφαντος $\begin{cases} 2^2 + 3^2 = 13 \\ \text{Να διαιρεθεί ο 13 σε δύο άλλους } \square \end{cases}$

Abū Kāmil $\begin{cases} 1^2 + 2^2 = 5 \\ \text{Να διαιρεθεί ο 5 σε δύο άλλους } \square \end{cases}$

Qusṭā ibn Lūqā:
Μεταφραστής των *Αριθμητικών*



al-Khāzin

al-Nīsābūrī

ʿAlī al-Sulamī

Abū l-Wafāʾ

al-Karajī

al-Zanjānī

Ibn al-Haytham

al-Samawʾal

Ibn Fallūs

Ibn al-Qifṭī

al-Nūayīrī

Karajī	Διόφ.	III.40	B.11	IV.47	Γ.7	V.13	4.15c
II.45	A.4	III.41	B.12	IV.48	Γ.8	V.14	4.16
II.46	A.8	III.42	B.13	IV.49	Γ.9	V.15	4.17
II.47	A.9	III.43	B.14	IV.50	Γ.10	V.16	4.18
II.48	A.10	III.44	B.15	IV.51	Γ.11	V.17	4.19
II.50	B.22	III.45	B.16	IV.52	Γ.12	V.19	4.20
III.1	B.20	IV.1	B.22	IV.53	Γ.13	V.20	4.22
III.2	B.21	IV.2	B.23	IV.54	Γ.14	V.21	4.23
III.3	B.8*	IV.3	B.24	IV.55	Γ.15	V.22	4.24
III.4	B.20*	IV.4	B.25	IV.56	Γ.16	V.28	4.27
III.7	A.12	IV.5	B.26	IV.57	Γ.17	V.29	4.28
III.20	A.13	IV.6	B.27	IV.58	Γ.18	V.30	4.29
III.24	A.16	IV.7	B.28	IV.59	Γ.21	V.31	4.30
III.25	A.17	IV.8	B.29	IV.60	Γ.20	V.32	4.31
III.26	A.24	IV.9	B.30	IV.61	Γ.19	V.33	4.32
III.27	A.25	IV.10	B.31	V.1	4.1	V.34	4.33
III.28	A.39	IV.11	B.32	V.2	4.2	V.35	4.34
III.29	A.18	IV.12	B.33	V.3	4.3	V.36	4.35
III.30	A.19	IV.13	B.34	V.4	4.4	V.37	4.36
III.31	A.20	IV.14	B.35	V.5	4.5	V.38	4.37
III.32	A.21	IV.40	B.18	V.5	4.6	V.39	4.38
III.33	A.22*	IV.41	B.19	V.7	4.7	V.40	4.39
III.34	A.22	IV.42	Γ.1	V.8	4.8	V.41	4.40
III.35	A.23	IV.43	Γ.2	V.9	4.9	V.42	4.41
III.36	B.8	IV.44	Γ.3	V.10	4.10	V.43	4.20
III.37	B.9	IV.45	Γ.5	V.11	4.11		
III.38	B.10	IV.46	Γ.6	V.12	4.14		

Η άλγεβρα μετά τον Διόφαντο: Βυζάντιο

Μιχαήλ Ψελλός
Πρόδρομος (δάσκαλος Βλεμμύδη)
Νικηφόρος Βλεμμύδης
Γεώργιος Παχυμέρης
Μάξιμος Πλανούδης
Ύστερες βυζαντινές μαρτυρίες:
Νικόλαος Ραβδάς, Ισαάκ Αργυρός, Δημήτριος Κυδώνης, Ιωάννης Χορτασμένος

	Αλγεβρικά	**Εναλλακτικά αλγεβρικά**
0	μονάς	
1	ἀριθμός	
2	δύναμις	
3	κύβος	
4	δυναμοδύναμις	
5	δυναμόκυβος	ἄλογος πρῶτος / ἀριθμὸς πέμπτος
6	κυβόκυβος	
7		ἄλογος δεύτερος / ἀριθμὸς ἕβδομος
8	τετραπλῆ δύναμις	
9	κύβος ἐξελικτός	

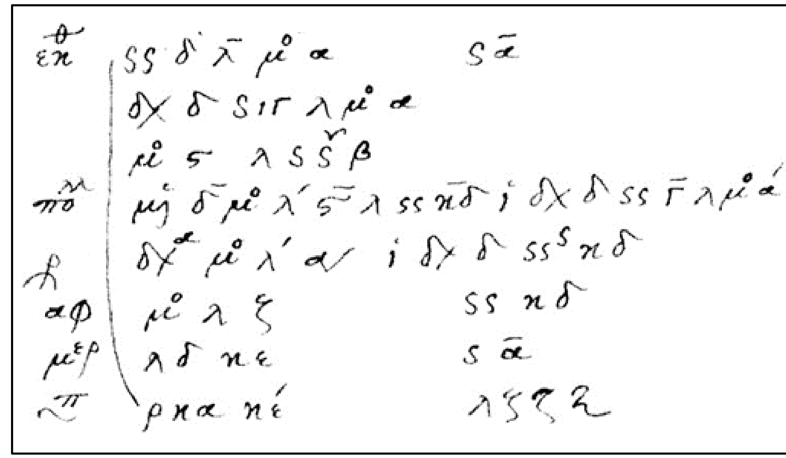
«Τα αριθμητικά προβλήματα για τους πολλαπλασιασμούς είναι όπως αν μας ζητηθεί να διαιρέσουμε έναν δεδομένο αριθμό σε λόγο ή διπλάσιο, ή τριπλάσιο, ή οποιονδήποτε πολλαπλάσιο, ώστε το (ένα) μέρος να έχει προς το (άλλο) μέρος τον δεδομένο λόγο.
Αν μας ζητηθεί, λοιπόν, να διαιρέσουμε σε διπλάσιο λόγο, πρέπει να λάβουμε τον ‘υποτριπλάσιο’ του όλου, και αυτόν να τον θέσουμε να είναι ο μικρότερος όρος, του οποίου λαμβάνουμε τον διπλάσιο, δηλαδή το υπόλοιπο, (που είναι) ο μεγαλύτερος όρος. Και ικανοποιείται το πρόβλημα.»

Μάξιμος Πλανούδης: Η κορωνίδα του σχολιασμού του Διοφάντου στο Βυζάντιο

Επιστολή στον Θεόδωρο Μουζάλωνα († 1294)

«Η δε βίβλος του Διοφάντου, την οποία και έπρεπε να επιστρέψω – άλλωστε οι επιστολές αυτό ακριβώς παράγγελναν –, τώρα έχει επανέλθει από τις ρυτίδες που παλιά είχε, νεάζουσα. Όσον αφορά το εξωτερικό, (έχει επανέλθει) αφού αφαιρέθηκε το παλαιό δέρμα φιδιού, αν θα μπορούσε να πει κανείς ότι ήταν φίδι, ενώ όσον αφορά το εσωτερικό (αφού υπέστη) όμοια με την επισκευή και αποκατάσταση την οποία θα βλέπαμε (να γίνεται) σε κάποιο σπίτι το οποίο έχει υποστεί φθορές από την πολύχρονη χρήση.»

Πρόβλημα Β.26, Paris. gr. 2485 (φ. 100r)



ἔκθ.	ςς δ̄ ⋔ μ° ᾱ		ς ᾱ
	$Δ^Υ$ δ̄ ςς γ̄ ⋔ μ° ᾱ		
	μ° ς̄ ⋔ ςς β̄		
πολλ.	$Δ^Υ$ δ̄ μ° λ̄ς̄ ⋔ ςς κ̄δ̄	ἴσ.	$Δ^Υ$ δ̄ ςς γ̄ ⋔ μ° ᾱ
πρ.	$Δ^Υ$ δ̄ μ° λ̄ξ̄	ἴσ.	$Δ^Υ$ δ̄ ςς κ̄ξ̄
ἀφ.	μ° λ̄ξ̄		ςς κ̄ξ̄
μερ.	λ̄ξ̄ κξ^α		ς ᾱ
ὑπ.	ρ̄κ̄ᾱ κξ^α		λ̄ξ̄ κξ^α.

… τὸ γὰρ τοιχωρυχεῖν ἴσως ᾐσχύνθησαν, ἢ ἐργῶδες ἐνόμισαν.

Ο Διόφαντος στην περίοδο του Ουμανισμού

Χειρόγραφα του Διοφάντου στην Ιταλία τον 15ο αι.

- Vat. gr. 304: αντιγράφηκε το πρώτο μισό του 14ου αι., αποκτήθηκε από την παπική βιβλιοθήκη μετά το 1447, και είναι καταχωρισμένος στον κατάλογο της βιβλιοθήκης του 1455.
- Vat. gr. 191: αντιγράφηκε το 1296–98, ανήκε στον ουμανιστή Καρδινάλιο Ισίδωρο της Ρωσσίας και αποκτήθηκε από την παπική βιβλιοθήκη κάποια στιγμή την περίοδο 1464–71. Αναφέρεται στον κατάλογο του 1475.
- Matrit. 4678: αντιγράφηκε το δεύτερο μισό του 11ου αι., μεταφέρθηκε στη Μεσσήνη της Σικελίας από τον Κωνσταντίνο Λάσκαρι μετά την άλωση της Κωνσταντινούπολης το 1453.
- Ambros. Et 157 sup., αυτόγραφος του Μάξιμου Πλανούδη, σωζόμενος σε αποσπασματική μορφή, ο οποίος αντιγράφηκε το 1292/1293.
- Marc. gr. 308: αντιγράφηκε στα τέλη του 13ου αι., ανήκε στον Καρδινάλιο Βησσαρίωνα. Από τη δωρεά των χειρογράφων του θεμελιώθηκε η Μαρκιανή Βιβλιοθήκη το 1468, και ο κώδικας 308 εμφανίζεται στον αρχικό κατάλογο που συντάχθηκε το ίδιο έτος.

1464: η πρώτη δημόσια μνεία του Διοφάντου στη Δύση

Ο Γερμανός αστρονόμος Regiomontanus (μαθητής του Καρδινάλιου Βησσαρίωνα) έδωσε μια σειρά διαλέξεων στο Πανεπιστήμιο της Padua για τον Άραβα αστρονόμο al-Faghani , <u>όπου μνημονεύει για πρώτη φορά στη Δύση το έργο του Διοφάντου</u> (από το 1456 ήξερε για τον κώδικα Mar. gr. 308 του Βησσαρίωνα).

«Ο Διόφαντος, όμως, συνέγραψε δεκατρία απαράμιλλης εκλέπτυνσης βιβλία (τα οποία κανένας ως τώρα δεν έχει μεταφράσει στα Λατινικά), στα οποία βρίσκεται ο αληθινός ανθός όλης της αριθμητικής, δηλαδή η τέχνη του rei & census, η οποία σήμερα ονομάζεται με το αραβικό της όνομα, άλγεβρα.

Η διάλεξη του R. δημοσιεύτηκε μόλις το 1537, επομένως οι Ευρωπαίοι μπορούσαν να πληροφορηθούν για τον Διόφαντο από το έτος αυτό και μετά.

Ο Διόφαντος στην περίοδο της Αναγέννησης

L'ALGEBRA
PARTE MAGGIORE
DELL'ARIMETICA
DIVISA IN TRE LIBRI
DI RAFAEL BOMBELLI
DA BOLOGNA.

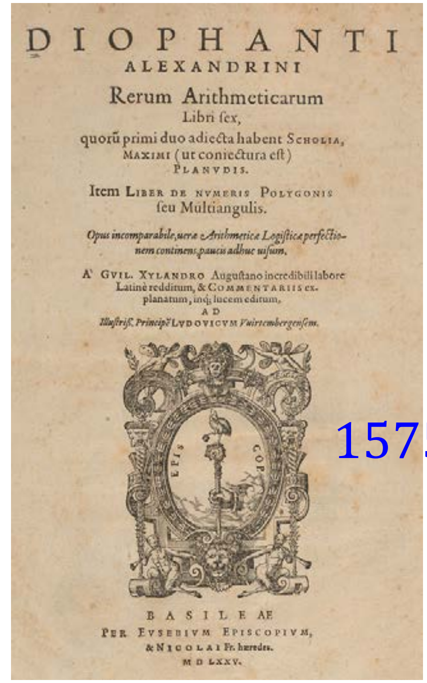
Nouamente posta in luce.

IN BOLOGNA
Nella stamperia di Giouanni Rossi
M D L X X I I.
Con Licentia delli RR. VV. del Vesc. & Inquisit.

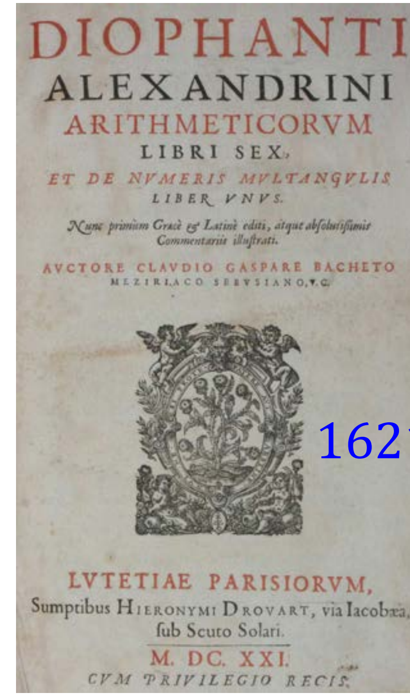
Β	Δ	56	Α.33	99	Β.35	142	Δ.9	195	Δ.36
2	Α.1	57	Α.34	100	Γ.1	148	Δ.10	196	Δ.37
8	Α.2	58	Α.35	101	Γ.2	149	Δ.11	197	Δ.38
10	Α.4	59	Α.37	102	Γ.3	150	Δ.12	200	Δ.39
11	Α.5	60	Α.39	103	Γ.4	151	Δ.13	201	Δ.40
13	Α.6	61	Β.8	104	Γ.5	152	Δ.14	202	Ε.1
14	Α.7	62	Β.9	105	Γ.6	153	Δ.15	203	Ε.2
15	Α.8	63	Β.10	106	Γ.7	158	Δ.16	209	Ε.3
16	Α.9	66	Β.11	110	Γ.8	159	Δ.17	210	Ε.4
18	Α.10	67	Β.13	111	Γ.9	160	Δ.18	211	Ε.5
19	Α.11	69	Β.14	113	Γ.10	161	Δ.19	212	Ε.6
21	Α.12	70	Β.15	114	Γ.11	162	Δ.20	213	λμ.1 Ε.7
26	Α.13	72	Β.16	116	Γ.12	164	Δ.21	215	λμ.2 Ε.7
27	Α.15	73	Β.17	117	Γ.13	167	Δ.22	216	Ε.7
28	Α.16	74	Β.19	120	Γ.14	168	Δ.23	217	λμ. Ε.8
30	Α.17	78	Β.20	121	Γ.15	169	Δ.24	218	Ε.8
31	Α.18	81	Β.21	122	Γ.16	170	Δ.25	219	Ε.9
35	Α.19	83	Β.22	123	Γ.17	171	Δ.26	220	Ε.10
36	Α.20	84	Β.23	124	Γ.18	172	Δ.27	221	Ε.11
37	Α.21	85	Β.24	126	Γ.19	173	Δ.28	222	Ε.12
41	Α.22	86	Β.25	127	Γ.20	179	Δ.29	225	Ε.13
42	Α.23	88	Β.26	128	Γ.21	180	Δ.30	226	Ε.14
44	Α.25	89	Β.27	129	Δ.1	181	Δ.31	232	Ε.15
49	Α.27	90	Β.28	133	Δ.2	182	Δ.32	233	Ε.16
49΄	Α.28	91	Β.29	134	Δ.3	188	Δ.33	234	Ε.17
50	Α.26	92	Β.30	136	Δ.4	189	λμ. Δ.34	235	Ε.18
51	Α.29	93	Β.31	137	Δ.5	190	Δ.34	236	Ε.19
53	Α.30	96	Β.32	138	Δ.6	191	λμ. Δ.35	237	Ε.20
54	Α.31	97	Β.33	140	Δ.7	192	Δ.35		
55	Α.32	98	Β.34	141	Δ.8	194	λμ. Δ.36		

Rafael Bombelli (1526–1572/3)

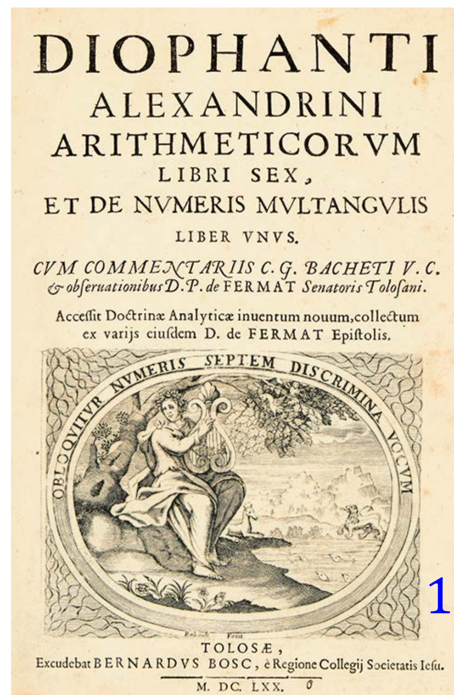
… αυτά τα τελευταία χρόνια, καθώς βρέθηκε στη βιβλιοθήκη του Κυρίου Μας στο Βατικανό ένα ελληνικό έργο αυτής της επιστήμης, το οποίο έχει συγγράψει κάποιος Διόφαντος, ένας έλληνας συγγραφέας από την Αλεξάδρεια, ο οποίος ήκμασε τον καιρό του Αντωνίνου Πίου, και αφού μου το έδειξε ο κ. Antonio Maria Pazzi από το Reggio, καθηγητής μαθηματικών στη Ρώμη, και κρίνοντας από κοινού ότι ο συγγραφέας είναι ευφυέστατος περί τους αριθμούς (αν και δεν πραγματεύεται τους άρρητους αριθμούς, αλλά μόνο σε αυτόν βρίσκει κανείς την τέλεια σειρά της πραγμάτευσης), για να εμπλουτίσουμε τον κόσμο με ένα τέτοιο έργο, αυτός & εγώ αναλάβαμε να το μεταφράσουμε, και έχουμε μεταφράσει πέντε βιβλία (από τα επτά που υπάρχουν)· δεν μπορέσαμε να τελειώσουμε το υπόλοιπο λόγω των δυσκολιών που ενέσκηψαν στον καθένα μας …


DIOPHANTI ALEXANDRINI
Rerum Arithmeticarum Libri sex,
quorū primi duo adiecta habent Scholia, Maximi (ut coniectura est) Planudis.
Item Liber de numeris Polygonis seu Multiangulis.
Opus incomparabile, veræ Arithmeticæ Logisticæ perfectionem continens, paucis adhuc visum.
A Guil. Xylandro Augustano incredibili labore Latinè redditum, & Commentariis explanatum, inq; lucem editum, AD Illustriß. Principē Ludovicum Vuirtembergensem.
BASILEAE
Per Eusebium Episcopium, & Nicolai Fr. hæredes.
M D LXXV.

1575

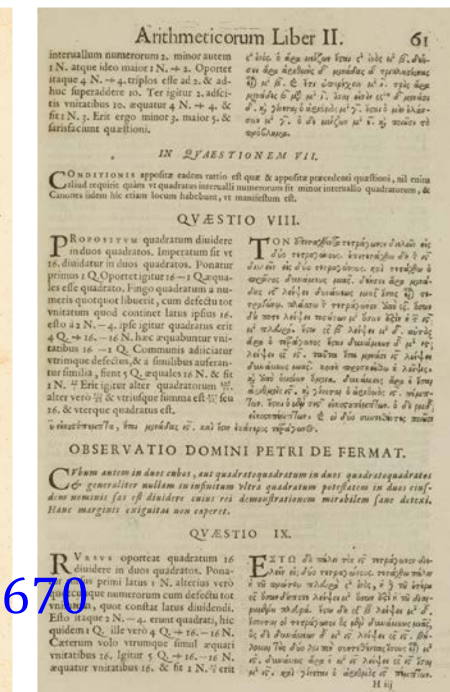

DIOPHANTI ALEXANDRINI
ARITHMETICORVM LIBRI SEX,
ET DE NVMERIS MVLTANGVLIS LIBER VNVS.
Nunc primùm Græcè & Latinè editi, atque absolutissimis Commentariis illustrati.
AVCTORE CLAVDIO GASPARE BACHETO MEZIRIACO SEBVSIANO, V.C.
LVTETIAE PARISIORVM,
Sumptibus Hieronymi Drovart, via Iacobæa, sub Scuto Solari.
M. DC. XXI.
CVM PRIVILEGIO REGIS.

1621


DIOPHANTI ALEXANDRINI
ARITHMETICORVM LIBRI SEX,
ET DE NVMERIS MVLTANGVLIS LIBER VNVS.
CVM COMMENTARIIS C. G. BACHETI V. C. & obseruationibus D. P. de FERMAT Senatoris Tolosani.
Accessit Doctrinæ Analyticæ inuentum nouum, collectum ex varijs eiusdem D. de FERMAT Epistolis.

TOLOSÆ,
Excudebat BERNARDVS BOSC, è Regione Collegij Societatis Iesu.
M. DC. LXX.

1670


Arithmeticorum Liber II. 61

IN QVAESTIONEM VII.

QVÆSTIO VIII.

OBSERVATIO DOMINI PETRI DE FERMAT.

Cubum autem in duos cubos, aut quadratoquadratum in duos quadratoquadratos & generaliter nullam in infinitum ultra quadratum potestatem in duos eiusdem nominis fas est diuidere cuius rei demonstrationem mirabilem sane detexi. Hanc marginis exiguitas non caperet.

QVÆSTIO IX.

Από τα μέσα του $17^{ου}$ αι. η προ-μοντέρνα άλγεβρα γίνεται παρωχημένη. Μαζί και ο Διόφαντος ως αλγεβριστής. Αναδύεται η μοντέρνα άλγεβρα και η Θεωρία Αριθμών. Γεννιέται νέο ενδιαφέρον για τον Διόφαντο, όχι πια ως αλγεβριστή αλλά ως αριθμοθεωρητικό.