ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΑ

ΣΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΥ Γ ΛΥΚΕΙΟΥ

26 Μαΐου 2021

ΘΕΜΑ 1ο

1. (α′) Να διατυπώσετε τις προϋποθέσεις και το συμπέρασμα των Θεωρημάτων Rolle και Μέσης τιμής του Διαφορικού λογισμού.

   (β′) Να δώσετε τη γεωμετρική ερμηνεία των παραπάνω θεωρημάτων.

2. Θεωρήστε τη παρακάτω πρόταση:

   Έστω f και g δύο πραγματικές συναρτήσεις: $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Αν $\forall x \in \mathbb{R}$, $f(x) \cdot g(x) = 0$ τότε

   $$\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = 0 \ \text{ ή } \ \forall x \in \mathbb{R},\ g(x) = 0$$

   Η πρόταση είναι αληθής ή ψευδής; Να δικαιολογήσετε την απάντησή σας.

3. Να χαρακτηρίσεται τις επόμενες προτάσεις με την ένδειξη **(Σ) Σωστό** ή **(Λ) Λάθος** :

   i. Δεν υπάρχει άρτια συνάρτηση που να είναι και γνησίως μονότονη.

   ii. Έστω Δ ένα διάστημα του $\mathbb{R}$. Αν για μια συνάρτηση $f : \Delta \to \mathbb{R}$ υπάρχει $a \in \mathbb{R}$ έτσι ώστε $\forall x \in \Delta :\ f(x) \leq a$ τότε η f έχει μέγιστο το a.

   iii. Υπάρχουν περιοδικές συναρτήσεις που είναι αντιστρέψιμες στο πεδίο ορισμού τους.

   iv. Έστω f και g δύο συναρτήσεις για τις οποίες ισχύει $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = +\infty$ και υπάρχει το όριο της g στο x_0 και $g(x) < 0$ για κάθε x σε μια περιοχή του x_0. Τότε, $\lim\limits_{x \to x_0} \big(f(x) \cdot g(x)\big) = -\infty$.

   v. Έστω f μια πραγματική συνάρτηση. Αν υπάρχει $\eta \in (\alpha, \beta)$ με $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, τέτοιο ώστε $f(\eta) = 0$ και $f(\alpha) \cdot f(\beta) < 0$, τότε η συνάρτηση f μπορεί και να μην είναι συνεχής στο $[\alpha, \beta]$.

Μονάδες $10 + 5 + (2 \times 5) = 25$

ΘΕΜΑ 2ο

Έστω συνάρτηση $f(x) = \dfrac{2\text{ημ}(x)}{\text{συν}^2(x)}$.

1. Να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης D_f.
   (α′) Μελετήστε τη συμμετρία της συνάρτησης f στο D_f.
   (β′) Είναι η συνάρτηση περιοδική στο D_f; Αν ναι, ποια είναι η περίοδός της.
2. Να βρείτε τις ασυμπτώτους της συνάρτησης στο διάστημα $(-\pi, \pi)$.
3. (α′) Να μελετήσετε την παραγωγισιμότητα της f και να βρείτε την πρώτη παράγωγό της εκεί που υπάρχει.
   (β′) Να βρείτε την μονοτονία της και τα ακρότατα.
4. Να χαράξετε την καμπύλη στο D_f.

Μονάδες $(2 + 5 + 5) + 4 + (2 + 3) + 4 = 25$

ΘΕΜΑ 3ο

Έστω συνάρτηση $f(x) = \ln \dfrac{2}{e^{2x} + 1}$.

1. Να βρείτε το Πεδίο Τιμών της f.
2. Να δείξετε ότι η f αντιστρέφεται και να βρείτε το πεδίο ορισμού της αντίστροφης συνάρτησης.
3. Να βρείτε τον τύπο της f^{-1}.
4. Να δείξετε ότι η f και η f^{-1} έχουν κοινή εφαπτομένη στην αρχή των αξόνων.

Μονάδες $7 + 3 + 7 + 8 = 25$

ΘΕΜΑ 4ο

Για κάθε $c, k \in \mathbb{R}^*$ ορίζουμε μία πραγματική συνάρτηση

$$f_k(x) = ce^{-x/k} \tag{1}$$

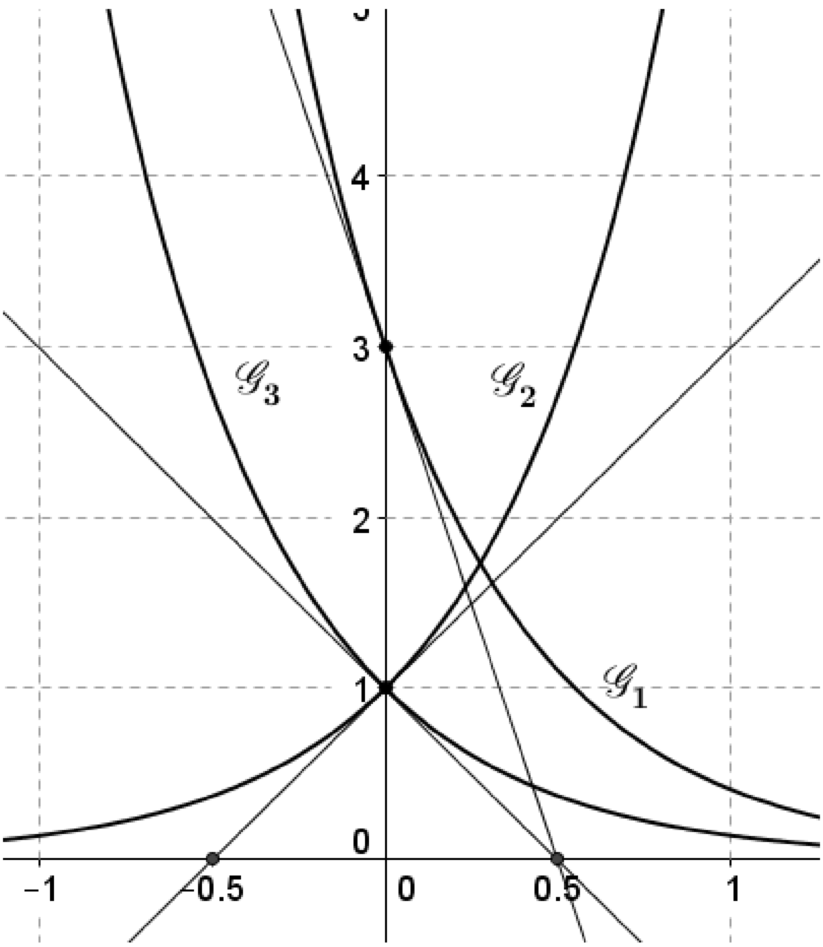
με $\mathscr{G}_{f_k}$ το γράφημά της.

1. (α′) Υποθέτω $c > 0$. Να υπολογίσετε τα όρια: $\lim_{x\to+\infty} f_k(x)$ και $\lim_{x\to-\infty} f_k(x)$.

   (β′) Δείξτε ότι η f_k είναι παραγωγίσιμη και να βρείτε την πρώτη παράγωγο f_k', όταν $c > 0$.

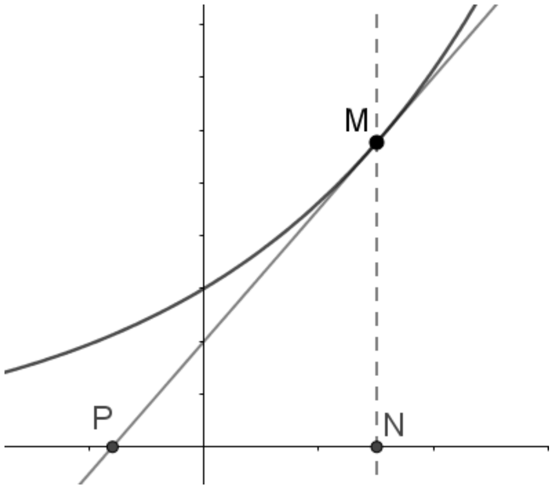
   (γ′) Να μελετηθεί η μονοτονία της f_k, όταν $c > 0$.

   (δ′) Στο παρακάτω Σχήμα βλέπουμε τα γραφήματα τριών συναρτήσεων του τύπου f_k με τις εφαπτομένες στο σημείο που έχει τετμημένη 0. Να προσδιορίσετε τον τύπο της συνάρτησης f_k που μπορεί να αντιπροσωπεύει κάθε ένα από τα τρία γραφήματα $\mathscr{G}_1$, $\mathscr{G}_2$ και $\mathscr{G}_3$.



2. (α′) Έστω $a \in \mathbb{R}$. Δείξτε ότι η καμπύλη $\mathscr{G}_{f_k}$ στο σημείο M που έχει τετμημένη ίση με a, δέχεται εφαπτομένη που τέμνει τον οριζόντιο άξονα σε ένα σημείο με τετμημένη ίση με $a + k$.

   (β′) Έστω N η προβολή του σημείου M στον άξονα $x'x$. Δείξτε ότι $\overrightarrow{NP} = k \cdot \overrightarrow{i}$, όπου $\overrightarrow{i}$ το μοναδιαίο διάνυσμα του οριζόντιου άξονα.



3. Αντίστροφα: Έστω g μια πραγματική παραγωγίσιμη συνάρτηση με πεδίο ορισμού όλο το $\mathbb{R}$, έτσι ώστε $g'(x) \neq 0$, $\forall x \in \mathbb{R}$. Έστω $a \in \mathbb{R}$. Έστω επίσης σημείο M του γραφήματος $\mathscr{G}_g$ με τετμημένη το σημείο $N = (a, 0)$ και P το σημείο τομής της εφαπτομένης που άγεται από το σημείο M και του οριζόντιου άξονα.

   (α′) Δείξτε ότι το σημείο P είναι το σημείο $\left(a - \dfrac{g(a)}{g'(a)}, 0\right)$.

   (β′) Αν $\overrightarrow{NP} = k \cdot \overrightarrow{i}$, $k \neq 0$, δείξτε ότι $\forall a \in \mathbb{R}: \; g'(a) = -\dfrac{1}{k} g(a)$.

   (γ′) Δείξτε ότι αυτές οι συναρτήσεις g έχουν τύπο που δίνεται από τη σχέση (1) με $c, k \in \mathbb{R}^*$.

Μονάδες $(3 + 1 + 4 + 6) + (2 + 2) + (2 + 2 + 3) = 25$

Υποδείξεις

ΘΕΜΑ 1ο

1. (α′) Σχολικό σελίδα 128.

   (β′) Σχολικό σελίδα 128 και 129. Οι γεωμετρικές ερμηνείες ακολουθούν τα θεωρήματα.

2. Η πρόταση είναι Ψ. Αντιπαράδειγμα: έστω $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ με $f(x) = |x| - x$ και $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ με $g(x) = |x| + x$.

3. (α′) Α

   (β′) Ψ

   (γ′) Ψ

   (δ′) Ψ

   (ε′) Α

ΘΕΜΑ 2ο

1. (α′) $D_f = \mathbb{R} - \{x/x \in \mathbb{R} \wedge x = k\pi + \frac{\pi}{2},\ k \in \mathbb{Z}\}$.

   (β′) Το πεδίο ορισμού είναι συμμετρικό ως προς το 0. Αν $x \in D_f$ θα δείξουμε ότι και το $-x \in D_f$. Επαληθεύστε ότι $f(-x) = -f(x)$.

   (γ′) Πρέπει να δείξω ότι αν $x \in D_f$ τότε $x + 2\pi$ και $x - 2\pi$ είναι στοιχεία επίσης του D_f. Αποδεικνύω ότι $f(x + 2\pi) = f(x - 2\pi) = f(x)$.

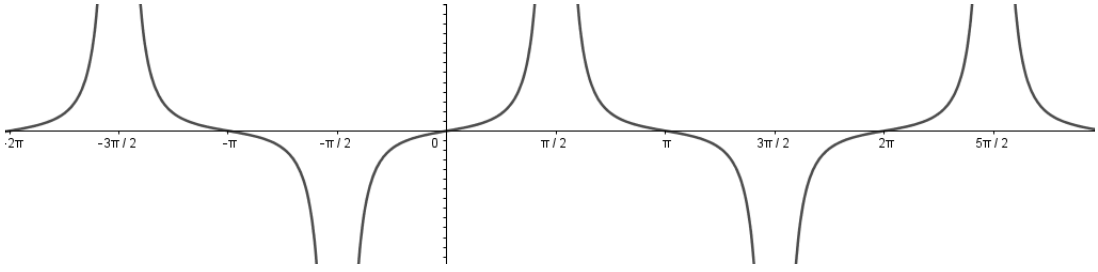
2. Δείξτε ότι $\lim\limits_{x \to \frac{\pi}{2}^-} f(x) = +\infty$.

3. (α′) $f'(x) = \dfrac{2(2 - \text{συν}^2(x))}{\text{συν}^3(x)}$.

   (β′)
   - Για $0 \le x < \dfrac{\pi}{2} \Rightarrow f'(x) > 0 \Rightarrow f \uparrow$
   - Για $\dfrac{\pi}{2} < x \le \pi \Rightarrow f'(x) < 0 \Rightarrow f \downarrow$

   Μέγιστο και ελάχιστο η συνάρτηση δεν παρουσιάζει.

4. Μαλετήστε καμπυλότητα και σημεία καμπής. Το διάγραμμα είναι:



■

ΘΕΜΑ 3ο

1. $D_f = \mathbb{R}$.
   Το Πεδίο τιμών είναι $\boxed{f(\mathbb{R}) = \big(-\infty, \ln(2)\big)}$.

2. $f \downarrow \Rightarrow f$ αντιστρέφεται, με $D_{f^{-1}} = \big(-\infty, \ln(2)\big)$.

3. Βρείτε ότι $\boxed{f^{-1}(x) = \ln\sqrt{2e^{-x} - 1}}$

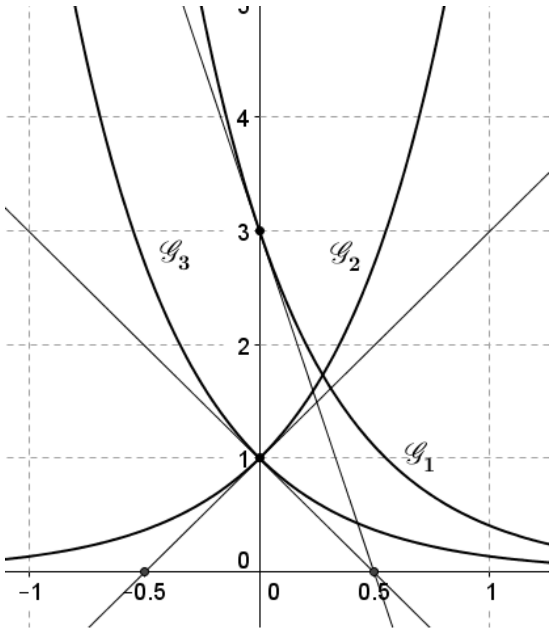
4. Από τη σχέση:
   $$f'\Big(f^{-1}(x)\Big) \cdot \Big(f^{-1}(x)\Big)' = 1$$
   θα βρείτε ότι: η εφαπτομένη στο $(0,0)$ της $\mathscr{G}_{f^{-1}}$ έχει εξισωση:
   $$y = \Big(f^{-1}(0)\Big)'(x-0) + f^{-1}(0)$$
   Η εφαπτομένη στο $(0,0)$ της $\mathscr{G}_f$ έχει εξισωση:
   $$y = f'(0)(x-0) + f(0)$$
   ή $\boxed{y = -x}$. Άρα, το συμπέρασμα. ■

ΘΕΜΑ 4ο

1. Θα διακρίνουμε περιπτώσεις:
   (α΄) <u>Αν $k > 0$:</u> $\boxed{\lim_{x\to-\infty} ce^{-x/k} = +\infty}$.
   (β΄) <u>Αν $k < 0$:</u> $\boxed{\lim_{x\to-\infty} c\dfrac{1}{e^{-x/k}} = 0}$.

2. Η $\boxed{f'_k(x) = -\dfrac{c}{k}e^{-x/k}}$.

3. $\forall x \in \mathbb{R}$, $e^{-x/k} > 0$. Έτσι
   (α΄) <u>Αν $k > 0$</u> $f'(x) < 0 \Rightarrow f \uparrow$.
   (β΄) <u>Αν $k < 0$</u> $f'(x) > 0 \Rightarrow f \uparrow$.

4. 

Αν $f_k = ce^{-x/k}$ και $\mathscr{G}_f$ το αντίστοιχο γράφημα, τότε: $f_k(0) = c$, $f_k'(0) = -\dfrac{c}{k}$ με $f_k'(0)$ είναι η κλίση της εφαπτομένης στο σημείο A με $x_A = 0$.

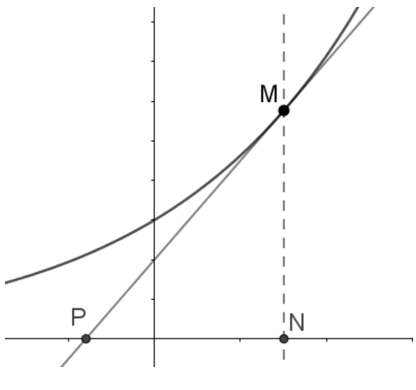
- Το γράφημα $\mathscr{G}_1$: $f_1(0) = 3 = c$, $f_1'(0) = -\dfrac{c}{k} = -6 \Rightarrow k = \dfrac{1}{2}$. Άρα, το γράφημα αντιστοιχεί στην $\boxed{g_1(x) = 3e^{-2x}}$.
- Το γράφημα $\mathscr{G}_2$: $f_3(0) = 1 = c$, $f_3'(0) = -\dfrac{c}{k} = 2 \Rightarrow k = -\dfrac{1}{2}$. Άρα, το γράφημα αντιστοιχεί στην $\boxed{g_3(x) = e^{2x}}$.
- Το γράφημα $\mathscr{G}_3$: $f_2(0) = 1 = c$, $f_2'(0) = -\dfrac{c}{k} = -2 \Rightarrow k = \dfrac{1}{2}$. Άρα, το γράφημα αντιστοιχεί στην $\boxed{g_2(x) = e^{-2x}}$.

5. (α΄) Η εξίσωση της εφαπτομένης στο σημείο M με $x_M = a$ έχει εξίσωση:

$$y = -\frac{c}{k}e^{-a/k}x + c\left(\frac{a}{k}+1\right)e^{-a/k}$$

Άρα η τετμημένη του σημείου που τέμνει τον άξονα $x'x$, θα είναι:

$$x = a + k$$

(β΄) 

$$\overrightarrow{NP} = \overrightarrow{NO} + \overrightarrow{OP} = (-a, 0) + (a+k, 0) = -a\overrightarrow{i} + (a+k)\overrightarrow{i} = k\overrightarrow{i}$$

Αντίστροφα:

6. (α′) Η εφαπτομένη στο σημείο $M(a, g(a))$ έχει εξίσωση:

$$y = g'(a)(x-a) + g(a)$$

Το σημείο P έχει συντεταγμένες για $y = 0$

$$g'(a)x - ag'(a) + g(a) = 0 \Rightarrow x = a - \frac{g(a)}{g'(a)}$$

Άρα, $P\left(a - \dfrac{g(a)}{g'(a)}, 0\right)$.

(β′) Αφού $\overrightarrow{NP} = k \cdot \overrightarrow{i}$, $k \neq 0$, και $P\left(a - \dfrac{g(a)}{g'(a)}, 0\right)$

$$\overrightarrow{NP} = k \cdot \overrightarrow{i} \Leftrightarrow \left(a - \frac{g(a)}{g'(a)}\right) - a = k \Leftrightarrow k = -\frac{g(a)}{g'(a)}$$

Επομένως:

$$\forall a \in \mathbb{R}\ \boxed{g'(a) = -\frac{1}{k}g(a)} \tag{2}$$

(γ′) Η (2) ισχύει για κάθε πραγματικό αριθμό a. Για να βρούμε λοιπόν την g πρέπει να λύσω την διαφορική εξίσωση $g'(x) = -\dfrac{1}{k}g(x)$.

■