ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΑ

ΣΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΥ Γ ΛΥΚΕΙΟΥ

21 Απριλίου 2021

ΘΕΜΑ 1ο

Α1. Να διατυπώστε και να αποδείξετε το θεώρημα του Fermat.

Μονάδες 7

Α2. Θεωρήστε τον παρακάτω ισχυρισμό:

"Αν μια συνάρτηση f είναι δυο φορές παραγωγίσιμη και κυρτή σ' ένα διάστημα $\mathscr{D}$, τότε $f''(x) > 0$, για κάθε εσωτερικό σημείο x του $\mathscr{D}$."

1. Να χαρακτηρίσετε τον παραπάνω ισχυρισμό, γράφοντας το γράμμα **Α** αν είναι αληθής ή το γράμμα **Ψ**, αν είναι ψευδής. (μονάδα 1)
2. Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας στο ερώτημα 1. (μονάδες 3)

Μονάδες 4

Α3. Να αναφέρετε πότε η γραφική παράσταση μιας συνάρτησης f έχει εφαπτομένη σ' ένα σημείο της $A\big(x_0, f(x_0)\big)$ με συνετελεστή διεύθυνσης λ και να γράψετε την εξίσωση της εφαπτομένης αυτής.

Μονάδες 4

Α4. Γράψτε στο τετράδιό σας δίπλα από τον αριθμό που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση, το γράμμα της επιλογής σας που αντιστοιχεί στη σωστή απάντηση της πρότασης.

1 Ο συνολικός αριθμός των τοπικών ακροτάτων της συναρτησης f για την οποία $f'(x) = x(x-3)^2(x-1)^4$ είναι:
Α. 0 **Β.** 1 **Γ.** 2 **Δ.** 3 **Ε.** 4

2 Η συνάρτηση $h(x) = x^{\frac{2}{3}}$ στο διάστημα $[-4, 4]$ δεν ικανοποιεί το Θεώρημα της Μέσης Τιμής γιατί:
Α. Το $h(0)$ δεν ορίζεται. **Β.** Η h δεν ορίζεται για $x < 0$. **Γ.** Δεν ορίζεται η $h'(0)$. **Δ.** Δεν παραγωγίζεται στα άκρα -4 και 4. **Ε.** Κανένα από τα παραπάνω.

3 Έστω f μια διπλά παραγωγίσιμη συνάρτηση ως προς x έτσι ώστε για $x=\gamma$ η συνάρτηση τέμνει τον άξονα των x και σε μια περιοχή του γ είναι φθίνουσα και κυρτή. Ποια από τις παρακάτω προτάσεις είναι αληθής;

Α. $f(\gamma) < f'(\gamma) < f''(\gamma)$
Β. $f(\gamma) < f''(\gamma) < f'(\gamma)$
Γ. $f'(\gamma) < f(\gamma) < f''(\gamma)$
Δ. $f'(\gamma) < f''(\gamma) < f(\gamma)$
Ε. $f''(\gamma) < f(\gamma) < f'(\gamma)$

4 Η τιμή του ξ που εξασφαλίζεται από το Θεώρημα της Μέσης Τιμής για τη συνάρτηση $f(x)=x^2$ στο διάστημα $[0,3]$ είναι:

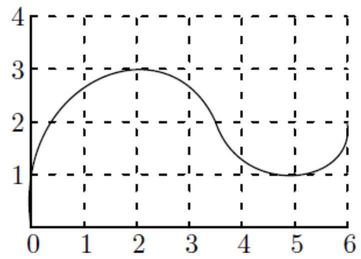
Α. 1 **Β.** 2 **Γ.** $\frac{3}{2}$ **Δ.** $\frac{1}{2}$ **Ε.** Κανένα από τα προηγούμενα.

5 Δίνονται το παρακάτω γράφημα της συνάρτησης f και τρείς προτάσεις που αφορούν στο γράφημα:

I. $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(2+h)-f(2)}{h} = f'(5)$.

II. $\dfrac{f(5)-f(2)}{5-2} = \dfrac{2}{3}$.

III. $f''(1) < f''(5)$.



Ποιες από τις παρακάτω προτάσεις είναι αληθείς;
Α. I και II μόνο. **Β.** I και III μόνο. **Γ.** II και III μόνο. **Δ.** I, II, και III **Ε.** Κανένα από τα προηγούμενα.

Μονάδες $2\times 5 = 10$

ΘΕΜΑ 2ο

Έστω η συνάρτηση $f(x) = x - 2 + \dfrac{3}{x-2}$.

1. Να βρείτε:

   i. το πεδίο ορισμού της συνάρτησης,

   ii. τα διαστήματα μονοτονίας της συνάρτησης.

2. Βρείτε τα ακρότατα και χαρακτηρίστε αν είναι τοπικά ή ολικά.
3. Να δείξετε ότι η f έχει μια κατακόρυφη και μία πλάγια ασύμπτωτη.
4. Δείξτε ότι τα ακρότατα και το σημείο τομής των ασυμπτώτων είναι σημεία συνευθειακά.

Μονάδες $3+5+5+5+7=25$

ΘΕΜΑ 3ο

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = e^{2x} - (x+1)e^x$.

1. Αποδείξτε ότι $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = 0$ και $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$.
2. i. Να υπολογίσετε την $f'(x)$.
   ii. Αν $g(x) = 2e^x - x - 2$, αποδείξτε ότι $f'(x) = e^x \cdot g(x)$.
   iii. Να μελετηθεί η g ως προς την μονοτονία και τα ακρότατα.
   iv. Αποδείξτε ότι $\forall x \in (0,+\infty)$, $g(x) > 0$.
   v. Να βρεθεί η γωνία που σχηματίζει η εφαπτομένη της $\mathscr{G}_g$ στο σημείο $\big(0, g(0)\big)$ με τον άξονα $x'x$.
3. Να συγκριθούν οι αριθμοί μεταξύ τους:

$$f(e), \qquad f(\pi), \qquad f\big(\ln(e^2)\big), \qquad f(2020)$$

4. Να βρεθεί ο θετικός πραγματικός αριθμός a για τον οποίο ισχύει:

$$e^{2a} - e^2 = (a+1)e^a - 2e$$

Μονάδες $10+(2+1+3+2+3)+2+2=25$

ΘΕΜΑ 4ο

Έστω $f(x) = \ln(x)$ και $A_n(0, n)$, $n \in \mathbb{N}$, σημείο του άξονα $y'y$. Έστω σημείο M του γραφήματος $\mathscr{G}_f$.

1. Δείξτε ότι $\forall n \in \mathbb{N}$, $A_nM^2 = x^2 + \big(\ln(x) - n\big)^2$.
2. Έστω $g_n(x) = x^2 + \big(\ln(x) - n\big)$, για $x \in (0, +\infty)$.
   (α′) Δείξτε ότι η $g_n(x)$ έχει μια πραγματική ρίζα a_n στο $(0, +\infty)$.
   (β′) Να βρεθεί το πρόσημο της $g_n(x)$ καθώς το x είναι στο $(0, +\infty)$.
3. Έστω f_n μία συνάρτηση στο $(0, +\infty)$ με $f_n(x) = x^2 + \Big(\ln(x) - n\Big)^2$.
   (α′) Δείξτε ότι $\forall x \in (0, +\infty)$, $f_n'(x) = \dfrac{2g_n(x)}{x}$.
   (β′) Μελετήστε την μονοτονία της f_n.
   (γ′) $\forall x \in (0, +\infty)$ η $f_n(x)$ έχει ελάχιστο; Αιτιολογήστε.
   (δ′) Έστω M_n η θέση του σημείου M για το οποίο η απόσταση A_nM_n ελαχιστοποιείται. Δείξτε ότι
   $$A_nM_n = a_n\sqrt{1 + a_n^2}$$
4. Έστω (ε_n) η εφαπτομένη στην καμπύλη $\mathscr{G}_f$ στο σημείο M_n με τετμημένη a_n.
   (α′) Δείξτε ότι το διάνυσμα $\overrightarrow{v_n} = (a_n, 1)$ είναι παράλληλο προς την ευθεία (ε_n).
   (β′) Υπολογίστε το γινόμενο $\overrightarrow{A_nM_n} \cdot \overrightarrow{v_n}$.
   (γ′) Ποια είναι η μεταξύ τους θέση, των ευθειών A_nM_n και (ε_n);

Μονάδες $2 + (3 + 3) + (2 + 2 + 2 + 3) + (2 + 3 + 3) = 25$