1 Ασκήση Ανάλυση, 24 Απριλίου 2021

Tutescu L. and Lygatsikas Z.

Έστω ακολουθία $(x_n)_{n\geq 1}$ με $x_1 = a,\ x_2 = b,\ x_3 = c,\ x_4 = d$, $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ και

$$x_{n+4} = x_{n+3} - x_{n+1} + x_n,\ n \in \mathbb{N}$$

Έστω, $S_n = x_1 + \cdots + x_n$.

Αποδείξτε ότι η ακολουθία $(y_n)_{n\geq 1}$ με $y_n = \dfrac{S_n}{n}$ είναι συγκλίνουσα και υπολογίστε το $\lim\limits_{n\to+\infty} y_n$.

Υπόδειξη: Παρατηρώ ότι:

$$\begin{aligned}
x_{n+4} =& x_{n+3} - x_{n+1} + x_n \\
x_{n+5} =& x_{n+4} - x_{n+2} + x_{n+1} \\
x_{n+6} =& x_{n+5} - x_{n+3} + x_{n+2}
\end{aligned}$$

Άρα, $x_{n+6} = x_n$, $\forall n \in \mathbb{N}$ και συνεπώς η $(x_n)_{n\geq 1}$ είναι περιοδική με περίοδο 6. Για $n = 6k + m$, $0 \leq k \leq 6$, $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ όταν $n \to +\infty$ τότε $m \to +\infty$ και

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to+\infty} \frac{S_n}{n} &= \lim_{n\to+\infty} \left(\frac{mS_6 + S_k}{6m + k} \right) \\
&= \lim_{n\to+\infty} \frac{mS_6}{6m + k} + \lim_{n\to+\infty} \frac{S_k}{6m + k} \\
&= \frac{S_6}{6} = \frac{x_1 + \cdots + x_6}{6}
\end{aligned}$$

Αλλά, $x_5 = x_4 - x_2 + x_1 = d - b + a$ και $x_6 = x_5 - x_3 + x_2 = d - b + a - c + b = d - c + a$. Άρα,

$$\frac{x_1 + \cdots + x_6}{6} = \frac{a + d}{2}$$

και $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{S_n}{n} = \dfrac{a + d}{2}$. ■