Ασκήσεις Επανάληψης Άλγεβρας Α Λυκείου

Λυγάτσικας Ζ. - Αθήνα, (23 Απριλίου 2019)

1. Αν $a \in \mathbb{R}$ και $a \geq 1$, τότε το άθροισμα των πραγματικών ριζών της

$$\sqrt{a - \sqrt{a + x}} = x$$

είναι ίσο με:

A. $\sqrt{a} - 1$ **Γ.** $\sqrt{a - 1}$ **E.** $\dfrac{\sqrt{4a-3} - 1}{2}$

B. $\dfrac{\sqrt{a} - 1}{2}$ **Δ.** $\dfrac{\sqrt{a-1}}{2}$

2. Αν $x \in \mathbb{R} \wedge x \neq 1$ και $\dfrac{x}{x-1} = \dfrac{y^2+2y-1}{y^2+2y-2}$, τότε x είναι ίσο με:

A. $y^2 + 2y - 1$ **Γ.** $y^2 + 2y + 2$ **E.** $-y^2 - 2y + 1$

B. $y^2 + 2y - 2$ **Δ.** $y^2 + 2y + 1$

3. Τα διαστήματα της πραγματικής μεταβλητής x που επαληθεύουν την ανισότητα

$$|x - 1| + |x + 2| < 5$$

είναι:

A. $-3 < x < 2$ **B.** $-1 < x < 2$ **Γ.** $-2 < x < 1$ **Δ.** $-\dfrac{3}{2} < x < \dfrac{7}{2}$ **E.** δεν υπάρχει διάστημα

4. Αν $x \neq 0$ ή 4 και $y \neq 0$ ή 6, τότε $\dfrac{2}{x} + \dfrac{3}{y} = \dfrac{1}{2}$ είναι ισοδύναμο με το:

A. $4x + 3y = xy$ **B.** $y = \dfrac{4x}{6-y}$ **Γ.** $\dfrac{x}{2} + \dfrac{y}{3} = 2$ **Δ.** $\dfrac{4y}{y-6} = x$ **E.** κανένα από τα παραπάνω

5. Έστω x_1 και x_2 είναι τέτοια ώστε $x_1 \neq x_2$ και $3x_i^2 - \alpha x_i = \beta$, $i = 1, 2$. Τότε $x_1 + x_2$ είναι ίσο με:

A. $-\dfrac{\alpha}{3}$ **B.** $\dfrac{\alpha}{3}$ **Γ.** $\dfrac{\beta}{3}$ **Δ.** 2β **E.** $-\dfrac{\beta}{3}$

6. Ο συντελεστής το παράγοντα x^7 στο ανάπτυγμα της αλγεβρικής παράστασης

$$(1 + 2x - x^2)^4$$

είναι:

A. -8 **B.** 12 **Γ.** 6 **Δ.** -12 **E.** κανένα από τα προηγούμενα

7. Έστω x και y είναι θετικοί πραγματικοί αριθμοί ($x, y \neq 0$). Ορίζουμε μια πράξη $x \oslash y = \dfrac{x \cdot y}{x+y}$. Ποια από τις παρακάτω προτάσεις είναι αληθής;

   Α. $\oslash$ είναι μεταθετική αλλά όχι προσεταιριστική.

   Β. $\oslash$ είναι προσεταιριστική αλλά όχι μεταθετική.

   Γ. $\oslash$ δεν είναι ούτε μεταθετική ούτε προσεταιριστική.

   Δ. $\oslash$ είναι μεταθετική και προσεταιριστική.

   Ε. κανένα από τα προηγούμενα.

8. Ποιά είναι η μικρότερη τιμή του ακεραίου k έτσι ώστε η εξίσωση

$$2x(kx-4)-x^2+6=0$$

   να μην έχει πραγματικές ρίζες;

   Α. -1 **Β.** 2 **Γ.** 3 **Δ.** 4 **Ε.** 5

9. Αν (a, b) και (c, d) είναι δύο σημεία σε μία ευθεία με εξίσωση $y = \lambda x + \mu$. Τότε η απόσταση μεταξύ των σημείων (a, b) και (c, d) είναι:

   Α. $|a-c|\sqrt{1+\lambda^2}$ **Β.** $|a+c|\sqrt{1+\lambda^2}$ **Γ.** $\dfrac{|a-c|}{\sqrt{1+\lambda^2}}$ **Δ.** $|a-c|(1+\lambda^2)$ **Ε.** $|a-c||\lambda|$

10. Ποια από τις παρακάτω προτάσεις είναι αληθής:

   Α. Αν $x < 0$ τότε $x^2 > x$.

   Β. Αν $x^2 > 0$ τότε $x > 0$.

   Γ. Αν $x^2 > x$ τότε $x > 0$.

   Δ. Αν $x^2 > x$ τότε $x < 0$.

   Ε. Αν $x < 1$ τότε $x^2 < x$.

11. Αν $x < -2$ τότε η παράσταση $\Big|1 - |1+x|\Big|$ είναι ίση με:

   Α. $2+x$ **Β.** $-2-x$ **Γ.** x **Δ.** $-x$ **Ε.** -2

12. Έστω

$$M = \frac{1}{3-\sqrt{8}} - \frac{1}{\sqrt{8}-\sqrt{7}} + \frac{1}{\sqrt{7}-\sqrt{6}} - \frac{1}{\sqrt{6}-\sqrt{5}} + \frac{1}{\sqrt{5}-2}$$

   τότε:

   Α. $M < 1$ **Β.** $M = 1$ **Γ.** $1 < M < 2$ **Δ.** $M > 2$ **Ε.** $M = \dfrac{1}{(3-\sqrt{8})(\sqrt{8}-\sqrt{7})(\sqrt{7}-\sqrt{6})(\sqrt{6}-\sqrt{5})(\sqrt{5}-2)}$

13. Σε μια γεωμετρική πρόοδο θετικών όρων η διαφορά μεταξύ του 5ου και 4ου όρου είναι 576 και η διαφορά μεταξύ του δευτέρου και του πρώτου όρου είναι 9. Ποιο είναι το άθροισμα των πρώτων πέντε όρων της σειράς;

   Α. 1061 **Β.** 1023 **Γ.** 1024 **Δ.** 768 **Ε.** κανένα από τα προηγούμενα

14. Έστω $f(x) = 3x + 2$, $\forall x \in \mathbb{R}$. Αν η πρόταση:

$$\big|f(x) + 4\big| < a \text{ όταν } |x + 2| < b \wedge a > 0 \wedge b > 0$$

είναι αλήθεια, τότε:

A. $b \leq \dfrac{a}{3}$ **B.** $b > \dfrac{a}{3}$ **Γ.** $a \leq \dfrac{b}{3}$ **Δ.** $a > \dfrac{b}{3}$ **E.** Η πρόταση είναι πάντα αλήθεια

15. Ποια από τις παρακάτω προτάσεις ικανοποιείται από όλους τους πραγματικούς αριθμούς x της μορφής

$$x = \frac{a_1}{3} + \frac{a_2}{3^2} + \cdots + \frac{a_{25}}{3^{25}}$$

όταν a_1 είναι 0 ή 1, a_2 είναι 0 ή 1,..., a_{25} είναι 0 ή 1;

A. $0 \leq x < \dfrac{1}{3}$ **B.** $\dfrac{1}{3} \leq x < \dfrac{2}{3}$ **Γ.** $\dfrac{2}{3} \leq x < 1$ **Δ.** $0 \leq x < \dfrac{1}{3}$ ή $\dfrac{2}{3} \leq x < 1$ **E.** $\dfrac{1}{2} \leq x \leq \dfrac{3}{4}$

16. Για $p = 1, 2, \ldots, 10$ έστω Σ_p είναι το άθροισμα των 40 πρώτων όρων μιας αριθμητικής προόδου της οποίας ο πρώτος p και της οποίας η διαφορά είναι $2p - 1$. Τότε το άθροισμα $\Sigma_1 + \Sigma_2 + \cdots + \Sigma_{10}$ είναι:

A. 80.000 **B.** 80.200 **Γ.** 80.400 **Δ.** 80.600 **E.** 80.000

17. Ποια από τις παρακάτω ανισότητες ικανοποιείται από όλους τους πραγματικούς a, b, c, x, y, z που ικανοποιούν τις σχέσεις: $x < a$, $y < b$ και $z < c$;

I. $xy + yz + xz < ab + ac + bc$.

II. $x^2 + y^2 + z^2 < a^2 + b^2 + c^2$.

III. $xyz < abc$.

A. Καμμία δεν ικανοποιείται **B.** Μόνο η I **Γ.** Μόνο η II **Δ.** Μόνο η III **E.** Ικανοποιούνται όλες

18. Για ποιές τιμές του $x \neq 0$ η παράσταση $\dfrac{\big|x - |x|\big|}{x}$ είναι θετικός ακέραιος;

A. Μόνο για $x < 0$ **B.** Μόνο για $x > 0$ **Γ.** Μόνο όταν το x είναι άρτιος ακέραιος **Δ.** $\forall x \in \mathbb{R}^*$ **E.** Για κανένα $x \in \mathbb{R}^*$

19. Αν $a \neq b$, $a^3 - b^3 = 19x^3$ και $a - b = x$, ποιο από τα παρακάτω είναι αληθές:

A. $a = 3x$ **B.** $a = 3x \vee a = -2x$ **Γ.** $a = -3x \vee a = 2x$ **Δ.** $a = 3x \vee a = 2x$ **E.** $a = 2x$

20. Έστω $f(x)$ μια συνάρτηση με Πεδίο Ορισμού $\mathscr{D}_f = \mathbb{R}$ και $f(x) > 0$, $\forall x \in \mathbb{R}$ και $f(a)f(b) = f(a + b)$, $\forall a, b \in \mathbb{R}$. Ποια από τα παρακάτω προτάσεις είναι αληθής:

I. $f(0) = 1$

II. $f(-a) = \dfrac{1}{f(a)}$, $\forall a \in \mathbb{R}$.

III. $f(a) = \sqrt[3]{f(3a)}$, $\forall a \in \mathbb{R}$.

IV. $f(b) > f(a)$ αν $b > a$.

Α. III και IV μόνο **Β.** I, III και IV μόνο **Γ.** I, II και IV μόνο **Δ.** I, II και III μόνο **Ε.** Όλα είναι αλήθεια

21. Αν p και q είναι πρώτοι ακέραιοι και η $x^2 - px + q = 0$ έχει δυο διακεκριμένους θετικούς ακέραιους για ρίζες, τότε ποιες από τις παρακάτω προτάσεις είναι αληθείς:

I. Η διαφορά δύο ριζών είναι περιττός αριθμός.

II. Το ελάχιστο μια ρίζα είναι πρώτος.

III. $p^2 - q$ είναι πρώτος.

IV. $p + q$ είναι πρώτος.

Α. I μόνο **Β.** II μόνο **Γ.** II και III μόνο **Δ.** I, II και IV μόνο **Ε.** Όλα είναι αλήθεια

22. Αν $x \in \mathbb{R} - \{1\}$ και "ένα μείον το αντίστροφο του $(1-x)$ είναι ίσο με το αντίστροφο του $(1-x)$", τότε το x είναι ίσο με:

Α. -2 **Β.** -1 **Γ.** $\dfrac{1}{2}$ **Δ.** 2 **Ε.** 3

23. Πόσοι πραγματικοί αριθμοί x κάνουν τον αριθμό $\sqrt{-(x+1)^2}$ πραγματικό αριθμό;

Α. Κανένας **Β.** Ένας **Γ.** Δυο **Δ.** Ένας πεπερασμένος αριθμός μεγαλύτερος του 2 **Ε.** Άπειροι

24. Έστω $\gamma \in \mathbb{R}$ και ρ είναι μια εκ των δυο ριζών της $x^2 - 3x + \gamma = 0$ ενώ ο $-\rho$ είναι ρίζα της $x^2 + 3x - \gamma = 0$. Τότε, οι ρίζες της $x^2 - 3x + \gamma = 0$ είναι:

Α. $1, 2$ **Β.** $-1, -2$ **Γ.** $0, 3$ **Δ.** $0, -3$ **Ε.** $\dfrac{3}{2}, \dfrac{3}{2}$

25. Αν $x \in \mathbb{R}$, τότε η παράσταση $(1 - |x|)(1 + x)$ είναι θετική αν και μόν αν:

Α. $|x| < 1$ **Β.** $x < 1$ **Γ.** $|x| > 1$ **Δ.** $x < -1$ **Ε.** $x < -1 \vee -1 < x < 1$

26. Τα μέτρα των εσωτερικών γωνιών ενός κυρτού πολυγώνου είναι διαδοχικοί όροι μιας αριθμητικής προόδου. Αν η μικρότερη γωνία είναι 100^o και η μεγαλύτερη γωνία είναι 140^o, τότε ο αριθμός των πλευρών του πολυγώνου είναι:

Α. 6 **Β.** 8 **Γ.** 10 **Δ.** 11 **Ε.** 12

27. Αν $N = \dfrac{\sqrt{\sqrt{5}+2}+\sqrt{\sqrt{5}-2}}{\sqrt{\sqrt{5}+1}} - \sqrt{3-2\sqrt{2}}$, τότε το N είναι ίσο με:

A. 1 **B.** $\sqrt{2}-1$ **Γ.** $\dfrac{\sqrt{5}}{2}$ **Δ.** $\sqrt{\dfrac{5}{2}}$ **Ε.** κανένα από τα προηγούμενα

28. Αν $M = \dfrac{1}{1-\sqrt[4]{2}}$, τότε M είναι ίσο με:

A. $(1-\sqrt[4]{2})(2-\sqrt{2})$
B. $(1-\sqrt[4]{2})(1+\sqrt{2})$
Γ. $(1+\sqrt[4]{2})(1-\sqrt{2})$
Δ. $(1+\sqrt[4]{2})(1+\sqrt{2})$
Ε. $-(1+\sqrt[4]{2})(1+\sqrt{2})$

29. Για κάθε τριάδα μη μηδενικών πραγματικών αριθμών (a, b, c), σχηματίζουμε τον αριθμό

$$M = \frac{a}{|a|} + \frac{b}{|b|} + \frac{c}{|c|} + \frac{abc}{|abc|}$$

Τότε, το σύνολο όλων των πιθανών τιμών του M είναι:

A. $\{0\}$ **B.** $\{-4, 0, 4\}$ **Γ.** $\{-4, -2, 0, 2, 4\}$ **Δ.** $\{-4, -2, 2, 4\}$ **Ε.** κανένα από τα προηγούμενα

30. Για πόσες τιμές της παραμέτρου $a \in \mathbb{R}$ οι δυο εξισώσεις:

$$x^2 + ax + 1 = 0 \text{ και } x^2 - x - a = 0$$

έχουν μια κοινή ρίζα;

A. 0 **B.** 1 **Γ.** 2 **Δ.** 3 **Ε.** άπειρες τιμές

31. Αν οι ρίζες της εξίσωσης $x^2 + px + q = 0$, $p, q \in \mathbb{R}$, είναι οι κύβοι των ριζών της εξίσωσης $x^2 + ax + b = 0$, $a, b \in \mathbb{R}$, τότε:

A. $p = a^3 + 3ab$ **B.** $p = a^3 - 3ab$ **Γ.** $p + q = a^3$ **Δ.** $\left(\dfrac{a}{b}\right)^3 = \dfrac{p}{q}$ **Ε.** κανένα από τα προηγούμενα

32. Να βρεθεί ο μικρότερος ακέραιος n έτσι ώστε να ισχύει:

$$\forall x, y, z \in \mathbb{R} : \left(x^2 + y^2 + z^2\right)^2 \leq n\left(x^4 + y^4 + z^4\right)$$

A. 2 **B.** 3 **Γ.** 4 **Δ.** 6 **Ε.** Δεν υπάρχει τέτοιο n

33. Αν $x \in \mathbb{R}^*$ και $1 - \dfrac{4}{x} + \dfrac{4}{x^2} = 0$, τότε $\dfrac{2}{x}$ είναι ίσο με:

A. -1 **B.** 1 **Γ.** 2 **Δ.** -1 ή 2 **Ε.** -1 ή -2

34. Για όλους τους πραγματικούς x, y έτσι ώστε $x = \frac{1}{y}$, $y \neq 0$, το γινόμενο,

$$\Big(x - \frac{1}{x}\Big)\Big(y + \frac{1}{y}\Big)$$

είναι ίσο με:

Α. $2x^2$ **Β.** $2y^2$ **Γ.** $x^2 + y^2$ **Δ.** $x^2 - y^2$ **Ε.** $y^2 - x^2$

35. Ο αριθμός των διακεκριμένων ζευγών πραγμαικών αριθμών (x, y) που ικανοποιούν τις παρακάτω εξισώσεις:

$$x = x^2 + y^2 \ \wedge \ y = 2xy$$

είναι:

Α. 0 **Β.** 1 **Γ.** 2 **Δ.** 3 **Ε.** 4

36. Αν $x \in \mathbb{R}$ και $x < 0$, τότε $\Big|x - \sqrt{(x-1)^2}\Big|$ είναι ίσο με:

Α. 1 **Β.** $1 - 2x$ **Γ.** $-2x - 1$ **Δ.** $1 + 2x$ **Ε.** $2x - 1$

37. Αν οι μη μηδενικοί πραγματικοί αριθμοί $x(y-z)$, $y(z-x)$, $z(x-y)$ είναι διαδοχικοί όροι μιας γεωμετρικής προόδου με λόγο $r \in \mathbb{R}$, τότε r ικανοποιεί την εξίσωση:

Α. $r^2 + r + 1 = 0$ **Β.** $r^2 - r + 1 = 0$ **Γ.** $r^4 + r^2 - 1 = 0$ **Δ.** $(r+1)^4 + r = 0$ **Ε.** $(r-1)^4 + r = 0$

38. Έστω a ένας θετικός πραγματικός αριθμός. Έστω A το σύνολο όλων των σημείων (x, y) του καρτεσιανού επιπέδου ικανοποιεί τις παρακάτω ανισώσεις:

(α′) $\frac{a}{2} \leq x \leq 2a$ (β′) $\frac{a}{2} \leq y \leq 2a$ (δ′) $x + a \geq y$

(γ′) $x + y \geq a$ (ε′) $y + a \geq x$

Τότε, το πολύγωνο με κορυφές τα σημεία του συνόλου A έχει:

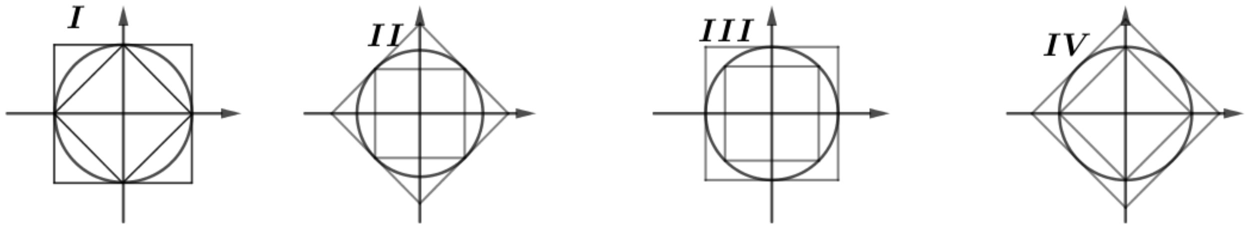
Α. 3 πλευρές **Β.** 4 πλευρές **Γ.** 5 πλευρές **Δ.** 6 πλευρές **Ε.** 7 πλευρές

39. Το πηλίκο $\dfrac{2\left(\sqrt{2} + \sqrt{6}\right)}{3\sqrt{2 + \sqrt{3}}}$ είναι ίσο με:

Α. $\frac{2\sqrt{2}}{3}$ **Β.** 1 **Γ.** $\frac{2\sqrt{3}}{3}$ **Δ.** $\frac{4}{3}$ **Ε.** $\frac{16}{9}$

40. Ένας κύκλος με ένα εγγεγραμμένο και περιγεγραμμένο τετράγωνο σε ένα καρτεσιανό σύστημα συντεταγμένων φαίνεται στο παρακάτω Σχήμα. Θεωρήστε το (x, y) ένα σημείο του καρτεσιανού συστήματος. Τότε η ανισότητα

$$|x| + |y| \leq \sqrt{2\big(x^2 + y^2\big)} \leq 2 \max\big(|x|, |y|\big)$$



αναπαρίσταται γεωμετρικά από το Σχήμα:

Α. I **Β.** II **Γ.** III **Δ.** IV **Ε.** κανένα από τα παραπάνω

Απαντήσεις Ασκήσεων Επανάληψης Α Λυκείου

1. Το Ε, δικαιολογήστε.
2. Το Α, δικαιολογήστε.
3. Το Α, δικαιολογήστε.
4. Το Δ, δικαιολογήστε.
5. Το Β, δικαιολογήστε.
6. Το Α, δικαιολογήστε.
7. Το Δ, δικαιολογήστε.
8. Το Β, δικαιολογήστε.
9. Το Α, δικαιολογήστε.
10. Το Α, δικαιολογήστε.
11. Το Β, δικαιολογήστε.
12. Το Δ, δικαιολογήστε.
13. Το Β, δικαιολογήστε.
14. Το Α, δικαιολογήστε.
15. Το Δ, δικαιολογήστε.
16. Το Β, δικαιολογήστε.
17. Το Α, δικαιολογήστε.
18. Το Ε, δικαιολογήστε.
19. Το Β, δικαιολογήστε.
20. Το Δ, δικαιολογήστε.
21. Το Ε, δικαιολογήστε.
22. Το Β, δικαιολογήστε.
23. Το Β, δικαιολογήστε.
24. Το Γ, δικαιολογήστε.
25. Το Ε, δικαιολογήστε.
26. Το Α, δικαιολογήστε.
27. Το Α, δικαιολογήστε.
28. Το Ε, δικαιολογήστε.
29. Το Β, δικαιολογήστε.
30. Το Β, δικαιολογήστε.
31. Το Β, δικαιολογήστε.
32. Το Β, δικαιολογήστε.
33. Το Β, δικαιολογήστε.
34. Το Δ, δικαιολογήστε.
35. Το Ε, δικαιολογήστε.
36. Το Β, δικαιολογήστε.
37. Το Α, δικαιολογήστε.
38. Το Δ, δικαιολογήστε.
39. Το Δ, δικαιολογήστε.
40. Το Β, δικαιολογήστε.