

Π. ΓΕΛ Βαρβακείου Σχολής

ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΑ

ΣΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΥ Γ ΛΥΚΕΙΟΥ

Για την συγγραφή:
Ζωιτσάκος Σωτήρης
Λυγάτσικας Ζήνων
Παπανικολάου Απόστολος

ΟΝΟΜ/ΜΟ:

ΤΜΗΜΑ:

Διάρκεια: 3 διδακτικές ώρες

ΘΕΜΑ Α

A1. Έστω μια συνάρτηση παραγωγίσιμη σ' ένα διάστημα (α, β) , με εξαίρεση ίσως ένα σημείο του x_0 , στο οποίο όμως η f είναι συνεχής. Αν η f' διατηρεί σταθερό πρόσημο στο $(\alpha, x_0) \cup (x_0, \beta)$, τότε το $f(x_0)$ δεν είναι τοπικό ακρότατο και η f είναι γνησίως μονότονη στο (α, β) .

Μονάδες 7

A2. Θεωρήστε τον παρακάτω ισχυρισμό:

“Αν μια συνάρτηση f είναι δυο φορές παραγωγίσιμη και κυρτή σ' ένα διάστημα \mathcal{D} , τότε $f''(x) > 0$, για κάθε εσωτερικό σημείο x του \mathcal{D} .”

1. Να χαρακτηρίσετε τον παραπάνω ισχυρισμό, γράφοντας το γράμμα **A** αν είναι αληθής ή το γράμμα **Ψ**, αν είναι ψευδής. (μονάδα 1)
2. Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας στο ερώτημα 1. (μονάδες 3)

Μονάδες 4

A3. Να αναφέρετε πότε η γραφική παράσταση μιας συνάρτησης f έχει εφαπτομένη σ' ένα σημείο της $A(x_0, f(x_0))$ με συνετελεστή διεύθυνσης λ και να γράψετε την εξίσωση της εφαπτομένης αυτής.

Μονάδες 4

A4. Γράψτε στο τετράδιό σας δίπλα από τον αριθμό που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση, το γράμμα της επιλογής σας που αντιστοιχεί στη σωστή απάντηση της πρότασης.

1 Ο συνολικός αριθμός των τοπικών ακροτάτων της συναρτησης f για την οποία $f'(x) = x(x-3)^2(x-1)^4$ είναι:

A. 0

B. 1

Γ. 2

Δ. 3

E. 4

2 Η συνάρτηση $h(x) = x^{\frac{2}{3}}$ στο διάστημα $[-4, 4]$ δεν ικανοποιεί το Θεώρημα της Μέσης Τιμής γιατί:

A. Το $h(0)$ δεν ορίζεται. **B.** Η h δεν ορίζεται για $x < 0$. **Γ.** Δεν ορίζεται η $h'(0)$. **Δ.** Δεν παραγωγίζεται στα άκρα -4 και 4 . **E.** Κανένα από τα παραπάνω.

3 Έστω f μια διπλά παραγωγίσιμη συνάρτηση ως προς x έτσι ώστε για $x = \gamma$ η συνάρτηση τέμνει τον άξονα των x και σε μια περιοχή του γ είναι φθίνουσα και κυρτή. Ποιά από τις παρακάτω προτάσεις είναι αληθής;

A. $f(\gamma) < f'(\gamma) < f''(\gamma)$

B. $f(\gamma) < f''(\gamma) < f'(\gamma)$

Γ. $f'(\gamma) < f(\gamma) < f''(\gamma)$

Δ. $f'(\gamma) < f''(\gamma) < f(\gamma)$

E. $f''(\gamma) < f(\gamma) < f'(\gamma)$

4 Η τιμή του ξ που εξασφαλίζεται από το Θεώρημα της Μέσης Τιμής για τη συνάρτηση $f(x) = x^2$ στο διάστημα $[0, 3]$ είναι:

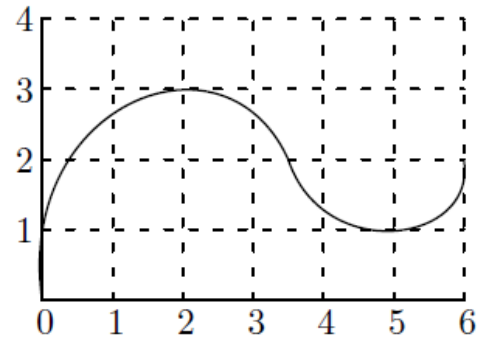
- A. 1 B. 2 Γ. $\frac{3}{2}$ Δ. $\frac{1}{2}$ E. Κανένα από τα προηγούμενα.

5 Δίνονται το διπλανό γράφημα της συνάρτησης f και οι παρακάτω τρεις προτάσεις που αφορούν στο γράφημα:

I. $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(2+h) - f(2)}{h} = f'(5).$

II. $\frac{f(5) - f(2)}{5 - 2} = \frac{2}{3}.$

III. $f''(1) < f''(5).$



Ποιές από τις παρακάτω προτάσεις είναι αληθείς;

- A. I και II μόνο. B. I και III μόνο. Γ. II και III μόνο. Δ. I, II, και III E. Κανένα από τα προηγούμενα.

Μονάδες 10

ΘΕΜΑ Β

Έστω $AB\Gamma\Delta$ ορθογώνιο με $AB = 1$ και $A\Delta = 2$. Σημείο M κινείται στο εσωτερικό της $\Gamma\Delta$, έστω $\Delta M = x$. Οι ευθείες AM και ΔB τέμνονται στο I . Έστω $S(x)$ το άθροισμα των εμβαδών των τριγώνων $\triangle ABI$ και $\triangle \Delta IM$.

B1. Υπολογίστε το $S(0)$ και $S(1)$. Μονάδες 4

B2. Δείξτε ότι το ύψος IK του τριγώνου $\triangle ABI$ είναι ίσο με $\frac{2}{x+1}$. Μονάδες 8

B3. Βρείτε τη συνάρτηση που δίνει το εμβαδόν $S(x)$ ως προς x . Μονάδες 3

B4. Για ποιές τιμές του x το $S(x)$ γίνεται μέγιστο και για ποιές ελάχιστο; Ποιά είναι η αντίστοιχη μέγιστη και ελάχιστη τιμή του εμβαδού; Μονάδες 10

ΘΕΜΑ Γ

Θεωρούμε συνάρτηση $f : [0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ η οποία είναι συνεχής στο πεδίο ορισμού της και παραγωγίσιμη στο $(0, +\infty)$ για την οποία ισχύει:

$$\begin{cases} f(e) = e, & f(0) = 0 \\ x \cdot f'(x) = f(x) + x, & \forall x > 0 \end{cases}$$

Γ1. Να αποδείξετε ότι $f(x) = \begin{cases} x \ln(x) & , x > 0 \\ 0 & , x = 0 \end{cases}$. **Μονάδες 6**

Γ2. Να βρείτε τα διαστήματα μονοτονίας της συνάρτησης, τα τοπικά και ολικά ακρότατα αν υπάρχουν.

Μονάδες 8

Γ3. Να βρείτε το σύνολο τιμών της συνάρτησης f . **Μονάδες 4**

Γ4. Να λυθεί η εξίσωση: $x^x = \frac{1}{\sqrt{2}}$, $x > 0$. **Μονάδες 7**

ΘΕΜΑ Δ

Δίδεται συνάρτηση $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με $f(x) = x + (x^2 - 1) \ln(x + 1)$.

Δ1. Να βρείτε το πεδίο ορισμού και το πεδίο τιμών της συνάρτησης $f(x)$. **Μονάδες 6**

Δ2. Δείξτε ότι η εξίσωση $f(x) = 0$ έχει διπλή ρίζα ρ δηλαδή, $f(\rho) = f'(\rho) = 0$, και μια άλλη ρίζα στο διάστημα $(-1, 0)$.

Μονάδες 5

Δ3. Χρησιμοποιώντας το προηγούμενο αποτέλεσμα, να δείξετε ότι η εξίσωση $f''(x) = 0$ έχει ρίζα στο $(-1, 0)$. **Μονάδες 6**

Δ4. Έστω $A(1, f(1))$ και $B(2, f(2))$ δύο σημεία του γραφήματος \mathcal{G}_f της f . Αν M είναι το σημείο τομής της χορδής AB με τον κατακόρυφο άξονα, να δείξετε ότι υπάρχει σημείο $a \in (1, 2)$ έτσι ώστε η εφαπτομένη της \mathcal{G}_f στο σημείο $K(a, f(a))$ να διέρχεται από το M . Δείξτε επίσης ότι η εφαπτομένη MK έχει εξίσωση

$$y = -3 \ln(3) + f'(a)x$$

Μονάδες 8