

Μαθηματικά Snacks

Λυγάτσικας Ζήνων

Πρότυπο Γ.Ε.Λ. Βαρβακείου Σχολής

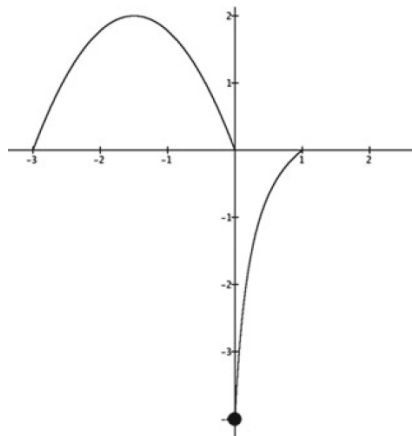
19 Δεκεμβρίου 2018

1 Χριστούγεννα 2018

1.1 22 Δεκεμβρίου 2018

Έστω $g : (-3, 1) \rightarrow \mathbb{R}$ η συνάρτηση της οποίας το γράφημα φαίνεται στο παρακάτω διάγραμμα. Να βρείτε το γράφημα των συναρτήσεων:

$$|g(-x)| \quad \text{και} \quad |3 - g(x + 2)|$$



1.2 23 Δεκεμβρίου 2018

Ορίζουμε το άρτιο και περιττό μέρος μιας συνάρτησης f να είναι αντίστοιχα:

$$f_e(x) = \frac{1}{2}(f(x) + f(-x)) \quad \text{και} \quad f_o(x) = \frac{1}{2}(f(x) - f(-x))$$

Να βρείτε το άρτιο και περιττό μέρος των συναρτήσεων:

$$f(x) = \begin{cases} x + 2 & x < 1 \\ 0 & x = 1 \\ \frac{3}{4}(x - 3)^2 & x > 1, x \neq 5 \\ 2 & x = 5 \end{cases}$$

και

$$g(x) = \begin{cases} \frac{\log(x) - x^3}{2} & x > 0 \\ 0 & x = 0 \\ \frac{\log(-x) - x^3}{2} & x < 0 \end{cases}$$

Επίσης, να κάνετε τα γραφήματα των f_e , f_o , g_e και g_o .

1.3 24 Δεκεμβρίου 2018

Έστω f μια παραγωγίσιμη συνάρτηση από $[a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ έτσι ώστε $f'(a) = f'(b) = 0$. Δείξτε ότι υπάρχει $c \in (a, b)$ τέτοιο ώστε

$$f'(c) = \frac{f(c) - f(a)}{c - a}$$

Ποιά μπορεί να είναι η γεωμετρική σημασία ενός τέτοιου αποτελέσματος;

1.4 ☆ 25 Δεκεμβρίου 2018 ☆

Υπάρχει συνεχής συνάρτηση $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ της οποίας το γράφημα τέμνει σε άπειρα σημεία όλες τις μη κατακόρυφες ευθείες;

1.5 26 Δεκεμβρίου 2018

Σύμφωνα με τη Θεωρία της Σχετικότητας, ένα σωματίδιο, αρχικής μάζας σε ακινησία m_0 , έχει μάζα m όταν κινείται με ταχύτητα v η οποία δίνεται από τον τύπο

$$m(v) = \frac{m_0}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

όπου c η ταχύτητα του φωτός $300\,000 \text{ km/sec}$.

- Υπολογίστε τη μάζα όταν $v = 0,7 \text{ km/sec}$ και $v = 10^8 \text{ km/sec}$. Πάρτε σαν αρχική μάζα $m_0 = 1$.
- Μελετήστε τη συνάρτηση $m(v)$ όταν v μεταβάλλεται από 0 έως c . Χαράξτε το γράφημα της συνάρτησης $m(v)$.
- Για ποιά ταχύτητα η μάζα m γίνεται διπλάσια της αρχικής μάζας m_0 ; Με ποιά ταχύτητα ένα σωματίδιο αυξάνει τη μάζα του κατά 1% της αρχικής μάζας;

1.6 27 Δεκεμβρίου 2018

Έστω $f : [-1, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ ορισμένη από:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x} \left(\sqrt{1+x^2} - \sqrt{1-x^2} \right) & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$$

- Δείξτε ότι είναι συνεχής στο $[-1, 1]$.
- Δείξτε ότι η f είναι παραγωγίσιμη στο $(-1, 1)$ και βρείτε στη συνέχεια την f' στο $(-1, 1)$.
- Δείξτε ότι η $f' : (-1, 1) \rightarrow \mathbb{R}$ είναι συνεχής στο $(-1, 1)$. Ποιό είναι το σύνολο των σημείων x έτσι ώστε $f'(x) = 0$;
- Κατασκευάστε τον πίνακα μεταβολών της f και χαράξτε το γράφημά της. Η f είναι $1 - 1$;
- Θεωρείστε τώρα την συνάρτηση $g : [-1, 1] \rightarrow f([-1, 1])$ έτσι ώστε $g(x) = f(x)$, $\forall x \in [-1, 1]$. Αφού δικαιολογήσετε την ύπαρξη της g^{-1} , να βρείτε την $(g^{-1})'(0)$.

1.7 28 Δεκεμβρίου 2018

Να βρεθεί το όριο $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 \left(\frac{1}{Ax} - \frac{1}{Ax+1} \right)$, $A \in (1, +\infty)$.

1.8 29 Δεκεμβρίου 2018

Αποδείξτε ότι $\forall x \geq 0$ ισχύει:

$$0 \leq 2x + \frac{x^3}{6(1+x)} - (x+2) \ln(1+x) \leq \frac{x^5}{60}$$

1.9 30 Δεκεμβρίου 2018

1. Έστω $g : [0, \pi] \rightarrow \mathbb{R}$ με $g(x) = x \sin(x) - \eta\mu(x)$. Κατασκευάστε τον πίνακα μεταβολών της $g(x)$. Ποιό είναι το πρόσημο της συνάρτησης στο $(0, \pi)$.

2. Έστω $f(x) = \begin{cases} \frac{\eta\mu(x)}{x} & x \neq 0 \\ 1 & x = 0 \end{cases}$. Μελετήστε τη μεταβολή της $f(x)$ στο $(0, \pi]$.

(α') Αποδείξτε ότι η f είναι παραγωγίσιμη στο 0. Να βρείτε στη συνέχεια την $f'(0)$.

(β') Κατασκευάστε το γράφημα \mathcal{G}_f .

1.10 31 Δεκεμβρίου 2018

Βρείτε τη παράγωγο της $f(x) = \sqrt{\frac{1 + \eta\mu \sqrt{x}}{1 - \eta\mu \sqrt{x}}}$.

1.11 * 1 Ιανουαρίου 2019 *

Υπάρχει συνεχής συνάρτηση $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ η οποία να παίρνει τις τιμές της 2 ακριβώς φορές;

1.12 2 Ιανουαρίου 2019

Έστω f είναι μια φθίνουσα συνεχής πραγματική συνάρτηση με $f(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$. Δείξτε ότι το σύστημα

$$\begin{cases} x = f(y) \\ y = f(z) \\ z = f(x) \end{cases}$$

έχει μια μοναδική λύση.

1.13 3 Ιανουαρίου 2019

Έστω $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ που ικανοποιεί τη

$$f(x + y) = f(x) + f(y), \quad \forall x, y \in \mathbb{R} \quad (1)$$

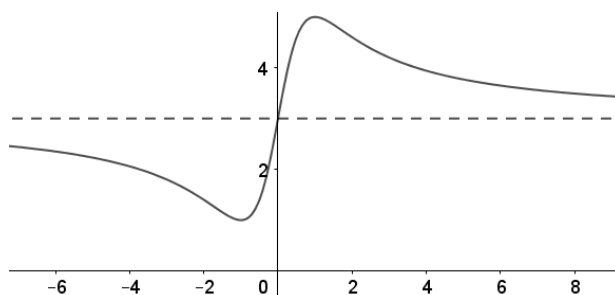
Δείξτε ότι:

1. $f(nx) = nf(x)$, $\forall x \in \mathbb{R}$ και $n \in \mathbb{N}$.

2. f είναι συνεχής σε ένα σημείο αν και μόνο αν είναι συνεχής στο \mathbb{R} .
3. f είναι συνεχής αν και μόνο αν $f(x) = k \cdot x$ για κάποιο $k \in \mathbb{R}$.

1.14 4 Ιανουαρίου 2019

1. Έστω πραγματική συνάρτηση f με $f(x) = \frac{ax^2 + bx + c}{x^2 + 1}$ της οποίας το γράφημα φαίνεται στο παρακάτω διάγραμμα.



Αν η ευθεία $y = 3$ είναι μια ασύμπτωτος, να βρείτε τα a , b και c .

2. Έστω f μια συνάρτηση ορισμένη σαν $f(x) = \frac{3x^2 + 4x + 3}{x^2 + 1}$. Να προσδιορισθούν τα a και b έτσι ώστε $f(x) = a + \frac{bx}{x^2 + 1}$.

(α') Κατασκευάστε τον πίνακα μεταβολών της f .

(β') Βρείτε τις ασύμπτωτες της f .

(γ') Δείξτε ότι $\forall x \in \mathbb{R}$,

$$\frac{f(x) + f(-x)}{2} = 3 \quad (2)$$

(δ') Ποιά είναι η γεωμετρική σημασία της σχέσης (2);

3. Έστω $h(x) = f(|x|) = \frac{3x^2 + 4|x| + 3}{x^2 + 1}$.

(α') Βρείτε το $\lim_{x \rightarrow -\infty} h(x)$.

(β') Πως μπορούμε να κατασκευάσουμε το γράφημα της h όντας γνωστό το γράφημα της f ;

■