Το μπιλιάρδο, το Ελάχιστο Κοινό Πολλαπλάσιο και ο Μέγιστος Κοινός Διαιρέτης δύο ακεραίων αριθμών

Σωτήρης Γκιουλέας

Επιβλέπων Καθηγητής: Ζήνων Λυγάτσικας

Πρότυπο ΓΕΛ Βαρβακείου Σχολής

ΠΕΡΙΛΗΨΗ

Το μαθηματικό ή αριθμητικό μπιλιάρδο είναι ένα ιδανικό μπιλιάρδο στο οποίο ή μπάλα ανακλάται στα τοιχώματα με τον ίδιο τρόπο όπως στο κανονικό μπιλιάρδο, όμως είναι αβαρής, και δεν υπάρχουν τριβές και απώλεια κινητικής ενέργειας. Επιπλέον, δεν υπάρχουν τρύπες που να μπορούν να καταπιούν τη μπάλα, έτσι ώστε μπορεί να ανακλάται απεριόριστα πολλές φορές στις πλευρές του τραπεζιού. Τα μήκη των πλευρών είναι θετικοί ακέραιοι αριθμοί. Μία ενδιαφέρουσα πτυχή του αριθμητικού μπιλιάρδου, είναι το ότι η τροχιά της μπάλας δίνει πληροφορίες για τον εντοπισμό του Ελαχίστου Κοινού Πολλαπλασίου και του Μεγίστου Κοινού Διαιρέτη των μηκών των διαστάσεών του.

ΕΙΣΑΓΩΓΗ

Το μαθηματικό ή αριθμητικό μπιλιάρδο είναι ένα ιδανικό ορθογώνιο μπιλιάρδο με ακέραιο πλάτος και μήκος, στο οποίο ή μπάλα ανακλάται στα τοιχώματα με τον ίδιο τρόπο όπως στο κανονικό μπιλιάρδο, όμως είναι αβαρής, και δεν υπάρχουν τριβές και απώλεια κινητικής ενέργειας.

Στη βιβλιογραφία μπορούμε να βρούμε ένα πλήθος προβλημάτων που αφορούν το μπιλιάρδο. Ένα πολύ γνωστό είναι "Το πρόβλημα της μπάλλας του μπιλιάρδου" ή "The billiard ball problem" , δείτε σχετικά στο [1] ή στη Wikipedia [2].

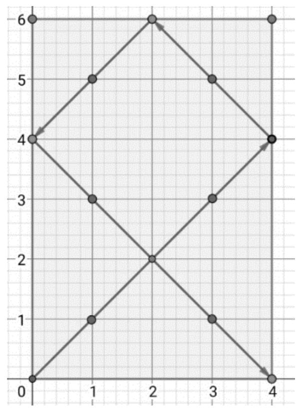
Εδώ θα δείξουμε μία επίσης ενδιαφέρουσα ιδιότητά του οποία μας δίνει τη δυνατότητα να υπολογίσουμε το ελάχιστο κοινό πολλαπλάσιο και το μέγιστο κοινό διαιρέτη δύο αριθμών.

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΟ ΜΠΙΛΙΑΡΔΟ ΚΑΙ ΕΚΠ

Έστω α και β δύο θετικοί ακέραιοι αριθμοί. Θα συμβολίσουμε το Ελάχιστο Κοινό Πολλαπλάσιο, ΕΚΠ των α και β με [α;β] και τον Μέγιστο Κοινό Διαιρέτη, ΜΚΔ, με (α;β). Ας υποθέσουμε στην αρχή οτι κανένας από τους δύο δεν είναι πολλαπλάσιο του άλλου. Αν ο ένας είναι πολλαπλάσιο του άλλου τότε θα δούμε στο τέλος ότι ο υπολογισμός είναι τετριμμένος.

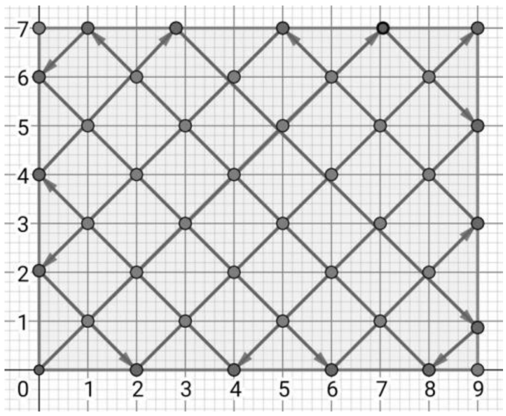
Ας αρχίσουμε με το ΕΚΠ. Παίρνουμε ένα ορθογώνιο τραπέζι μπιλιάρδου με διαστάσεις α και β, και από μια γωνία εκτοξεύουμε μία μπάλα, σε γωνία 45^o με οποιαδήποτε από τις δύο κάθετες πλευρές της γωνίας του τραπεζιού. Η μπάλα ανακλάται στις πλευρές του τραπεζιού σε γωνία 45^o κάθε φορά. Το μήκος της διαδρομής της μπάλας μέχρι να χτυπήσει σε μια γωνία του τραπεζιού, διαιρούμενο με $\sqrt{2}$ είναι το [α;β].

Για παράδειγμα, έστω ότι θέλουμε να υπολογίσουμε το ελάχιστο κοινό πολλαπλάσιο των φυσικών 4 και 6. Παίρνουμε ένα τραπέζι διαστάσεων 4×6 σχεδιασμένο πάνω σε ένα ακέραιο δίκτυο με πλέγμα και εκτοξεύουμε την μπάλα από την κορυφή Ο με διεύθυνση 45 μοίρες. Αν η γκρι γραμμή (βλέπε σχήμα) είναι η πορεία s της μπάλας μέχρι να φτάσει σε κάποια γωνία του τραπεζιού, τότε το μήκος της διαδρομής s διά $\sqrt{2}$ θα μας δώσει το ΕΚΠ των 4 και 6, δηλαδή το 12.



Ας δούμε και ένα συνθετότερο παράδειγμα. Θέλουμε να απεικονίσουμε το ΕΚΠ των ακεραίων 7 και 9. Θα επαναλάβουμε την ίδια διαδικασία σε ένα τραπέζι διαστάσεων 7×9. Η μπάλα θα διέλθει από 63 μοναδιαία τετράγωνα, δηλαδή από [7;9] ακέραια πλέγματα, επειδή [α;β] = 63.

Βρίσκουμε το συμμετρικό του τμήματος της διαδρομής ΑΒ που βρίσκεται στο ορθογώνιο 1 ως προς την πλευρά του γειτονικού ορθογωνίου 3 που τέμνει η διαδρομή ΑΒ.

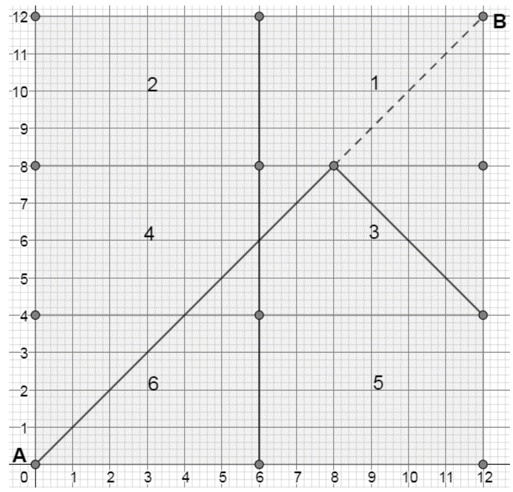


Είμαστε έτοιμοι λοιπόν για τον πρώτο μας ισχυρισμό:

> <u>Ισχυρισμός 1:</u> **Έστω α και β δύο ακέραιοι θετικοί αριθμοί. Τότε το [α;β] είναι ίσο με τον αριθμό των μοναδιαίων τετραγώνων που διέρχεται η τροχιά της μπάλας ή με το μήκος της τροχιάς της μπάλας έως ότου βρεί τη δεύτερη γωνία του ορθογωνίου διά το $\sqrt{2}$.**

<u>Απόδειξη :</u> Θα δείξουμε τον ισχυρισμό με την βοήθεια ενός παραδείγματος. Η γενίκευση της απόδειξης δεν επηρεάζεται από το παράδειγμα.

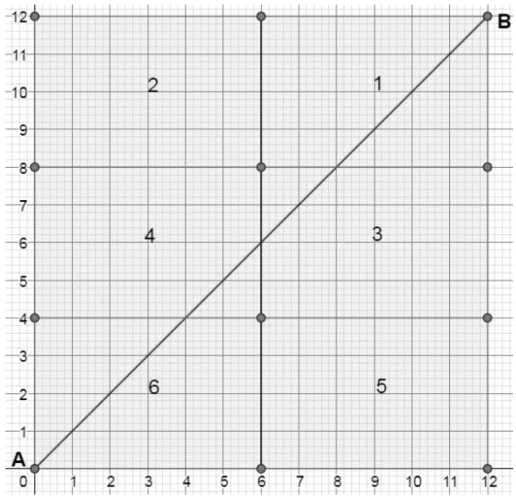
¨Ένα γνωστό τέχνασμα προσδιορισμού της τροχιάς της μπάλας στο Μαθηματικό μπιλιάρδο είναι να χρησιμοποιήσουμε πολλαπλά αντίγραφα του αρχικού ορθογωνίου διαστάσεων σε ένα μεγάλο τετράγωνο με πλευρά α×β. Η πορεία της μπάλας στο μεγάλο τετράγωνο όταν εκτοξεύεται με αρχική θέση την κάτω αριστερή γωνία με γωνία 45^o θα είναι η διαγώνιος ΑΒ του τετραγώνου.

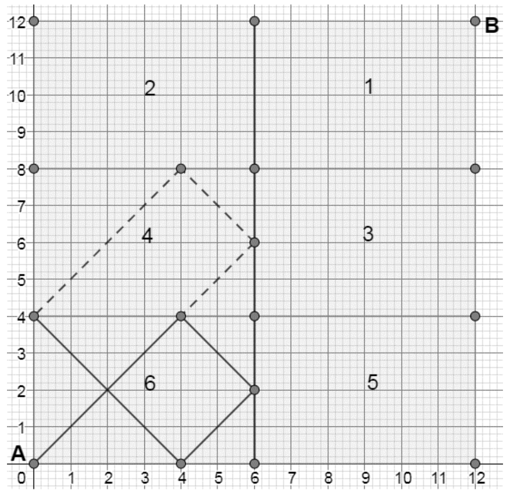


Αν για παράδειγμα α = 4 και β = 6, κατασκευάζουμε ένα τετράγωνο πλευράς [4;6] = 12. Το τετράγωνο αυτό μπορούμε να το χωρίσουμε σε 6 ορθογώνια με πλευρές μήκους 4 και 6 όπως φαίνεται στο σχήμα.

Φέρουμε τη διαγώνιο ΑΒ. Θα δούμε τώρα πως μπορούμε να διπλώσουμε το ευθύγραμμο τμήμα ΑΒ μέσα στο αρχικό ορθογώνιο 6.

Φυσικά το δίπλωμα θα γίνει με συμμετρίες.





Τώρα βρίσκουμε το συμμετρικό του ορθογωνίου 3 ως προς την πλευρά του ορθογωνίου 4 που τέμνει η διαδρομή ΑΒ.

Τέλος, με άξονα την πλευρά του ορθογωνίου 6 βρίσκουμε το συμμετρικό του ορθογωνίου 4.

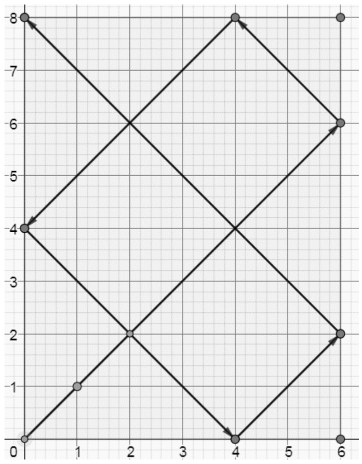
Η διαδρομή της μπάλας ΑΒ έχει διπλωθεί τώρα μέσα στο ορθογώνιο 6. Η τροχιά της μπάλας s είναι σημειωμένη στο ορθογώνιο 6. Όλες οι αντανακλάσεις της τροχιάς s στις πλευρές του ορθογωνίου 6 σχηματίζουν γωνίες 45^o με τις αντίστοιχες πλευρές.

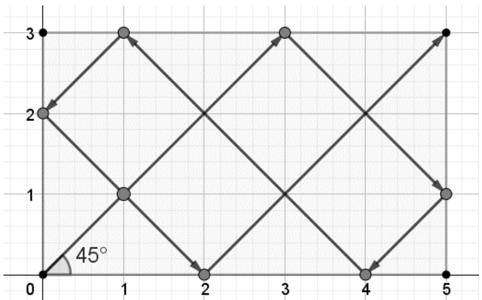
Η διαδρομή ΑΒ διέρχεται από [α;β] μοναδιαία τετράγωνα του τετραγώνου και το ίδιο συμβαίνει με την τροχιά s στο εσωτερικό του ορθογωνίου 6. Το μήκος της διαδρομής s είναι ίσο με αυτό της διαγωνίου ΑΒ. Όμως $AB=[\alpha;\beta]\sqrt{2}$. Άρα το ελάχιστο κοινό πολλαπλάσιο των α και β είναι ίσο του μήκους της διαδρομής της μπάλας διαιρούμενο με $\sqrt{2}$ ή με τον αριθμό των μοναδιαίων τετραγώνων που διασχίζει η τροχιά s από την αρχική της θέση έως να φτάσει στην πρώτη γωνία. ■

Υπολογισμός του ΜΚΔ μέσω του αριθμητικού μπιλιάρδου

Έστω ότι θέλουμε να υπολογίσουμε το μέγιστο κοινό διαιρέτη δύο ακεραίων α και β, (α;β). Αρκεί να επαναλάβουμε την ίδια διαδικασία με τον υπολογισμό του ελάχιστου κοινού τους πολλαπλασίου, μόνο που σε αυτήν την περίπτωση ο μέγιστος κοινός διαιρέτης μας δίνεται διαιρώντας την απόσταση του σημείου εκκίνησης μέχρι το κοντινότερο σημείο διασταύρωσης της τροχιάς, με $\sqrt{2}$.

Αν, για παράδειγμα, θέλουμε να υπολογίσουμε το μέγιστο διαιρέτη των 6 και 8, παίρνουμε ένα τραπέζι διαστάσεων 4×6 σχεδιασμένο πάνω σε ένα ακέραιο δίκτυο με πλέγμα και εκτοξεύουμε την μπάλα από την κορυφή 0 με διεύθυνση 45 μοίρες. Αν η γκρι γραμμή είναι η πορεία της μπάλας, τότε μετρώντας τα ακέραια πλέγματα από τα οποία διήλθε όσο κινούνταν από το σημείο εκκίνησης της μέχρι το κοντινότερο σημείο διασταύρωσης της τροχιάς της, παρατηρούμε ότι είναι δύο, ακριβώς όσο και το [6,8].





Ενώ αν α = 5 και β =3 τότε (3;5) = 1, όπως φαίνεται στο παρακάτω σχήμα.

Είμαστε έτοιμοι να διατυπώσουμε τον δεύτερο ισχυρισμό μας:

> <u>Ισχυρισμός 2:</u> **Έστω α και β δύο ακέραιοι θετικοί αριθμοί. Τότε ο (α;β) είναι ίσος με τον αριθμό των μοναδιαίων τετραγώνων που διέρχεται η τροχιά της μπάλας από την αρχική της θέση έως να φτάσει στη πρώτη διασταύρωση με την ίδια, ή με το μήκος της τροχιάς από την αρχική της θέση έως τη πρώτη διαστάρωση διά το $\sqrt{2}$.**

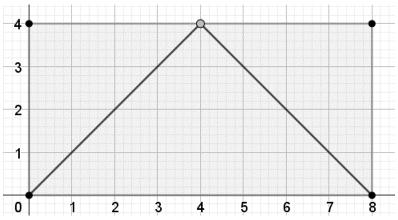
<u>Απόδειξη</u>

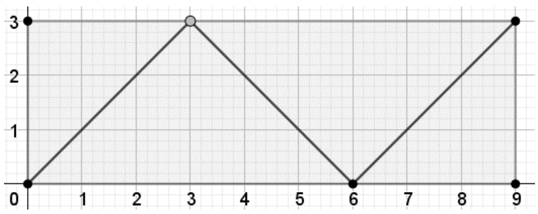
Έστω θετικοί ακέραιοι α και β, και α’=α/(α;β), β’=β/(α;β). Τότε (α’;β’) =1 και έτσι (α’;β’)[α’;β’]=α’β’ ⇒ α’β’ = [α’;β’]. Παίρνουμε ορθογώνιο με διαστάσεις α’xβ’ σχεδιασμένο πάνω σε ένα ακέραιο δίκτυο και εκτοξεύουμε την μπάλα από την κάτω αριστερή κορυφή με διεύθυνση 45^o. Εφόσον (a';β') = 1, η μπάλα θα περάσει από όλα τα μοναδιαία τετράγωνα του πλέγματος μια φορά, και έτσι η απόσταση του σημείου εκκίνησης μέχρι το κοντινότερο σημείο διασταύρωσης της τροχιάς της θα είναι ένα μοναδιαίο τετράγωνο. Η δε απόσταση από την αρχική θέση μέχρι τη διασταύρωση θα είναι (α';β')$\sqrt{2}$. Έτσι λοιπόν αν οι ακέραιοι είναι πρώτοι μεταξύ τους τότε ο ΜΚΔ είναι ίσος με το μήκος της τροχιάς από την αρχική θέση έως τη πρώτη διασταύρωση δια του $\sqrt{2}$.

Στη συνέχεια παίρνοντας ένα ορθογώνιο διαστάσεων α×β, οι διαστάσεις του θα είναι ανάλογες αυτών του ορθογωνίου διαστάσεων α'×β', με λόγο (α;β). Άρα και οι αποστάσεις από τα αντίστοιχα σημεία εκκίνησης μέχρι τα αντίστοιχα κοντινότερα σημεία διασταύρωσης της τροχιάς θα είναι επίσης ανάλογα με λόγο (α;β). Αυτό σημαίνει ότι στο τραπέζι με τις διαστάσεις α×β, η απόσταση του σημείου εκκίνησης της μπάλας μέχρι το κοντινότερο σημείο διασταύρωσης της τροχιάς της θα είναι (α;β) πλέγματα, δηλαδή (α;β) διαγώνιες τετραγώνων με πλευρά 1, δηλαδή (α;β) $\sqrt{2}$.

Υπολογισμός ΕΚΠ και ΜΚΔ όταν οι αριθμοί είναι ο ένας πολ/σιο του άλλου

Ας υποθέσουμε τώρα ότι ο α είναι πολλαπλάσιο του β. Τότε [α;β] = α και (α;β) = β. Ας δούμε τα παρακάτω σχήματα.





Στο πρώτο σχήμα έχουμε ένα ορθογώνιο διαστάσεων 8 x 4 και το δεύτερο 9 x 3. Το μήκος της τροχιάς δίνει το ΕΚΠ των δύο αριθμών και το μήκος της απόστασης από την αρχική θέση μέχρι να φτάσει στην απέναντι πλευρά η μπάλα δίνει το ΜΚΔ των δύο αριθμών.

Βιβλιογραφία

[1] Steinhaus, Hugo. *Mathematical Snapshots, Dover Recreational* Math Series ed., Courier Corporation, 1999.

[2] Wikipedia: Λήμμα Arithmatic Billiards ή στο https://en.wikipedia.org/wiki/Arithmetic_billiards, τελευταία προσπέλαση 01/12/2018.