Θέματα & Λύσεις ΘΑΛΗΣ 2018 Α και Β Λυκείου

Λύσεις και προεκτάσεις

Λυγάτσικας Ζήνων
Πρότυπο ΓΕΛ Βαρβακείου Σχολής

11 Νοεμβρίου 2018

Κεφάλαιο 1

Θέματα και Λύσεις Α Λυκείου

Πρόβλημα 2 Αν οι πραγματικοί αριθμοί α, β είναι τέτοιοι ώστε $\dfrac{5\alpha^2\beta^2}{\alpha^4 - 36\beta^4} = 1$, να βρείτε τις δυνατές τιμές της παράστασης: $K = \dfrac{\alpha - \beta}{\alpha + \beta}$.

Λύση : Απο τη σχέση έχουμε $a^4 - 5a^2b^2 - 36b^4 = 0 \Leftrightarrow -(\alpha + 3\beta)(-\alpha + 3\beta)(\alpha^2 + 4\beta^2) = 0$. Συνεπώς:

1. είτε $\alpha = -3\beta$ οπότε: $K = \dfrac{-3\beta - \beta}{-3\beta + \beta} = 2$,
2. είτε $\alpha = 3\beta$ οπότε: $K = \dfrac{3\beta - \beta}{3\beta + \beta} = \dfrac{1}{2}$ ■

Πρόβλημα 3 Να συγκριθούν οι αριθμοί:

$$A = \frac{2}{3} + \frac{2}{6} + \frac{2}{9} + \cdots + \frac{2}{99}$$

και

$$B = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8} + \frac{1}{10} + \cdots + \frac{1}{95} + \frac{1}{97} + \frac{1}{98} + \frac{1}{100}$$

Λύση : Παρατηρείστε ότι $\forall n \in \mathbb{N}^*$:

$$\frac{1}{n} + \frac{1}{n+2} = \frac{2(n+1)}{n(n+2)} > \frac{2}{n+1} \tag{1.1}$$

Αφού, $\dfrac{2(n+1)}{n(n+2)} > \dfrac{2}{n+1} \Leftrightarrow 1 > 0$ το οποίο είναι αληθές.

Άρα,

$$\begin{cases} \frac{1}{2}+\frac{1}{4}>\frac{2}{3} & \text{η 1.1 για} \quad n=2 \\ \frac{1}{5}+\frac{1}{7}>\frac{2}{6} & \text{η 1.1 για} \quad n=5 \\ \frac{1}{8}+\frac{1}{10}>\frac{2}{9} & \text{η 1.1 για} \quad n=8 \\ \dots & \\ \frac{1}{98}+\frac{1}{100}>\frac{2}{99} & \text{η 1.1 για} \quad n=98 \end{cases}$$

Έτσι, αν προσθέσουμε τα πρώτα μέλη των ανισώσεων είναι ο αριθμός Β και τα δεύτρα ο αριθμός Α. Επομένως $B > A$. ■

Παρατήρηση 1.0.1 *Δεν το είδα χθες, αλλά μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε και την γνωστή ανισότητα Αριθμητικού Μέσου - Αρμονικού Μέσου για* $a,\ b>0$: $\frac{a+b}{2}>\frac{2}{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}}$. *Από αυτή λοιπόν έχετε μια άλλη διατύπωση της 1.1:*

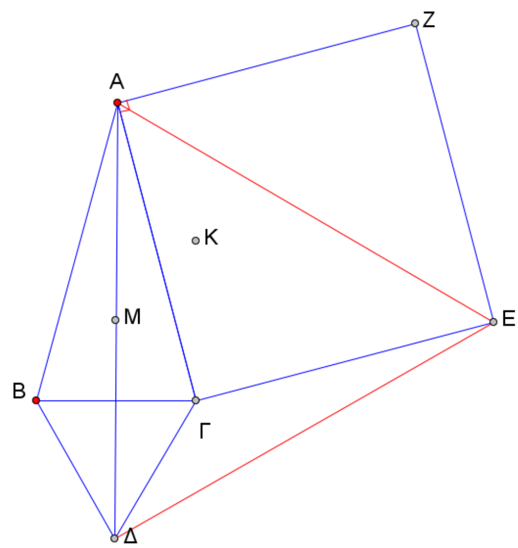
$$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}>\frac{4}{a+b}$$

Τα υπόλοιπα είναι όπως τα παραπάνω.

Πρόβλημα 4 Δίδεται ισοσκελές τρίγωνο $AB\Gamma$ με $\widehat{A}=30^o$. Εξωτερικά του τριγώνου κατασκευάζουμε ισόπλευρο τρίγωνο $B\Gamma\Delta$ και το τετράγωνο $A\Gamma EZ$. Αν το σημείο M είναι το μέσο της $A\Delta$ και το σημείο K είναι το συμμετρικό της κορυφής B ως προς το σημείο M, να αποδείξετε ότι:

1. Το τρίγωνο $A\Delta E$ είναι ισόπλευρο,
2. Οι ευθείες AK, EM και $\Delta\Gamma$ περνάνε από το ίδιο σημείο.

Λύση :



1.

Εύκολα αποδεικνύεται ότι η γωνία $\widehat{\Delta A E} = 15^o + 45^o = 60^o$.

Επίσης, τα τρίγωνα $A\Delta\Gamma$ και $\Delta\Gamma E$ είναι ίσα, αφού $\widehat{A\Gamma\Delta} = \widehat{E\Gamma\Delta} = 135^o$, $\Gamma E = A\Gamma$ και $\Delta\Gamma = \Gamma\Delta$.

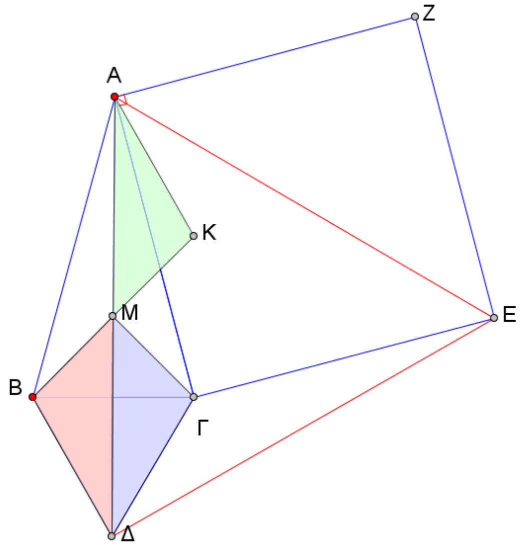
Επομένως το τρίγωνο είναι ισοσκελές με μια γωνία 60^o, άρα ισόπλευρο.

2. Το δεύτερο ερώτημα είναι το ίδιο όπως το θέμα γεωμετρίας του ΘΑΛΗ 2016. Θα αποδείξουμε λοιπόν ότι οι τρείς ευθείες AK, EM και $\Delta\Gamma$ είναι οι διχοτόμοι του τριγώνου $A\Delta E$.

   Πράγματι, η EM είναι διάμεσος άρα διχοτόμος σε ισόπλευρο.

   Η $\Delta\Gamma$ είναι επίσης διχοτόμος αφού οι δύο γωνίες $\widehat{A\Delta\Gamma}$ και $\widehat{\Gamma\Delta E}$ είναι 30^o έκαστη.

   Τέλος, η AK είναι επίσης διχοτόμος, αφού τα τρίγωνα $AKM = BM\Delta = M\Gamma\Delta$ και $\widehat{B\Delta M} = \widehat{MAK} = 30^o$.



■

Κεφάλαιο 2

Θέματα και Λύσεις Β Λυκείου

Πρόβλημα 2 Αν οι πραγματικοί αριθμοί a και b είναι τέτοιοι ώστε $\dfrac{26a^3b^3}{a^6-27b^6} = -1$ να βρείτε τις δυνατές τιμές της παράστασης: $K = \dfrac{a^2-b^2}{a^2+b^2}$.

Λύση : Όπως και στο 2ο Θέμα της Α Λυκείου αρκεί να παραγοντοποιήσετε την αλγεβρική παράσταση της ισότητας:

$$\begin{aligned} 26a^3b^3 + a^6 - 27b^6 = 0 \quad &\Leftrightarrow \quad -(-a+b)(a+3b)(a^2+ba+b^2)(a^2-3ba+9b^2) = 0 \\ &\Leftrightarrow \quad a = b \text{ ή } a = -3b \end{aligned}$$

Για $a = b$ έχουμε $K = 0$ και για $a = -3b$ θα πάρουμε $K = \dfrac{4}{5}$. ■

Πρόβλημα 2 Αν οι πραγματικοί αριθμοί x, y, z, w είναι όλοι μεγαλύτεροι ή ίσοι του 1 και μικρότεροι ή ίσοι του 5 και επιπλέον ισχύει ότι $x + y + y + w = 8$, να βρείτε τη μεγίστη δυνατή τιμή της παράστασης

$$A = x^2 + y^2 + z^2 + w^2$$

Λύση : Κάθε μεταβλητή x, y, z, w ικανοποιεί τη σχέση:

$$t - 1 \geq 0 \ \&\ t - 5 \leq 0 \Rightarrow (t-1)(t-5) \leq 0 \Leftrightarrow t^2 \leq 6t - 5 \tag{2.1}$$

Έτσι: $x^2 + y^2 + z^2 + w^2 \leq 6(x + y + z + w) - 20 = 28$. Επομένως, η μέγιστη τιμή της A είναι το 28.
Η λύση έχει προταθεί στο mathematica. ■

Πρόβλημα 3 Αν ο τετραψήφιος ακέραιος $A = \overline{a_3a_2a_1a_0} = a_1 10^3 + a_2 10^2 + a_1 10 + a_0$ έχει ψηφία τέτοια ώστε $a_0 > a_1 > a_2 > a_3 > 0$ να προσδιορίσετε το άθροισμα των ψηφίων του αριθμού $9 \cdot A$.

Λύση : Ας κάνουμε την αφαίρεση:

$$\begin{aligned} 9 \cdot A &= 10 \cdot A - A \\ &= \overline{a_3a_2a_1a_1a_0}0 - \overline{a_3a_2a_1a_0} \end{aligned}$$

ή

$$\begin{array}{rccccc} & a_3 & a_2 & a_1 & a_0 & 0 \\ - & & a_3 & a_2 & a_1 & a_0 \end{array}$$

Τότε όμως, $a_0 > 0$ άρα θα πρέπει να δανεισθούμε μια 1 η οποία θα προστεθεί στο επόμενο ψηφίο a_1. Όπως, $a_0 > a_1 \Rightarrow a_0 \geq a_1 + 1$, επομένως στη δεύτερη θέση το $a_1 + 1$ θα αφαιρεθεί από το a_0 χωρίς να δανεισθούμε μονάδα. Όλα τα άλλα είναι εντάξει μπορούν να αφαιρεθούν χωρίς δανεισμό μονάδας.

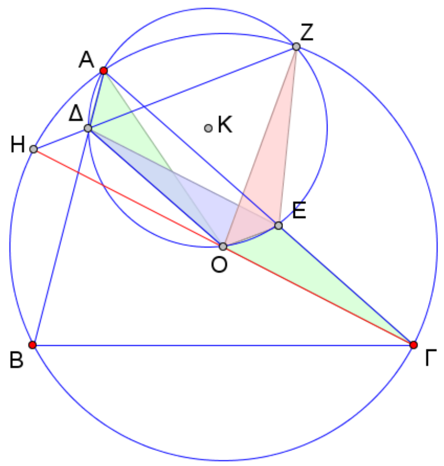
$$\begin{array}{cccccc} & a_3 & a_2 & a_1 & a_0 & 0 \\ - & & a_3 & a_2 & a_1 & a_0 \\ \hline & a_3 & a_2 - a_3 & a_1 - a_2 & a_0 - 1 - a_1 & 10 - a_0 \end{array}$$

Αλλά: $a_3 + (a_2 - a_3) + (a_1 - a_2) + (a_0 - 1 - a_1) + (10 - a_0) = 9$. ■

- Δίνεται τρίγωνο (με $AB < A\Gamma < B\Gamma$) εγγεγραμμένο σε κύκλο $c(O, R)$. Η παράλληλη από το O προς την $A\Gamma$τέμνει την AB στο σημείο Δ. Ο περιγεγραμμένος κύκλος, έστω (c_1) του τριγώνου $A\Delta O$ τέμνει την $A\Gamma$ στο σημείο E και το κύκλο $c(O, R)$ στο σημείο Z. Έστω ότι η ΔZ τέμνει τον κύκλο $c(O, R)$ στο H. Να αποδείξετε ότι:

  1. Τα τρίγωνα $OA\Delta$ και $O\Gamma E$ είναι ίσα.
  2. Τα τρίγωνα OZE και $O\Gamma E$ είναι ίσα.
  3. Τα σημεία Γ, O, H είναι συνευθειακά.

Λύση :



1. Τα τριγ. $O\Gamma E = OE\Delta$ γιατί $\left(\begin{array}{l} O\Gamma = OZ = OA = \Delta E \\ \widehat{\Delta OE} = \widehat{OE\Gamma} \\ \widehat{O\Delta E} = \widehat{OAE} = \widehat{O\Gamma E} \end{array} \right)$.

   Αλλά, τριγ. $O\Delta A = OE\Delta$. Επομένως: $OA\Delta = O\Gamma E$.

2. Τα τριγ. $OA\Delta = OEZ$ γιατί $\left(\begin{array}{l} A\Delta = OE \\ OA = OZ \\ \widehat{\Delta AO} = \widehat{EOZ} \text{ αφού} \\ \widehat{\Delta} = \widehat{E} \ \& \ \widehat{\Delta OA} = \widehat{OZE} \end{array} \right)$.

   Όμως: $OA\Delta = O\Gamma E$, άρα: $OZE = O\Gamma E$.

3. $$\left.\begin{array}{l}\widehat{O\Gamma E} = \widehat{\Delta OA} = \widehat{\Delta ZA} \\ \widehat{H\Gamma A} = \widehat{HZA}\end{array}\right\} \Rightarrow \widehat{O\Gamma E} = \widehat{H\Gamma A}$$

Άρα, Γ, O, H είναι συνευθειακά. ■