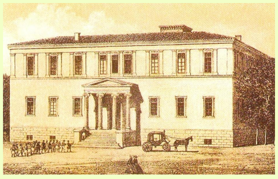
Συναρτησιακές Εξισώσεις

Για τους μαθητές θετικού προσανατολισμού Γ Λυκείου



Λυγάτσικας Ζήνων

Πρότυπο Γ.Ε.Λ. Βαρβακείου Σχολής

4 Σεπτεμβρίου 2018

Κεφάλαιο 1

Τι είναι μια συναρτησιακή εξίσωση;

Μια συναρτησιακή εξίσωση είναι μια ισότητα που ικανοποιείται από μια συνάρτηση. Για παράδειγμα η ισότητα

$$f(x) \cdot f(y) = f(x \cdot y),\ \forall x, y \in \mathbb{R} \tag{1.1}$$

ικανοποιείται από τη συνάρτηση $f(x) = x^3$, αφού $f(x) \cdot f(y) = x^3y^3 = (x \cdot y)^3 = f(xy)$. Επίσης, η συναρτησιακή εξίσωση

$$f(x) \cdot f(y) = f(x + y),\ \forall x, y \in \mathbb{R} \tag{1.2}$$

ικανοποιείται από την εκθετική συνάρτηση $f(x) = e^x$ αφού $e^{x+y} = e^x \cdot e^y$.
Μια συνάρτηση είναι λύση μιας συναρτησιακής εξίσωσης αν η συνάρτηση **ικανοποιεί την ισότητα ανεξάρτητα από την επιλογή των μεταβλητών**.

Όταν μας δίνουν μια συναρτησιακή εξίσωση η επίλυσή της συνίσταται στο να βρούμε όλες τις συναρτήσεις που είναι λύσεις της εξίσωσης. Συνήθως οι λύσεις αυτές ικανοποιούν και κάποιες επιπρόσθετες ιδιότητες όπως για παράδειγμα να είναι μονότονες, συνεχείς κλπ. Για παράδειγμα, οι μόνες συνεχείς συναρτήσεις που ικανοποιούν την εξίσωση

$$f(x) + f(y) = f(x + y) \qquad \forall x, y \in \mathbb{R} \tag{1.3}$$

είναι οι γραμμικές εξισώσεις αν και υπάρχει ενας μεγάλος αριθμός μη συνεχών συναρτήσεων που είναι επίσης λύσεις της εξίσωσης (1.3). Δυστυχώς ή ευτυχώς δεν έχουμε προς το παρόν εργαλεία να τις μελετήσουμε[1]. Τα τρία παραδείγματα που αναφέραμε μοιάζουν πολύ μεταξύ τους. Οι εξισώσεις (1.1) και (1.3) λέγονται συναρτησιακές εξισώσεις Cauchy και θα τις μελετήσουμε στη συνέχεια.

Υπάρχουν όμως και συναρτησιακές εξισώσεις που το πεδίο ορισμού είναι συχνά το $\mathbb{N}$ ή το $\mathbb{Q}$, ή είναι περισσοτέρων μεταβλητών. Τέτοιες εξισώσεις θα συναντήσουμε στην Μαθηματική Ολυμπιάδα του 1981, 1983, 1993, ή του 2002. Δεν θα ασχοληθούμε φυσικά με τόσο σύνθετες εξισώσεις! Εδώ, θα προσπαθήσουμε να δώσουμε μια εντελώς τυπική διάσταση του προβλήματος. Θα δούμε πως πρέπει κάποιος να σχεδιάσει την πορεία του για να βρεί λύση σε ένα τέτοιο πρόβλημα.

Συχνά *βλέπουμε* από νωρίς τη λύση αλλά μένει να δείξουμε ότι αυτή είναι μοναδική. Δεν υπάρχει βασιλική οδός για να το πετύχουμε. Υπάρχουν πολύ λίγες τυποποιημένες μέθοδοι που μπορούν να εφαρμοστούν. Τις περισσότερες φορές προχωράμε με δοκιμές και διορθώνοντας τα σφάλματα μέχρι η εξίσωση να αποκαλύψει όλο και περισσότερες πληροφορίες. Το πιο σημαντικό από το ότι καταλαβαίνετε

[1] Kuczma, Marek (2009). *An introduction to the theory of functional equations and inequalities. Cauchy's equation and Jensen's inequality.* Basel: Birkhäuser. ISBN 9783764387495.

είναι η εμπειρία σας. Με λίγη εξάσκηση θα προσπαθήσω να σας δείξω αυτό που πρέπει ώστε να αποκτήσετε την εμπειρία αυτή.

Κεφάλαιο 2

Μέθοδοι επίλυσης

2.1 Λύνοντας εξίσωση

Μερικές φορές με κατάλληλους μετασχηματισμούς στις μεταβλητές μπορεί να φτάσουμε σε εξισώσεις είτε πρωτοβάθμιες είτε δευτεροβάθμιες με μεταβλητή την συνάρτηση. Μπορούμε να λύσουμε ευθέως με τις γνωστές μας μεθόδους τις εξισώσεις αυτές.

Παράδειγμα 2.1.1 *Να βρεθεί η $f(x)$ αν $\dfrac{f(x)}{3+f(x)} = \dfrac{4+x^2}{x^2}$.*

Λύση: *Πρέπει $x \neq 0$ και $f(x) \neq -3$. Η αρχική εξίσωση είναι ισοδύναμη με:*

$$x^2 f(x) = (4+x^2)(3+f(x)) \Leftrightarrow f(x) = -\frac{3(4+x^2)}{4}$$

Παρατηρούμε ότι για $x \neq 0$ η $f(x) \neq -3$. Άρα, $\boxed{f(x) = -\dfrac{3(4+x^2)}{4}}$ *με $D_f = \mathbb{R}^*$.* ■

Παράδειγμα 2.1.2 *Να βρεθεί η $f(x)$ αν*

$$f(x) + f\left(\frac{x-1}{x}\right) = 1 + x, \quad x \neq 0, 1 \tag{2.1}$$

Λύση: *Έστω $t = \dfrac{x-1}{x} \Rightarrow x = \dfrac{1}{1-t}$ άρα η (2.1) γίνεται:*

$$f\left(\frac{1}{1-t}\right) + f(t) = 1 + \frac{1}{1-t} \text{ ή } f\left(\frac{1}{1-x}\right) + f(x) = 1 + \frac{1}{1-x} \tag{2.2}$$

Έστω $t = \dfrac{1}{1-x} \Rightarrow x = \dfrac{t-1}{t}$ άρα η (2.1) γίνεται:

$$f\left(\frac{t-1}{t}\right) + f\left(\frac{1}{1-t}\right) = 1 + \frac{t-1}{t} \text{ ή } f\left(\frac{x-1}{x}\right) + f\left(\frac{1}{1-x}\right) = 1 + \frac{x-1}{x} \tag{2.3}$$

Προσθέτοντας τις (2.1) + (2.2) + (2.3) *έχω:*

$$f(x)+f\left(\frac{x-1}{x}\right)+f\left(\frac{1}{1-x}\right)=\frac{1}{2}\left(3+\frac{1}{x-1}+\frac{x-1}{x}+x\right) \tag{2.4}$$

Αντικαθιστώντας στην (2.4) την (2.3) θα πάρουμε $\boxed{f(x)=\dfrac{-x^3+x^2+1}{2x(x-1)}}$. ■

2.2 Μέθοδος των αγνώστων συντελεστών

Αν είναι γνωστό ότι η ζητούμενη εξίσωση είναι δευτέρου ή τρίτου βαθμού πολυώνυμο που ικανοποιεί μερικές συνθήκες, τότε μπορούμε να υπολογίσουμε τους συντελεστές του.

Παράδειγμα 2.2.1 *Αν $f(x)$ είναι μια δευτεροβάθμια συνάρτηση έτσι ώστε $f(x+1)-f(x)=8x+3$ και $f(0)=5$, να βρεθεί.*

Λύση: *Έστω $f(x)=\alpha x^2+\beta x+\gamma$, τότε $\alpha(x+1)^2+\beta(x+1)+\gamma-\alpha x^2-\beta x-\gamma=8x+3$. Ή ισοδύναμα $2\alpha x+\alpha+\beta=8x+3 \Rightarrow \{\alpha=4,\ \beta=-1\}$. Για $x=0$ θα πάρουμε $\gamma=5$. Άρα,* $\boxed{f(x)=4x^2-x+5}$. ■

2.3 Συμμετρία

Πρόκειται για μια αισθητική μέθοδος επίλυσης. Για να φτάσεις σε συμμετρική μορφή μια συναρτησιακή εξίσωση θα απαιτηθεί μια κάποια μαθηματική ωριμότητα.

Παράδειγμα 2.3.1 *Αν $(x-y)f(x+y)-(x+y)f(x-y)=4xy(x^2-y^2)$, $\forall x\neq \pm y$ να βρείτε την $f(x)$.*

Λύση: *Η δεδομένη σχέση είναι ισοδύναμη με την*

$$\frac{f(x+y)}{x+y}-\frac{f(x-y)}{x-y}=4xy=(x+y)^2-(x-y)^2$$

$$\frac{f(x+y)}{x+y}-(x+y)^2=\frac{f(x-y)}{x-y}-(x-y)^2,\ \forall x\neq \pm y$$

Έτσι, η $\dfrac{f(x)}{x}-x^2$ είναι σταθερή. Έστω $\dfrac{f(x)}{x}-x^2=\kappa$. Επομένως, $\boxed{f(x)=x^3+\kappa\cdot x}$. ■

2.4 Αντικατάσταση

Πρόκειται για την πλέον διαδεδομένη μέθοδο. Αν μια συνάρτηση ικανοποιεί μια εξίσωση τότε η ισότητα θα παραμένει σε ισχύ για όλες τις τιμές των μεταβλητών. Μπορούμε λοιπόν να κάνουμε όλες τις απαιτούμενες αντικαταστάσεις για να πάρουμε μια ισοδύναμη εξίσωση πιο απλή ή περισσότερο χρήσιμη, κατα κάποιον τρόπο. Προσέχουμε πάντα έτσι ώστε το πεδίο ορισμού να μην επηρεάζεται.

Παράδειγμα 2.4.1 *Αν $f(x+7)=x^2-5x+2$, να βρεθεί η $f(x)$.*

Λύση: *Θέτω $y=x+7$ τότε $x=y-7$. Αντικαθιστώ στη σχέση: $f(y)=(y-7)^2+5(y-7)+2=y^2-9y+16$. Άρα,* $\boxed{f(x)=x^2-9x+16}$. ■

Παράδειγμα 2.4.2 *Αν* $f\left(\dfrac{x+1}{x}\right) = \dfrac{x^2+1}{x} + \dfrac{1}{x}$, *να βρεθεί η* $f(x)$.

Λύση: *Θέτω* $t = \dfrac{x+1}{x}$, *τότε* $x = \dfrac{1}{t-1}$. *Παρατηρείστε ότι για* $x \neq 0$ *τότε* $t \neq 1$.

$$f(t) = \frac{\left(\dfrac{1}{t-1}\right)^2 + 1}{\left(\dfrac{1}{t-1}\right)^2} + \frac{1}{\dfrac{1}{t-1}} = t^2 - t + 1$$

Άρα, $\boxed{f(x) = x^2 - x + 1}$. ■

Παράδειγμα 2.4.3 *Αν* $f(\ln x) = x^2 + x + 1$, *με* $x > 0$, *να βρεθεί η* $f(x)$.

Λύση: *Έστω* $t = \ln x$, *τότε* $x = e^t$. *Αντικαθιστώντας στην αρχική εξίσωση, έχω:*

$$f(t) = \left(e^t\right)^2 + e^t + 1$$

Έτσι, $\boxed{f(x) = e^{2x} + e^x + 1}$. ■

Γενικά, αν έχουμε $f\Big(g(x)\Big) = h(x)$ και η $g(x)$ αντιστρέφεται, τότε αντικαθιστούμε το x με το $g^{-1}(x)$ και $f(x) = h\Big(g^{-1}(x)\Big)$.

Παράδειγμα 2.4.4 *Να βρεθούν όλες οι συναρτήσεις* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *τέτοιες ώστε* $\forall\ x, y \in \mathbb{R}$

$$f(xy) = xf(x) + yf(y) \tag{2.5}$$

Λύση: *Θέτω* $x = y = 0$ *στην εξίσωση:* $f(0) = 0$. *Έστω* $x \neq 0$, *θέτω* $y = 0$ *στην εξίσωση (2.5) τότε:* $0 = f(0) = xf(x)$. *Αλλά* $x \neq 0$, *άρα* $f(x) = 0$. *Άρα, μια πιθανή λύση της εξίσωσης είναι η* $\boxed{f(x) = 0,\ \forall x \in \mathbb{R}}$. ■

Παράδειγμα 2.4.5 *Να βρεθούν όλες οι συναρτήσεις* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *τέτοιες ώστε αν* $x, y \in \mathbb{R}$,

$$f\Big(f(x) + y\Big) = f(x^2 - y) + 4f(x)y \tag{2.6}$$

1η Λύση: *Θέτω*

$$x = 0 \overset{(2.6)}{\Longrightarrow} f\Big(f(0) + y\Big) = f(-y) + 4f(0)y \tag{2.7}$$

Θα πρέπει τώρα να εφαρμόσουμε μια αντικατάσταση έτσι ώστε να απαλείψουμε πολύπλοκους όρους. Το αριστερό μέλος απλοποιείται αν θέσω:

$$y = -f(x) \overset{(2.6)}{\Longrightarrow} f(0) = f\Big(x^2 + f(x)\Big) - 4f^2(x) \tag{2.8}$$

Για να απλοποιήσουμε τον πρώτο όρο στο δεξιό μέλος θέτω

$$y = x^2 \overset{(2.6)}{\Longrightarrow} f\Big(f(x) + x^2\Big) = f(0) + 4f(x)x^2 \tag{2.9}$$

Από τις εξισώσεις (2.8) και (2.9), θα πάρω

$$4f^2(x) = f\Big(f(x) + x^2\Big) - f(0) = 4f(x) \cdot x^2 \tag{2.10}$$

Άρα, $\forall x \in \mathbb{R}$ *έχουμε* $f^2(x) = x^2 f(x)$*, η οποία για* $x = 0$ *δίνει* $f(0) = 0$*. Επομένως η (2.7) δίνει* $f(y) = f(-y)$ *που σημαίνει ότι η συνάρτηση* f *είναι άρτια. Επιπλέον, για* $x \neq 0$ *έχουμε ή* $f(x) = 0$ *ή* $f(x) = x^2$*. Θα δείξουμε τώρα ότι πρόκειται για δύο διαφορετικές ρίζες της εξίσωσης (2.6) και ποτέ ένας συνδυασμός των δύο.*

Υποθέστε λοιπόν ότι υπάρχουν δύο πραγματικοί $0 \neq \alpha \neq \beta \neq 0$ *έτσι ώστε* $f(\alpha) = 0$ *και* $f(\beta) = \beta^2$*.*

Τότε, αφού f *άρτια* $f(-\beta) = \beta^2 = (-\beta)^2$*. Για* $x = \alpha$ *και* $y = \beta$ *η (2.6) δίνει,* $\beta^2 = f(\alpha^2 - \beta)$*. Τότε* $f(\alpha^2 - \beta)$ *είναι είτε* 0 *είτε* $(\alpha^2 - \beta)^2$*.*

1. *Αν* $\underline{f(\alpha^2 - \beta) = 0}$ *τότε* $\beta = 0$*, αδύνατο.*

2. *Αν* $\underline{f(\alpha^2 - \beta) = (\alpha^2 - \beta)^2}$*, έχω* $\beta = (\alpha^2 - \beta)^2$ *ή* $\alpha^2(\alpha^2 - 2\beta) = 0$*. Επειδή* $\alpha \neq 0$*, πρέπει* $\alpha^2 = 2\beta$*. Με τα ίδια επιχειρήματα, θέτοντας* $x = \alpha$ *και* $y = -\beta$ *στην (2.6), θα πάρουμε* $\alpha^2 = -2\beta$*. Άρα,* $\alpha^2 = 2\beta$ *και* $\alpha^2 = -2\beta$ *ή* $\alpha = 0$*, αδύνατο.*

Άρα, έχουμε δεί ότι $\forall x \in \mathbb{R}$ *οι λύσεις μπορεί να είναι είτε η* $\boxed{f(x) = 0 \text{ είτε η } f(x) = x^2}$*. Εύκολα μπορείτε να επαληθεύσετε τις λύσεις.* ■

2η Λύση: *Στην πρώτη λύση είδαμε πως μπορούμε με την αντικατάσταση να απλοποιήσουμε όσο γίνεται πολύπλοκους όρους. Θα μπορούσαμε να σκεφτούμε κάτι περισσότερο χρήσιμο: μπορούμε με μια κατάλληλη αντικατάσταση να απλοποιήσουμε δύο όρους σε έναν; Ας διαλέξουμε δύο πολύπλοκους όρους: τον* $f\Big(f(x) + y\Big)$ *και* $f(x^2 - y)$*. Θα μπορούσαν να γίνουν ένας; Δηλαδή,* $f(x) + y = x^2 - y \Leftrightarrow y = \dfrac{x^2 - f(x)}{2}$*. Αν αντικαταστήσουμε με την τιμή αυτή την αρχική εξίσωση (2.6), θα πάρουμε:*

$$0 = 4f(x) \cdot \frac{x^2 - f(x)}{2} \Leftrightarrow f(x) = 0 \quad \text{ή} \quad f(x) = x^2$$

Συμπληρώστε την λύση όπως προηγουμένως. ■

Παράδειγμα 2.4.6 *Αν* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *ικανοποιεί την*

$$f\Big(x^2 + f(y)\Big) = y + xf(x), \ \forall x, y \in \mathbb{R} \tag{2.11}$$

να βρείτε την f.

Λύση: *Θέτω $x = 0$ στην (2.11), τότε*

$$f\Big(f(y)\Big) = y \tag{2.12}$$

Επομένως,

$$(2.11) \mapsto f\Big(y + xf(x)\Big) = f\Bigg(f\Big(x^2 + f(y)\Big)\Bigg) = x^2 + f(y) \tag{2.13}$$

Τώρα, θέτω $x = f(y)$ στην (2.13):

$$\begin{aligned} f^2(x) + f(y) &= f\Bigg(y + f(x)f\Big(f(x)\Big)\Bigg) \\ &\overset{(2.12)}{=} f\Big(y + xf(x)\Big) \end{aligned} \tag{2.14}$$

Από (2.13) και (2.14):

$$x^2 + f(y) = f^2(x) + f(y) \Leftrightarrow \boxed{f^2(x) = x^2} \tag{2.15}$$

Θέτω $y = f(y)$ στην (2.11):

$$f(x^2 + y) = f(y) + xf(x) \tag{2.16}$$

Αλλά, από την (2.15) έχω:

$$\begin{aligned} (x^2+y)^2 = f^2(x^2+y) &\Leftrightarrow x^4 + y^2 + 2x^2y \overset{(2.16)}{=} \Big(f(y) + xf(x)\Big)^2 \\ &\Leftrightarrow x^4 + y^2 + 2x^2y = f^2(y) + x^2f^2(x) + 2xf(x)f(y) \\ &\Leftrightarrow x^4 + y^2 + 2x^2y \overset{(2.15)}{=} y^2 + x^4 + 2xf(x)f(y) \\ &\Leftrightarrow \boxed{x \cdot y = f(x) \cdot f(y)} \end{aligned}$$

Από την (2.15) έχω $f(x) = x$ ή $f(x) = -x$.

1. *Αν $f(x) = x$ από την $x \cdot y = f(x) \cdot f(y) \Rightarrow f(x) = x, \ \forall x \in \mathbb{R}$.*
2. *Αν $f(x) = -x$ από την $x \cdot y = f(x) \cdot f(y) \Rightarrow f(x) = -x, \ \forall x \in \mathbb{R}$.*

Άρα, $\boxed{f(x) = x \text{ ή } f(x) = -x, \ \forall x \in \mathbb{R}}$. ∎

2.5 Διπλός υπολογισμός

Υπάρχουν περιπτώσεις όπου η αντικατάσταση δεν εξυπηρετεί σε τίποτα, δεν φτάνουμε να απλοποιήσουμε την αρχική εξίσωση έτσι ώστε να είναι περαιτέρω χρήσιμη. Συνήθως υπολογίζουμε μια συγκεκριμμένη ποσότητα με δύο διαφορετικούς τρόπους. Συνδυάζοντας τα αποτελέσματα παίρνουμε αρκετά συχνά νέες εξισώσεις πιο χρήσιμες από τις προηγούμενες.

Στο παρακάτω παράδειγμα η συναρτησιακή εξίσωση έχει μόνο μια ελεύθερη μεταβλητή. Τέτοιες εξισώσεις είναι γενικώς δύσκολες γιατί δεν έχουμε να κάνουμε πολλές λογικές αντικαταστάσεις.

Παράδειγμα 2.5.1 *Να βρεθούν όλες οι συναρτήσεις $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ που ικανοποιούν τις τρείς παρακάτω σχέσεις:*

1. $f(-x) = -f(x),\ \forall x \in \mathbb{R}.$
2. $f(x+1) = f(x) + 1,\ \forall x \in \mathbb{R}.$
3. $f\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{f(x)}{x^2},\ \forall x \neq 0.$

Λύση: *Από (1) έχω για* $x = 0$, $f(0) = 0$. *Από (2) για* $x = -1$ *θα πάρουμε* $f(-1) = -1$. *Ψάχνουμε τώρα μια ποσότητα που θα μπορούσε να γραφεί σαν* $\alpha + 1$ *και* $\frac{1}{\beta}$. *Υπάρχουν φυσικά πολλές περιπτώσεις, αλλά είμαστε ικανοποιημένη με την πιο απλή. Θεωρείστε την* $\frac{1}{x} + 1$ *για* $x \neq -1, 0$.

Συνδιάζοντας τις (2) και (3),

$$f\left(\frac{1}{x} + 1\right) = 1 + f\left(\frac{1}{x}\right) = 1 + \frac{f(x)}{x^2} \tag{2.17}$$

Από την (3) έχουμε επίσης:

$$f\left(\frac{1}{x} + 1\right) = f\left(\frac{1}{\frac{x}{x+1}}\right) = \frac{f\left(\frac{x}{x+1}\right)}{\big(x(x+1)\big)^2} \tag{2.18}$$

Αλλά:

$$\begin{aligned} f\left(\frac{x}{x+1}\right) &= f\left(1 + \left(-\frac{1}{x+1}\right)\right) \\ &= 1 + f\left(-\frac{1}{x+1}\right) \\ &\overset{(1)}{=} 1 - f\left(\frac{1}{x+1}\right) \\ &\overset{(3)}{=} 1 - \frac{f(x+1)}{(x+1)^2} \\ &\overset{(2)}{=} \frac{(x+1)^2 - 1 - f(x)}{(x+1)^2} \end{aligned} \tag{2.19}$$

Άρα,

$$(2) \overset{(3)}{\mapsto} f\left(\frac{1}{x} + 1\right) = \frac{(x+1)^2 - 1 - f(x)}{x^2} \tag{2.20}$$

Τότε:

$$\begin{aligned} (2.20) \quad &\overset{(3)}{\mapsto} \quad 1 + \frac{f(x)}{x^2} = \frac{(x+1)^2 - 1 - f(x)}{x^2} \\ &\Leftrightarrow \quad f(x) = x \end{aligned}$$

Επειδή οι σχέσεις $f(0) = 0$ *και* $f(-1) = -1$ *ικανοποιούνται από την* $f(x) = x$, *η συνάρτηση* $\boxed{f(x) = x}$ *είναι η ζητύμενη.* ∎

Μια άλλη ενδιαφέρουσα περίπτωση όπου ο διπλός υπολογισμός μπορεί να εφαρμοσθεί, είναι ο εξής: αν μια συναρτησιακή εξίσωση παρουσιάζει κάποιο *αμετάβλητο* σε ένα μέλος αυτό πρέπει να διατηρείται και στο άλλο. Για παράδειγμα, αν το αριστερό μέλος δεν αλλάζει αν αντικαταστήσουμε το x με το y ή αντιστρόφως, ή αν αντικαταστήσουμε το x με $-x$ ή $f(x)$. Μια σύγκριση μεταξύ παλιάς και της νέας εξίσωσης μπορεί να δώσει μια νέα εξίσωση με περισσότερες πληροφορίες.

Παράδειγμα 2.5.2 *Να βρεθούν όλες οι συναρτήσεις $f:\ \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ τέτοιες ώστε $\forall x, y \in \mathbb{R}$*

$$f\Big(x^2 + f(y)\Big) = (x-y)^2 \cdot f(x+y)$$

Λύση: *Το αριστερό μέλος της αρχικής εξίσωσης δείχνει ότι η συνάρτη είναι άρτια. Το ίδιο πρέπει να συμβαίνει και με το δεξιό. Έτσι, για $x = -x$ το δεξιό μέλος γίνεται:*

$$(x-y)^2 f(x+y) = (-x-y)^2 f(-x+y) \Leftrightarrow (x-y)^2 f(x+y) = (x+y)^2 f(y-x) \tag{2.21}$$

Είναι πολύ λογικό να αντικαταστήσετε τα x και y κατα τέτοιο τρόπο ώστε το $x+y$ να πάιρνει όλες τις τιμές ενώ το $y-x$ να είναι σταθερό. Αν σκεφτείτε έτσι δοκιμάστε με $x = \frac{1}{2}(t-1)$ και $y = \frac{1}{2}(t+1)$. Τότε, $x+y = t$ και $y-x = 1$. Άρα η (2.21) θα γίνει $1 \cdot f(t) = t^2 \cdot f(1)$ ή $f(x) = c \cdot x^2$, $c \in \mathbb{R}$. Θέτοντας το $f(x) = c \cdot x^2$ στην αρχική εξίσωση θα πάρουμε $c = 0$ και $c = -1$. Οι λύσεις λοιπόν της εξίσωσης είναι $\boxed{f(x) = 0}$ και $\boxed{f(x) = -x^2}$. ■

2.6 Πληρότητα λύσεων

Είναι ενδιαφέρον να προσπαθήστε στην αρχή της επίλυσης μιας συναρτησιακής εξίσωσης, να μαντέψετε πιθανές λύσεις. Θα σας δώσει μεγάλη έμπνευση για την στρατιγική που θα ακολουθήσετε στη συνέχεια. Είναι λογικό να αρχίσετε τις δοκιμές με σταθερές συναρτήσεις, γραμμικές ή τετραγωνικές. Το τεστ με την $f(x) = \alpha x^2 + \beta x + \gamma$ είναι πιο γενικό αλλά όχι άμεσο. Επίσης είναι καλό να δοκιμάσετε συναρτήσεις του τύπου $f(x) = \pm x^n$. Συχνά φτάνουμε στην κατάλληλη λύση και ψάχνουμε να δούμε αν είναι μοναδική. μοναδική. Να ένα παράδειγμα:

Παράδειγμα 2.6.1 *Να βρεθούν οι λύσεις $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ της συναρτησιακής εξίσωσης*

$$f(xy) + x^2 + y^2 = xy + f(x^2) + f(y^2),\ \forall x, y \in \mathbb{R} \tag{2.22}$$

1η Λύση: *Είναι εύκολο να μανέψετε ότι η $f(x) = x$ είναι μία λύση. Θα δείξουμε τώρα ότι η συναρτησιακή εξίσωση (2.22) δεν έχει άλλη λύση.*

Ας υποθέσουμε ότι έχει δύο $f_1(x)$ και $f_2(x)$. Έστω $g(x) = f_1(x) - f_2(x)$. Από την (2.22) αφαιρώντας κατα μέλη για τις f_1 και f_2, θα πάρω

$$g(xy) = g(x^2) + g(y^2),\ \forall x, y \in \mathbb{R}$$

Με $x = y = 0$ θα έχουμε $g(0) = 0$. Θέτωντας $y = 0$, $g(x^2) = 0$ ή $g(z) = 0$ για $z \geq 0$. Αν θέσουμε $y = 1$ τότε $g(x) = g(x^2) + g(1) = 0 + 0 = 0$, $\forall x \in \mathbb{R}$. Έτσι, $f_1 \equiv f_2$ και η μοναδική λύση είναι η $\boxed{f(x) = x}$. ■

Μια άλλη εκδοχή είναι να εισάγουμε νέες συναρτήσεις. Γενικά είναι πολύ εύκολο να δούμε ότι μια συναρτησιακή εξίσωση δεν έχει λύσεις σταθερές ή του τύπου $f(x) = cx$ παρά πιο σύνθετες συναρτήσεις όπως $f(x) = x^5 - 4x^2 + 1$. Είναι μερικές φορές προτημότερο να εκφράσουμε την ζητούμενη συνάρτηση/λύση με τη βοήθεια μιας άλλης απλούστερης. Να μια άλλη λύση για το προηγούμενο παράδειγμα:

2η Λύση: Έχουμε δεί όπως και προηγουμένως ότι η $f(x) = x$ είναι μια λύση. Ας δείξουμε ότι δεν υπάρχει άλλη. Εισάγουμε την $g(x) = f(x) - x$ στην αρχική και θα πάρουμε την

$$g(xy) = g(x^2) + g(y^2), \ \forall x, y \in \mathbb{R}$$

Στην πρώτη λύση είδαμε ότι η $g(x)$ είναι ταυτοτικά μηδενική. ■

2.7 Στρατηγική για συναρτήσεις $1-1$

Γμνωρίζουμε ότι μια συνάρτηση f είναι $1-1$ άν $f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2$. Σε τι μας χρησιμεύει η $1-1$ ιδιότητα της συνάρτησης;

Μία κατάσταση ιδαίτερα εύκολη είναι αυτή των παλινδρομικών συναρτήσεων. Μια συνάρτηση f λέγεται παλινδρομική αν $f\Big(f(x)\Big) = x, \ \forall x$. Τέτοιες συναρτήσεις είναι οι $f(x) = -x$ και η $f(x) = \frac{1}{x}, \ x > 0$. Οι συναρτήσεις αυτές είναι $1-1$. Το προτέρημα της $1-1$ είναι ότι μπορεί να *απλοποιήσει* τη συνάρτηση f. Από την ισότητα $f(A) = f(B)$ συνάγουμε ότι $A = B$ πράγμα που απαλοίφει ένα επίπεδο την συνάρτηση f. Ας δούμε ένα παράδειγμα:

Παράδειγμα 2.7.1 *Να βρείτε όλες τις συναρτήσεις $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, τέτοιες ώστε $\forall x, y \in \mathbb{R}$*

$$f\Big(f(x)f(y)\Big) = f(x)y$$

Λύση: *Είναι προφανής λύση η $f(x) = 0$. Ας υποθέσουμε ότι η f δεν είναι ταυτοτικά μηδενική. Ας επιλέξουμε $\alpha \in \mathbb{R}$ έτσι ώστε $f(\alpha) \neq 0$. Θέτουμε $x = \alpha$, θα πάρουμε*

$$f\Big(f(\alpha)f(y)\Big) = f(\alpha)y$$

Επίσης η f είναι $1-1$. Πράγματι, αν $f(z) = f(t)$ τότε:

$$f(\alpha)z = f\Big(f(\alpha)f(z)\Big) = f\Big(f(\alpha)f(t)\Big) = f(\alpha)t$$

επειδή $f(\alpha) \neq 0$ έχουμε $z = t$.

Θέτω στην αρχική $y = 1$ και $f\Big(f(x)f(1)\Big) = f(x) \overset{1-1}{\Rightarrow} f(x)f(1) = x$ η οποία για $x = 1$ δίνει: $f^2(1) = 1$. Άρα, $\boxed{f(x) = x \text{ ή } f(x) = -x}$. ■

2.8 Λύσεις και Σταθερά Σημεία

Ένα άλλο ενδιαφέρον σημείο στην επίλυση συναρτησιακών εξισώσεων είναι τα μηδενικά και τα σταθερά σημεία της συνάρτησης/λύσης. Ιδίως τα σταθερά σημεία *μεταφέρουν* ενδιαφέρουσες ιδιότητες της συνάρτησης. Πρώτα απ' όλα τι είναι ένα μηδενικό και ένα σταθερό μιας συνάρτησης $f : A \to A$. Ένα μηδενικό της f είναι ένα σημείο $\alpha \in A$ έτσι ώστε $f(\alpha) = 0$. Ένα σταθερό σημείο $\beta \in A$ της f είναι ένα σημείο έτσι ώστε $f(\beta) = \beta$. Ας δούμε την στρατηγική σε ένα παράδειγμα.

Παράδειγμα 2.8.1 *Έστω $A = \{x/x \in \mathbb{R} \ \wedge \ x \in [-1, +\infty)\}$. Να βρεθούν οι συναρτήσεις $f : A \to A$ έτσι ώστε:*

1. $f\Big(x+f(y)+xf(y)\Big)=y+f(x)+yf(x)$

2. *Η* $\dfrac{f(x)}{x}$ *είναι αυστηρώς αύξουσα στα* $(-1,0)$ *και* $(0,+\infty)$.

Λύση: *Θέτω στην (1)* $x=y>-1$

$$f\Big(x+f(x)+xf(x)\Big)=x+f(x)+xf(x) \tag{2.23}$$

Άρα, για κάθε $x>-1$ *το σημείο* $x+f(x)+xf(x)$ *είναι ένα σταθερό σημείο της* f. *Αν* $\alpha\neq 0$ *είναι ένα σταθερό σημείο της* f *τότε* $\dfrac{f(\alpha)}{\alpha}=1$. *Από το (2) η μονοτονία της* $\dfrac{f(x)}{x}$ *επιτρέπει το* <u>*πολύ ένα*</u> *σταθερό σημείο της* f. *Έστω* α *σημείο της* f, *θέτω* $x=y=\alpha$ *στην (2.23) και έχω:*

$$f\Big(\alpha+f(\alpha)+\alpha f(\alpha)\Big)=\alpha+f(\alpha)+\alpha f(\alpha)\Rightarrow f(2\alpha+\alpha^2)=2\alpha+\alpha^2 \tag{2.24}$$

Από την (2.24) βλέπουμε ότι και το $2\alpha+\alpha^2$ *είναι ένα σταθερό σημείο της* f.

1. *Αν* $\underline{\alpha>0}$, *τότε* $0<\alpha<2\alpha+\alpha^2$ *και συνεπώς η* f *έχει δύο σταθερά σημεία στο* $(0,+\infty)$, *αδύνατο.*

2. *Αν* $\underline{-1<\alpha<0}$, *τότε* $-1<2\alpha+\alpha^2<\alpha<0$. *Άρα ομοίως αδύνατο.*

Επομένως, το σταθερό σημείο της f *είναι το* 0*! και συνεπώς από την (2.23):*

$$x+f(x)+xf(x)=0\Leftrightarrow \boxed{f(x)=-\frac{x}{1+x}} \tag{2.25}$$

Μένει να εξετάσουμε αν η $f(x)=-\dfrac{x}{1+x}$ *ικανοποιεί τις συνθήκες (1) και (2) του προβλήματος.*

$$\begin{aligned} f\Big(x+f(y)+xf(y)\Big) &= f\left(\frac{x-y}{y+1}\right)\\ &= -\frac{x-y}{x+1}\\ &= y+f(x)+yf(x)\end{aligned}$$

Άρα, ικανοποιεί την (1). Επίσης, η $\dfrac{f(x)}{x}=-\dfrac{1}{x+1}$ *είναι γνησίως αύξουσα στο* $(-1,0)\cup(0,+\infty)$. ■

Κεφάλαιο 3

Συναρτησιακές Εξισώσεις Cauchy

Οι εξισώσεις του Cauchy είναι οι πλέον ενδιαφέρουσες συναρτησιακές εξισώσεις. Πάμπολα προβλήματα μπορεί να οδηγηθούν στις εξισώσεις αυτές που είναι οι εξής:

$$
\begin{array}{lrcl}
f:\mathbb{R}\to\mathbb{R} & f(x+y) & = & f(x)+f(y) \\
f:\mathbb{R}_{>0}\to\mathbb{R}_{>0} & f(xy) & = & f(x)f(y) \\
f:\mathbb{R}_{>0}\to\mathbb{R} & f(xy) & = & f(x)+f(y) \\
f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}_{>0} & f(x+y) & = & f(x)f(y)
\end{array}
$$

Στην πράξη χρησιμοποιούμε μόνο τις δύο πρώτες. Είναι όλες ισοδύναμες: διότι αν $x \mapsto f(x)$ είναι η λύση της πρώτης εξίσωσης, τότε οι συναρτήσεις $x \mapsto \exp\Big(f\big(\ln(x)\big)\Big)$, $x \mapsto f\Big(\ln(x)\Big)$ και $x \mapsto \exp\Big(f(x)\Big)$ είναι οι λύσεις των επομένων αντίστοιχα, όπου $\exp(x) := e^x$. Εμείς εδώ θα περιοριστούμε στη πρώτη και στη δεύτερη. Σχετικά με την πρώτη, εύκολα μπορούμε να βρούμε μια οικογένεια λύσεων, αν θεωρήσουμε για παράδειγμα την συνάρτηση $f(x) = \alpha \cdot x$, όπου $\alpha \in \mathbb{R}$ μια σταθερά. Παρ΄ όλα αυτά δεν είναι οι μόνες λύσεις της εξίσωσης. Θα επιθυμούσα να δώσω ένα παράδειγμα μη γραμμικής λύσης της εξίσωσης, αλλά είναι αδύνατο να παρουσιάσω μια τέτοια συνάρτηση. Μερικοί θα ξύνουν το κεφάλι τους και θα αναρωτιούνται πώς μπορούμε τότε γνωρίζουμε ότι υπάρχουν τέτοιες συναρτήσεις! Το πρόβλημα είναι ότι η κατασκευή τους βασίζεται σε ένα αξίωμα της θεωρίας συνόλων, το Αξίωμα Επιλογής. Αυτό το αξίωμα μας διαβεβαιώνει για την ύπαρξη τέτοιων συναρτήσεων με εξωτικά χαρακτηριστικά, αλλά δεν έχουμε τη δυνατότητα να τις δούμε διατυπωμένες αναλυτικά. Παρ΄ όλα αυτά, είναι σωστό να γνωρίζετε ότι οι γραμμικές συναρτήσεις είναι μια μειοψηφία μεταξύ όλων των λύσεων αυτής της συναρτησιακής εξίσωσης. Όπως ακριβώς οι ρητοί αριθμοί μέσα στο σύνολο των πραγματικών αριθμών. Συμπτωματικά;

3.1 Λύση της $f(x+y) = f(x) + f(y)$

Θα δείξουμε πρώτα ότι κάθε λύση της πρώτης εξίσωσης είναι γραμμική στο $\mathbb{Q}$.

Λήμμα 3.1.1 *Έστω $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ μια λύση της εξίσωσης $f(x+y) = f(x) + f(y)$. Τότε για κάθε $\rho \in \mathbb{Q}$ και $x \in \mathbb{R}$ έχουμε*

$$f(\rho \cdot x) = \rho \cdot f(x)$$

και ειδικότερα $f(\rho) = \rho \cdot f(1)$, $\forall \rho \in \mathbb{Q}$. Η δε f είναι γραμμική στο $\mathbb{Q}$.

Απόδειξη: Θέτω $x = y = 0$, τότε $f(0) = 0$. Επίσης, αν θέσω $y = -x$ τότε $f(-x) + f(x) = f(0) = 0 \Leftrightarrow f(x) = -f(-x)$, $\forall x \in \mathbb{R}$. Άρα, η f είναι περιττή.

Στη συνέχεια θα δείξω με επαγωγή στο $n \in \mathbb{N}$ ότι $f(nx) = nx$.

- Για $n = 1$, $f(x) = f(x)$ αληθές.
- Θέτω $y = nx$ στην αρχική εξίσωση. Τότε:

$$\begin{aligned} f\Big((n+1)x\Big) &= f(x+nx) \\ &= f(x) + f(nx) \\ &= f(x) + nf(x) \\ &= (n+1)f(x) \end{aligned}$$

Άρα,

$$\forall x \in \mathbb{R} \ \wedge \ n \in \mathbb{N}: \quad f(nx) = nf(x) \tag{3.1}$$

Επειδή f είναι περιττή, είναι αληθές ότι:

$$\forall x \in \mathbb{R} \ \wedge \ n \in \mathbb{Z}: \quad f(nx) = nf(x) \tag{3.2}$$

Έστω $p, q \in \mathbb{Z}$ με $q \neq 0$. Τότε:

$$\begin{aligned} q \cdot f\left(\frac{p}{q}x\right) &= f\left(q\frac{p}{q}x\right) \\ &= f(px) \\ &= pf(x) \\ &= q\frac{p}{q}f(x) \end{aligned}$$

Άρα, ισχύει

$$\forall x \in \mathbb{R} \ \wedge \ r \in \mathbb{Q}: \quad \boxed{f(rx) = rf(x)} \tag{3.3}$$

■

Θα δείξω τώρα ότι το ίδιο ισχύει για $r \in \mathbb{R}$. Αλλά η επαγωγή δεν ισχύει στο σύνολο $\mathbb{R}$! Για τον λόγο αυτό θα πρέπει να προσθέσουμε ένα προαπαιτούμενο για την συνάρτηση f. Αυτό μπορεί να είναι:

1. να είναι η f συνεχής (Cauchy) ή να είναι συνεχής σε ένα σημείο (Darboux) είτε
2. να είναι μονότονη σε κάθε διάστημα είτε
3. να είναι φραγμένη σε κάθε διάστημα.

Θα επιλέξουμε την μονοτονία, η συνέχεια χρειάζεται όρια ακολουθιών.

Θεώρημα 3.1.1 *Έστω f μονότονη συνάρτης σε κάθε διάστημα του $\mathbb{R}$ που είναι ταυτόχρονα λύση της $f(x+y) = f(x) + f(y)$. Τότε $f(x) = \alpha x$, $\forall x \in \mathbb{R}$ και α μία πραγματική σταθερά.*

Απόδειξη: Αν f είναι λύση τότε και η $-f$ είναι λύση της $f(x+y)=f(x)+f(y)$. Ας υποθέσουμε ότι η f είναι αύξουσα.

Τότε, από το Λήμμα 3.1.1, $f(r) \overset{(3.3)}{=} \alpha r,\ \forall r \in \mathbb{Q}$, όπου $\alpha = f(1) \geq f(0) = 0$. Θα δείξω με απαγωγή σε άτοπο ότι $f(x) = \alpha x,\ \forall x \in \mathbb{R}$.

Έστω

$$f(x) > \alpha x,\ x \in \mathbb{R} \tag{3.4}$$

Επιλέγω $r \in \mathbb{Q}$ ως εξής:

1. **αν** $\alpha = 0$ επιλέγω $r > x$
2. **αν** $a > 0$ επιλέγω $r \in \mathbb{Q}$ έτσι ώστε $x < r < \dfrac{f(x)}{\alpha}$.

Από την κατασκευή του α στις δύο περιπτώσεις: $f(r) = \alpha r \overset{(3.4)}{<} f(x)$. Αδύνατο αφού f είναι αύξουσα.

Ας επιλέξουμε τώρα διαφορετικά το r:

1. **αν** $\alpha = 0$ επιλέγω $r < x$
2. **αν** $a > 0$ επιλέγω $r \in \mathbb{Q}$ έτσι ώστε $\dfrac{f(x)}{\alpha} < r < x$.

θα έχουμε $f(x) < \alpha r = f(r)$. Το οποίο πάλυ είναι αδύνατο εξ αιτίας της μονοτονίας της f.

Γενικά, λοιπόν $\boxed{\forall x\mathbb{R}:\ f(x) = \alpha x, \quad \alpha \in \mathbb{R} \text{ σταθερά}}$ είναι μια λύση της $f(x+y) = f(x) + f(y)$. ■

Θεώρημα 3.1.2 *Αν $f:(0,+\infty) \to \mathbb{R}$ ικανοποιεί την $f(xy) = f(x)f(y)$, $\forall x > 0$ και f είναι μονότονη, τότε είτε $f(x) = 0$, $\forall x > 0$, είτε $\exists c \in \mathbb{R}:\ f(x) = x^c,\ \forall x > 0$.*

Απόδειξη: Για $x > 0$, $f(x) = f\Big(\sqrt{x}\cdot\sqrt{x}\Big) = f^2(\sqrt{x}) \leq 0$. Επίσης, $f(1) = f(1)f(1) \Rightarrow f(1) = 0 \ \vee\ f(1) = 1$.

1. **Αν** $f(1) = 0$, τότε $f(x) = f(x)f(1) = 0,\ \forall x > 0$.
2. **Αν** $f(1) = 1$, τότε $f(x) > 0,\ \forall x > 0$, γιατί αν $f(x) = 0$ τότε

$$f(1) = f\Big(x\frac{1}{x}\Big) = f(x)f\Big(\frac{1}{x}\Big) = 0$$

αδύνατο.

Ορίζω $g:\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ έτσι ώστε $g(x) = \ln f(e^t)$. Τότε,

$$\begin{aligned} g(x+y) &= \ln f(e^{x+y}) = \ln f(e^x \cdot e^y) \\ &= \ln\Big(f(e^x)\cdot f(e^y)\Big) \\ &= \ln f(e^x) + \ln f(e^y) \\ &= g(x) + g(y) \end{aligned}$$

Επίσης, αφού f μονότονη έτσι είναι και η g. Συνεπώς από το Θεώρημα 3.1.1,

$$g(t) = c \cdot t, \quad t \in \mathbb{R},\ c \text{ σταθερά}$$

Άρα,

$$c \cdot t = \ln f(e^t) \Leftrightarrow e^{ct} = f(e^t) \Leftrightarrow \boxed{f(x) = x^c,\ \forall x > 0}$$

■