ΕΛΛΗΝΙΚΗ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΕΤΑΙΡΕΙΑ
Πανεπιστημίου (Ελευθερίου Βενιζέλου) 34
106 79 ΑΘΗΝΑ
Τηλ. 3616532 - 3617784 - Fax: 3641025
e-mail : info@hms.gr,
www.hms.gr

GREEK MATHEMATICAL SOCIETY
34, Panepistimiou (Eleftheriou Venizelou) Street
GR. 106 79 - Athens - HELLAS
Tel. 3616532 - 3617784 - Fax: 3641025
e-mail : info@hms.gr,
www.hms.gr

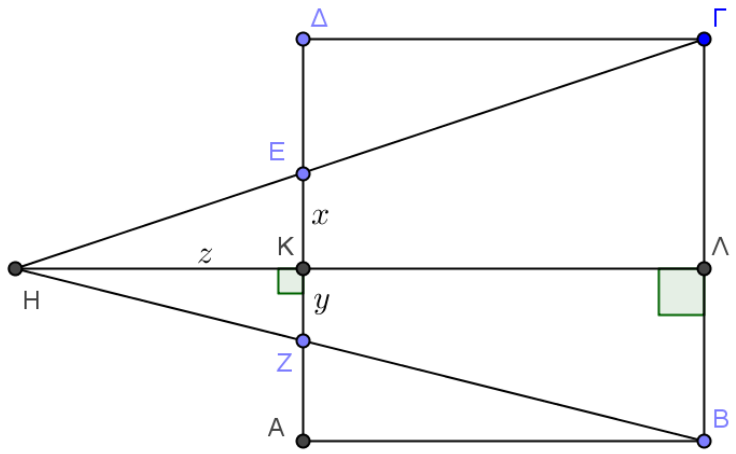
ΕΠΙΤΡΟΠΗ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΩΝ
34η Ελληνική Μαθηματική Ολυμπιάδα "Ο Αρχιμήδης"
4 Μαρτίου 2017

Θέματα μικρών τάξεων

Πρόβλημα 1

Δίνεται τετράγωνο ΑΒΓΔ πλευράς α. Πάνω στην πλευρά ΑΔ παίρνουμε σημεία Ε και Ζ τέτοια ώστε $\Delta E = \frac{\alpha}{3}$ και $AZ = \frac{\alpha}{4}$. Αν οι ευθείες ΒΖ και ΓΕ τέμνονται στο σημείο Η, να εκφράσετε το εμβαδόν του τριγώνου ΒΓΗ ως συνάρτηση του α.

Λύση (1ος τρόπος)



Σχήμα 1

Φέρνουμε το ύψος ΗΛ του τριγώνου ΒΓΗ το οποίο τέμνει κάθετα την ΑΔ στο σημείο Κ. Θέτουμε ΕΚ = x, ΚΖ = y και ΚΗ = z. Είναι ΗΛ = $\alpha + z$. Το εμβαδόν του τριγώνου ΒΓΗ είναι ίσο με

$$E = \frac{1}{2}\cdot B\Gamma \cdot H\Lambda = \frac{1}{2}\alpha(\alpha+z) \quad . \qquad (1)$$

Αρκεί να εκφράσουμε το z ως συνάρτηση του α.

Παρατηρούμε ότι τα τρίγωνα ΓΔΕ και ΕΗΚ είναι όμοια, αφού $\Gamma\hat{\Delta}E = E\hat{K}H = 90^o$ και $\Delta\hat{E}\Gamma = K\hat{E}H$ ως κατά κορυφή. Επομένως, έχουμε

$$\frac{KH}{\Gamma\Delta} = \frac{KE}{\Delta E} \Leftrightarrow \frac{z}{\alpha} = \frac{x}{\frac{\alpha}{3}} \Leftrightarrow z = 3x \qquad (2)$$

Ομοίως, τα τρίγωνα ΑΒΖ και ΖΚΗ είναι όμοια, οπότε παίρνουμε ότι

$$\frac{\mathrm{KH}}{\mathrm{AB}}=\frac{\mathrm{KZ}}{\mathrm{AZ}} \Leftrightarrow \frac{z}{\alpha}=\frac{y}{\frac{\alpha}{4}} \Leftrightarrow z=4y \quad . \tag{3}$$

Ακόμα, έχουμε ότι

$$x+y=\mathrm{A\Delta}-\mathrm{AZ}-\mathrm{\Delta E}=\alpha-\frac{\alpha}{4}-\frac{\alpha}{3}=\frac{5\alpha}{12} \tag{4}$$

Αντικαθιστώντας τις (2) και (3) στην (4) παίρνουμε

$$x+y=\frac{5\alpha}{12} \Leftrightarrow \frac{z}{3}+\frac{z}{4}=\frac{5\alpha}{12} \Leftrightarrow z=\frac{5\alpha}{7} \ ,$$

οπότε η (1) γίνεται

$$\mathrm{E}=\frac{1}{2}\alpha\left(\alpha+\frac{5\alpha}{7}\right)=\frac{12\alpha^2}{14}=\frac{6\alpha^2}{7}.$$

2^{ος} τρόπος. Από τα δεδομένα παίρνουμε ότι $\mathrm{ZE}=\alpha-\frac{\alpha}{4}-\frac{\alpha}{3}=\frac{5\alpha}{12}$. Επομένως το εμβαδόν του τραπεζίου $\mathrm{Z E \Gamma B}$ είναι:

$$(\mathrm{ZE\Gamma B})=\frac{\frac{5\alpha}{12}+\alpha}{2}\cdot a=\frac{17a^2}{24}.$$

Επιπλέον τα τρίγωνα ΖΗΕ και ΒΗΓ είναι όμοια, οπότε ο λόγος των εμβαδών τους ισούται με το τετράγωνο του λόγου της ομοιότητας αυτών, δηλαδή

$$\frac{(\mathrm{BH\Gamma})}{(\mathrm{ZHE})}=\left(\frac{\mathrm{B\Gamma}}{\mathrm{ZE}}\right)^2=\left(\frac{\alpha}{5\alpha/12}\right)^2=\left(\frac{12}{5}\right)^2.$$

Επομένως, έχουμε

$$\frac{(\mathrm{BH\Gamma})}{(\mathrm{BH\Gamma})-(\mathrm{BZE\Gamma})}=\left(\frac{12}{5}\right)^2 \Leftrightarrow \frac{(\mathrm{BH\Gamma})}{(\mathrm{BH\Gamma})-\frac{17\alpha^2}{24}}=\left(\frac{12}{5}\right)^2$$

και λύνοντας ως προς $(\mathrm{BH\Gamma})$ παίρνουμε ότι $(\mathrm{BH\Gamma})=\frac{6\alpha^2}{7}$.

Πρόβλημα 2

Αν x, y, z θετικοί πραγματικοί αριθμοί, να λύσετε το σύστημα:

$$\{x(6-y)=9,\ y(6-z)=9,\ z(6-x)=9\}..$$

Λύση (1^{ος} τρόπος)

Επειδή είναι $x, y, z>0$, από τις δεδομένες εξισώσεις προκύπτει ότι

$$0<x<6,\ 0<y<6,\ 0<z<6.$$

Με πολλαπλασιασμό κατά μέλη των τριών εξισώσεων λαμβάνουμε:

$$xyz(6-x)(6-y)(6-z)=9^3 \Leftrightarrow x(6-x)y(6-y)z(6-z)=9^3. \tag{1}$$

Όμως ισχύει ότι

$$0<x(6-x)=6x-x^2=9-(3-x)^2\leq 9. \tag{2}$$

Η ισότητα ισχύει για $x=3$. Ομοίως ισχύουν και οι σχέσεις

$$0\leq y(6-y)\leq 9 \tag{3}$$

$$0 \le z(6-z) \le 9 \qquad (4)$$

Με πολλαπλασιασμό κατά μέλη των (2), (3) και (4), λαμβάνουμε

$$0 < x(6-x)y(6-y)z(6-z) \le 9^3, \qquad (5)$$

οπότε σε σύγκριση με την (1) προκύπτει ότι οι σχέσεις (2), (3) και (4) πρέπει να ισχύουν ως ισότητες, δηλαδή $x = y = z = 3$.

Εναλλακτικά οι σχέσεις (2) , (3) και (4) μπορούν να προκύψουν με εφαρμογή της ανισότητας αριθμητικού – γεωμετρικού μέσου. Για παράδειγμα, αφού $x, 6-x > 0$, έχουμε

$$0 < \sqrt{x(6-x)} \le \frac{x+6-x}{2} = 3 \Rightarrow 0 < x(6-x) \le 9.$$

2^ος^ τρόπος: Επειδή είναι $x, y, z > 0$, από τις δεδομένες εξισώσεις προκύπτει ότι

$$0 < x < 6,\ 0 < y < 6,\ 0 < z < 6.$$

Από τους τρεις αριθμούς κάποιος είναι ο μικρότερος, έστω $x \le y$ και $x \le z$. Τότε έχουμε

$$9 = x(6-y) \le x(6-x) \le z(6-x) = 9,$$

οπότε έπεται ότι

$$x(6-x) = 9 \Leftrightarrow x^2 - 6x + 9 = 0 \Leftrightarrow (x-3)^2 = 0 \Leftrightarrow x = 3.$$

Αντικαθιστώντας στην πρώτη και στην τελευταία σχέση βρίσκουμε ότι $y = 3$ και $z = 3$.

Πρόβλημα 3

Να προσδιορίσετε όλους τους θετικούς ακέραιους $a, b, p,$ όπου p πρώτος, που είναι λύσεις της εξίσωσης

$$\frac{1}{p} = \frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2}.$$

Λύση

Η δεδομένη εξίσωση είναι ισοδύναμη με την εξίσωση

$$p\left(a^2 + b^2\right) = a^2 b^2 \qquad (1)$$

Επειδή p πρώτος, από την (1) προκύπτει ότι: $p \mid a$ ή $p \mid b$.

Υποθέτουμε ότι $p \mid a$, οπότε $a = pa_1, a_1 \in \mathbb{N}^*$.

Επιπλέον, έχουμε ότι

$$\frac{1}{p} > \frac{1}{b^2} \Rightarrow b^2 > p \Rightarrow b^2 \ge p+1 \Rightarrow \frac{1}{a^2} = \frac{1}{p} - \frac{1}{b^2} \ge \frac{1}{p} - \frac{1}{p+1} = \frac{1}{p(p+1)}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{p^2 a_1^2} \ge \frac{1}{p(p+1)} = \frac{1}{p^2+p} \ge \frac{1}{2p^2} \Rightarrow \frac{1}{a_1^2} \ge \frac{1}{2} \Rightarrow a_1^2 \le 2 \Rightarrow a_1 = 1 \Rightarrow a = p.$$

Τότε η εξίσωση (1) γίνεται:

$$p\left(p^2 + b^2\right) = p^2 b^2 \Leftrightarrow p^2 + b^2 = pb^2 \Leftrightarrow p^2 = (p-1)b^2 \Leftrightarrow p^2 - 1 = (p-1)b^2 - 1$$

$$\Leftrightarrow (p-1)(p+1) = (p-1)b^2 - 1 \Rightarrow (p-1) \mid 1 \overset{p-1>0}{\Longleftrightarrow} p-1 = 1 \Leftrightarrow p = 2.$$

Επομένως, έχουμε $a = p = 2$ και από την εξίσωση (1) προκύπτει ότι $b = 2$.

Ομοίως εργαζόμαστε, αν υποθέσουμε ότι $p \mid b.$

2^ος^ τρόπος. Η δεδομένη εξίσωση είναι ισοδύναμη με την εξίσωση

$$p\left(a^2+b^2\right)=a^2b^2 \qquad (1)$$

Λύνοντας ως προς a^2 έχουμε ότι

$$a^2=\frac{pb^2}{b^2-p}=\frac{p(b^2-p)+p^2}{b^2-p}=p+\frac{p^2}{b^2-p}. \qquad (2)$$

Αφού ο a^2 είναι ακέραιος, θα πρέπει $b^2-p \mid p^2$, επομένως

$$b^2-p=1, \quad ή \quad b^2-p=p, \quad ή \quad b^2-p=p^2.$$

Στην πρώτη περίπτωση έχουμε ότι, $b^2-p=1 \Leftrightarrow p=b^2-1=(b-1)(b+1)$ και αφού p πρώτος, θα πρέπει $b-1=1$, άρα $b=2$ και $p=3$. Τότε είναι $a^2=12$, άτοπο.

Στη δεύτερη περίπτωση έχουμε ότι $b^2=2p$. Τότε b άρτιος, έστω $b=2b_1$, οπότε $4b_1^2=2p$, άρα $2\mid p$, άρα και πάλι $p=2$ και $b=2$, οπότε και $a=2$.

Στην τρίτη περίπτωση η (2) δίνει $a^2=p+1 \Leftrightarrow p=a^2-1=(a-1)(a+1)$, οπότε αφού p πρώτος, θα πρέπει $a-1=1$, άρα $a=2$ και $p=3$, οπότε προκύπτει $b^2=3$, άτοπο.

Πρόβλημα 4.

Μία παρέα που αποτελείται από n άτομα παίζει ένα επιτραπέζιο παιχνίδι με τους εξής κανόνες.

(α) Σε κάθε γύρο του παιχνιδιού παίζουν ακριβώς 3 άτομα

(β) Το παιχνίδι ολοκληρώνεται μετά από n γύρους

(γ) Κάθε δυάδα παικτών έχει παίξει μαζί σε τουλάχιστον ένα γύρο.

Να προσδιορίσετε τη μεγαλύτερη δυνατή τιμή του n.

Λύση

Αφού σε κάθε γύρο του παιχνιδιού παίζουν ακριβώς 3 άτομα, το πλήθος των δυάδων σε κάθε γύρο είναι $\binom{3}{2}=3$. Επομένως όταν το παιχνίδι ολοκληρωθεί μετά από n γύρους, θα έχουν παίξει μαζί $3n$ δυάδες ατόμων. Για να ικανοποιείται η τελευταία συνθήκη και να παίξουν όλες οι δυάδες παικτών, πρέπει το $3n$ να είναι μεγαλύτερο ή ίσο από το συνολικό πλήθος των δυάδων, που είναι $\binom{n}{2}$. Δηλαδή, πρέπει:

$$\binom{n}{2}\le 3n \Leftrightarrow \frac{n(n-1)}{2}\le 3n \Leftrightarrow \frac{n-1}{2}\le 3 \Leftrightarrow n\le 7.$$

Στη συνέχεια θα αποδείξουμε ότι η τιμή $n=7$ είναι η μεγαλύτερη δυνατή, αφού ικανοποιεί τους κανόνες του προβλήματος. Πράγματι, για $n=7$ είναι

$$\binom{7}{2}=\frac{7!}{2!\cdot 5!}=\frac{6\cdot 7}{2}=21=3\cdot 7$$

και αν υποθέσουμε ότι τα επτά μέλη της παρέας είναι οι : Α,Β,.Γ,Δ,Ε,Ζ,Η, τότε είναι δυνατόν να ορίσουμε επτά τριάδες που θα παίξουν στους επτά γύρους που πρέπει να γίνουν, έτσι ώστε όλα τα μέλη της παρέας ανά δύο να έχουν παίξει ένα παιγνίδι σε ένα τουλάχιστον γύρο. Μία τέτοια περίπτωση δίνουν οι τριάδες:

(Α, Β, Γ), (Α, Δ, Ε), (Α, Ζ, Η), (Β, Δ, Η), (Β, Ε, Ζ), (Γ, Δ, Ζ), (Γ, Ε, Η).

ΕΛΛΗΝΙΚΗ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΕΤΑΙΡΕΙΑ
Πανεπιστημίου (Ελευθερίου Βενιζέλου) 34
106 79 ΑΘΗΝΑ
Τηλ. 3616532 - 3617784 - Fax: 3641025
e-mail : info@hms.gr
www.hms.gr

GREEK MATHEMATICAL SOCIETY
34, Panepistimiou (Eleftheriou Venizelou) Street
GR. 106 79 - Athens - HELLAS
Tel. 3616532 - 3617784 - Fax: 3641025
e-mail : info@hms.gr
www.hms.gr

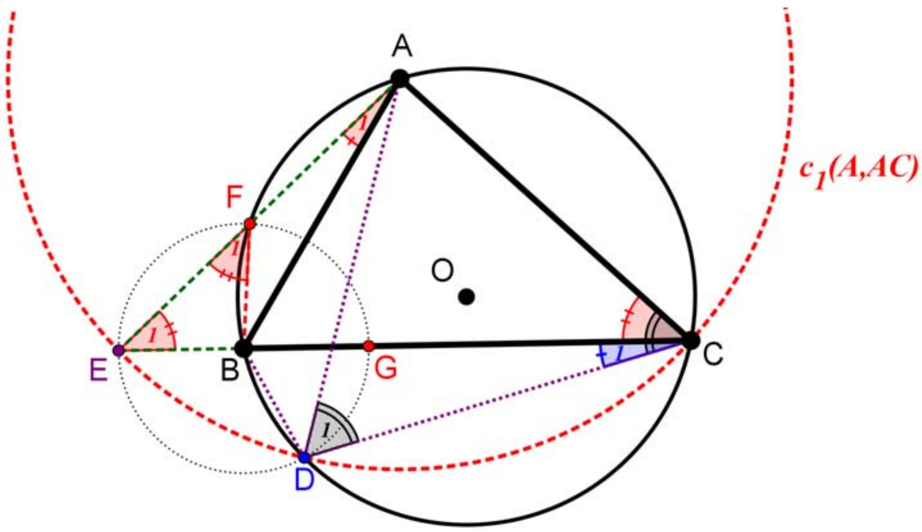
ΕΠΙΤΡΟΠΗ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΩΝ
34η Ελληνική Μαθηματική Ολυμπιάδα "Ο Αρχιμήδης"
4 Μαρτίου 2017

Θέματα μεγάλων τάξεων

Πρόβλημα 1

Δίνεται οξυγώνιο τρίγωνο ABC με AB < AC < BC, εγγεγραμμένο σε κύκλο c(O,R). Ο κύκλος $c_1(\mathrm{A},\mathrm{AC})$ τέμνει τον κύκλο c(O,R) στο σημείο D και την προέκταση της πλευράς CB στο σημείο E. Αν η ευθεία AE τέμνει τον κύκλο c(O,R) στο σημείο F και G είναι το συμμετρικό του E ως προς το B, να αποδείξετε ότι το τετράπλευρο FEDG είναι εγγράψιμο.

Λύση (1ος τρόπος)



Σχήμα 1

Το τετράπλευρο AFBC είναι εγγεγραμμένο στον κύκλο (c), άρα: $\hat{\mathrm{F}}_1 = \mathrm{A}\hat{\mathrm{C}}\mathrm{B} = \hat{\mathrm{C}}$.

Το τρίγωνο AEC είναι ισοσκελές (οι AE και AC είναι ακτίνες του κύκλου (c_1)) άρα:

$$\hat{\mathrm{E}}_1 = \mathrm{A}\hat{\mathrm{C}}\mathrm{B} = \hat{\mathrm{C}} \quad .$$

Από τις ισότητες των γωνιών προκύπτει ότι $\hat{\mathrm{F}}_1 = \hat{\mathrm{E}}_1$, οπότε το τρίγωνο BEF είναι ισοσκελές και κατά συνέπεια:

$$\mathrm{BE=BF} \qquad (1).$$

Ονομάζουμε $\hat{\mathrm{C}}_1 = x$ και από τον κύκλο (c_1) θα έχουμε ότι $\mathrm{E}\hat{\mathrm{A}}\mathrm{D} = 2x$, (ως επίκεντρη), οπότε

$$\mathrm{E}\hat{\mathrm{A}}\mathrm{B}+\mathrm{B}\hat{\mathrm{A}}\mathrm{D}=2x \qquad (2)$$

Επιπλέον, από τον κύκλο (c) έχουμε ότι:

$$\mathrm{B}\hat{\mathrm{A}}\mathrm{D}=\hat{\mathrm{C}}_1=x \qquad (3)$$

Από τις (2) και (3) έχουμε ότι $\mathrm{E}\hat{\mathrm{A}}\mathrm{B}=\mathrm{B}\hat{\mathrm{A}}\mathrm{D}=x$, οπότε η AB είναι διχοτόμος στο ισοσκελές τρίγωνο EAD. Συνεπώς είναι μεσοκάθετος της ED, άρα

$$\mathrm{BE}=\mathrm{BD}. \qquad (4)$$

Από τις ισότητες (1) και (4), καθώς και από την προφανή (λόγω συμμετρίας) ισότητα BE=BG , συμπεραίνουμε ότι BE = BF = BG = BD, οπότε το τετράπλευρο DEFG είναι εγγράψιμο σε κύκλο με κέντρο το B.

2ος τρόπος. Το τετράπλευρο AFBC είναι εγγεγραμμένο στον κύκλο (c), άρα:

$$\hat{\mathrm{F}}_1=\mathrm{A}\hat{\mathrm{C}}\mathrm{B}=\hat{\mathrm{C}}.$$

Το τρίγωνο AEC είναι ισοσκελές (οι AE και AC είναι ακτίνες του κύκλου (c_2)) άρα:

$$\hat{\mathrm{E}}_1=\mathrm{A}\hat{\mathrm{C}}\mathrm{B}=\hat{\mathrm{C}}.$$

Από τις ισότητες των γωνιών προκύπτει ότι $\hat{\mathrm{F}}_1=\hat{\mathrm{E}}_1$, οπότε το τρίγωνο BEF είναι ισοσκελές και κατά συνέπεια:

$$\mathrm{BE}=\mathrm{BF} \qquad (5).$$

Από το εγγεγραμμένο τετράπλευρο ABDC έχουμε: $\hat{\mathrm{D}}_1=\mathrm{A}\hat{\mathrm{B}}\mathrm{C}=\hat{\mathrm{B}}$. Από το ισοσκελές τρίγωνο ADC έχουμε: $\hat{\mathrm{D}}_1=\mathrm{A}\hat{\mathrm{C}}\mathrm{D}$ Από τις δύο τελευταίες ισότητες γωνιών, έχουμε ότι $\mathrm{A}\hat{\mathrm{C}}\mathrm{D}=\hat{\mathrm{B}}$ και κατά συνέπεια

$$\hat{\mathrm{C}}_1=\hat{\mathrm{B}}-\hat{\mathrm{C}} \quad .$$

Από το τρίγωνο ABE έχουμε: $\hat{\mathrm{A}}_1=\hat{\mathrm{B}}-\hat{\mathrm{E}}_1=\hat{\mathrm{B}}-\hat{\mathrm{C}}$, οπότε: $\hat{\mathrm{A}}_1=\hat{\mathrm{C}}_1=\hat{\mathrm{B}}-\hat{\mathrm{C}}$ και επειδή οι γωνίες $\hat{\mathrm{A}}_1,\hat{\mathrm{C}}_1$ είναι εγγεγραμμένες στον κύκλο (c), θα ισχύει:

$$\mathrm{BD}=\mathrm{BF} \qquad (6).$$

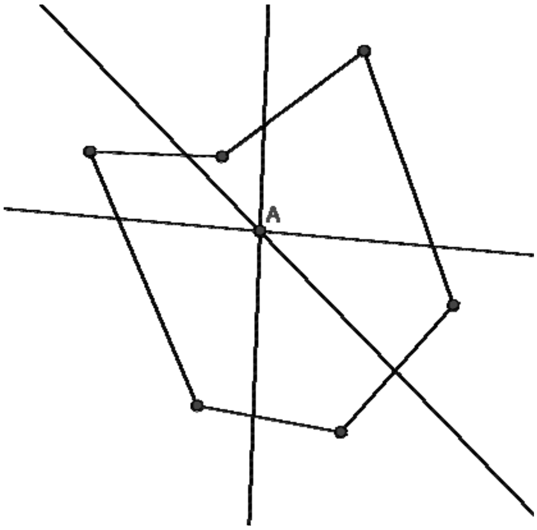
Από τις ισότητες (5) και (6), καθώς και από την προφανή (λόγω συμμετρίας) ισότητα BE=BG , συμπεραίνουμε ότι BE = BF = BG = BD, οπότε το τετράπλευρο DEFG είναι εγγράψιμο σε κύκλο με κέντρο το B.

Πρόβλημα 2

Θεωρούμε σημείο A του επιπέδου και τρεις ευθείες που περνούν από αυτό και χωρίζουν το επίπεδο σε 6 τομείς. Σε κάθε τομέα υπάρχουν στο εσωτερικό του 5 σημεία. Υποθέτουμε ότι τα 30 σημεία που βρίσκονται στους 6 τομείς είναι ανά τρία μη συνευθειακά. Να αποδείξετε ότι υπάρχουν τουλάχιστον 1000 τρίγωνα με κορυφές τα σημεία αυτά (των 6 τομέων) το οποία περιέχουν το A είτε στο εσωτερικό τους είτε στις πλευρές τους.

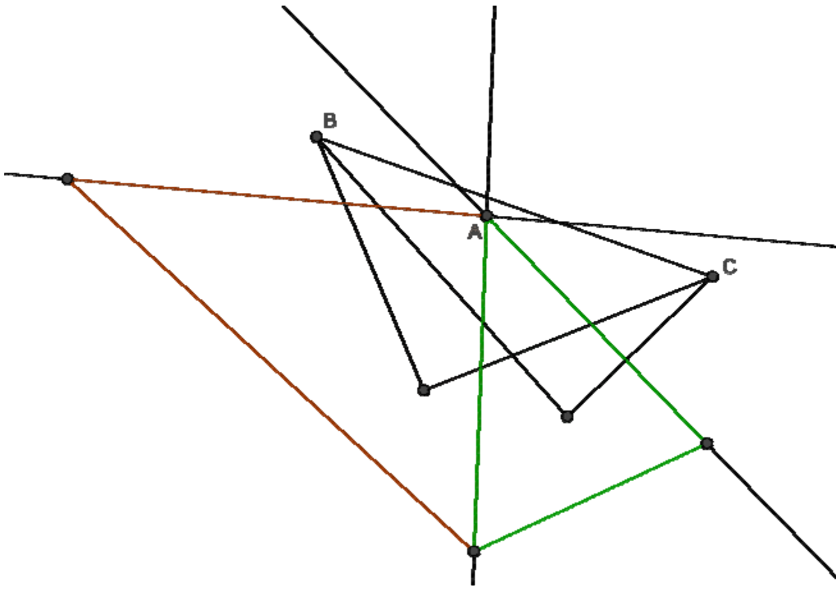
Λύση

Παρατηρούμε αρχικά ότι οποιαδήποτε για οποιαδήποτε επιλογή 6 σημείων, ένα από κάθε τομέα, δημιουργείται ένα εξάγωνο (κυρτό ή μη κυρτό) το οποίο περιέχει το σημείο A.



Σχήμα 2

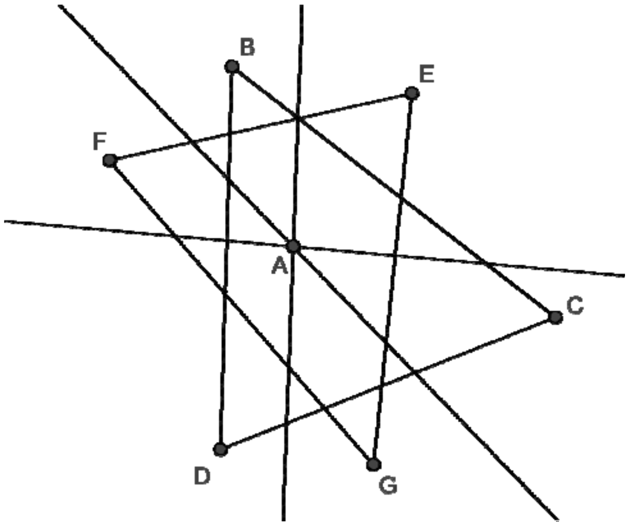
Από τα 6 αυτά σημεία δημιουργούνται $\binom{6}{3} = 20$ τρίγωνα σε σύνολο. Θα υπολογίσουμε πόσα τουλάχιστον από αυτά περιέχουν το σημείο A. Αν έχω δύο σημεία από κατά κορυφή τομείς, τότε παρατηρώ ότι έχω επιλογή για την τρίτη κορυφή του τριγώνου από δύο τομείς. Για παράδειγμα, για τα σημεία B, C του παρακάτω σχήματος, όποιο σημείο και πάρουμε από τον κόκκινο ή τον πράσινο τομέα έχουμε τρίγωνο που περιέχει το σημείο A.



Σχήμα 3

Υπάρχουν 3 ζεύγη κατά κορυφή τομέων, επομένως και έχουμε $5 \cdot 5$ επιλογές για τη βάση BC και η τρίτη κορυφή επιλέγεται με $2 \cdot 5$ τρόπους. Επομένως έχουμε συνολικά τουλάχιστον $3 \cdot 2 \cdot 5^3 = 6 \cdot 5^3$ τέτοια τρίγωνα που περιέχουν το A .

Αν τώρα έχω κορυφές σε εναλλάξ τομείς (όπως φαίνεται παρακάτω), τότε πάλι έχω τρίγωνο που περιέχει το σημείο A. Αυτά μπορεί να είναι είτε σαν το CBD είτε σαν το EFG.



Σχήμα 4

Σαν το CBD υπάρχουν $5\cdot 5\cdot 5=5^3$ τρίγωνα που περιέχουν το σημείο A και σαν το EFG υπάρχουν επίσης $5\cdot 5\cdot 5=5^3$ τρίγωνα που περιέχουν το σημείο A. Συνολικά σε αυτή την περίπτωση έχουμε $2\cdot 5^3$ τρίγωνα που περιέχουν το σημείο A.

Αθροίζοντας, έχουμε τουλάχιστον $6\cdot 5^3+2\cdot 5^3=8\cdot 5^3=1000$ τρίγωνα τα οποία περιέχουν το A είτε στο εσωτερικό τους είτε πάνω στις πλευρές τους.

Πρόβλημα 3

Να βρεθούν όλες οι τριάδες ακεραίων (a,b,c) με $a>0>b>c,$ που έχουν άθροισμα ίσο με μηδέν και ο αριθμός $\mathrm{N}=2017-a^3b-b^3c-c^3a$ είναι τέλειο τετράγωνο ακεραίου.

Λύση

Αφού $a+b+c=0$, έχουμε ότι

$$a^3b+b^3c+c^3a=a^3b+b^3(-a-b)+(-a-b)^3a=-b^4-2b^3a-3a^2b^2-2a^3b-a^4=$$
$$=-(a^2+ab+b^2)^2 \qquad (1)$$

Επομένως, αν $2017-a^3b-b^3c-c^3a=k^2$, τότε

$$2017+(a^2+ab+b^2)^2=k^2 \Leftrightarrow (k-a^2-ab-b^2)(k+a^2+ab+b^2)=2017 \qquad (2)$$

Αφού ο 2017 είναι πρώτος, θα πρέπει

$$\begin{cases}k-a^2-ab-b^2=1\\ k+a^2+ab+b^2=2017\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}k-a^2-ab-b^2=1\\ 2k=2018\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}a^2+ab+b^2=1008\\ k=1009\end{cases} \qquad (3)$$

Για να ισχύει

$$a^2+ab+b^2=1008 \qquad (4)$$

πρέπει οι a,b να είναι και οι δύο άρτιοι, διαφορετικά, το αριστερό μέλος είναι περιττός. Επιπλέον, έχουμε ότι $9\,|\,1008$, άρα $9\,|\,a^2+ab+b^2$, οπότε πρέπει $3\,|\,a$ και $3\,|\,b$. Επομένως. οι a,b διαιρούνται από 6, οπότε γράφουμε $a=6m$ και $b=6n$, οπότε η (1) γίνεται

$$m^2+mn+n^2=28 \qquad (5)$$

Ομοίως, οι m,n πρέπει να είναι άρτιοι, οπότε $m=2x$ και $n=2y$. Τότε η (7) γίνεται

$$x^2+xy+y^2=7 \qquad (6)$$

Για να έχει ακέραιες λύσεις η τελευταία πρέπει η διακρίνουσα ως προς y να είναι μη αρνητική και τέλειο τετράγωνο. Όμως $\Delta=x^2-4(x^2-7)=28-3x^2$, οπότε:

$$x^2=1 \text{ ή } x^2=4 \text{ ή } x^2=9.$$

Επειδή, $a>0$ θα έχουμε $x>0$, οπότε $x\in\{1,2,3\}$. Επειδή $y<0$, παίρνουμε τα ζεύγη $(x,y)\in\{(1,-3),(2,-3),(3,-2),(3,-1)\}$, οπότε, αφού $a=12x,\ b=12y$ έχουμε ότι

$$(a,b)\in\{(12,-36),\ (24,-36,\ ),\ (36,-24),(36,-12)\}$$

Λόγω του ότι $a+b+c=0$ και του περιορισμού $a>0>b>c$, έχουμε τη μοναδική λύση

$$(a,b,c)=(36,-12,-24).$$

Πρόβλημα 4. Έστω ξ η θετική ρίζα της εξίσωσης $x^2+x-4=0$. Το πολυώνυμο $P(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\ldots+a_1x+a_0$, όπου n θετικός ακέραιος, έχει συντελεστές μη αρνητικούς ακέραιους και αριθμητική τιμή $P(\xi)=2017$.

(i) Να αποδείξετε ότι: $a_0+a_1+\ldots+a_n\equiv 1\pmod 2$

(ii) Να βρείτε την ελάχιστη δυνατή τιμή του αθροίσματος: $a_0+a_1+\ldots+a_n$.

Λύση

(i) Επειδή ο αριθμός $\xi=\dfrac{-1+\sqrt{17}}{2}$ είναι άρρητος και το πολυώνυμο $F(x)=P(x)-2017$ έχει ρητούς συντελεστές και ρίζα τον αριθμό ξ, θα έχει ρίζα και τον συζυγή του $\dfrac{-1-\sqrt{17}}{2}$, οπότε θα διαιρείται με το πολυώνυμο $\varphi(x)=x^2+x-4$.

Αυτό προκύπτει άμεσα από την ταυτότητα της διαίρεσης

$$F(x)=P(x)-2017=(x^2+x-4)Q(x)+\kappa x+\lambda,$$

Από την οποία για $x=\xi$ λαμβάνουμε $\kappa\xi+\lambda=0$, από την οποία προκύπτει ότι $\kappa=\lambda=0,$ αφού ο αριθμός ξ είναι άρρητος.

Άρα υπάρχει πολυώνυμο $Q(x)$ τέτοιο ώστε:

$$F(x)=P(x)-2017=(x^2+x-4)Q(x)$$

$$\Leftrightarrow a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\ldots+a_1x+a_0-2017=(x^2+x-4)Q(x) \qquad (1)$$

Από τη σχέση (1) για $x=1$ λαμβάνουμε:

$$a_0+a_1+\ldots+a_n-2017=-2Q(1)$$
$$\Rightarrow a_0+a_1+\ldots+a_n=2017-2Q(1)\equiv 1(\bmod 2)$$

(ii) Θεωρούμε το σύνολο $\{a_0,a_1,\ldots,a_n\}$ με στοιχεία μη αρνητικούς ακέραιους που ικανοποιούν τα παρακάτω:

(α) $a_n\xi^n+a_{n-1}\xi^{n-1}+\ldots+a_1\xi+a_0=2017$

(β) το άθροισμα $a_0+a_1+\ldots+a_n$ είναι το ελάχιστο δυνατό.

Παρατηρούμε πρώτα ότι αληθεύει η σχέση:

$$0\le a_i\le 3,\text{ για κάθε } i=1,2,\ldots,n-2.$$

Πράγματι, αν ήταν διαφορετικά για κάποιο $i=1,2,\ldots,n-2$, τότε το σύνολο

$$\{a_0,\ldots,a_{i-1},a_i-4,a_{i+1}+1,a_{i+2}+1,a_{i+3},\ldots a_n\}$$

θα είχε στοιχεία μη αρνητικούς ακέραιους, θα ικανοποιούσε τη σχέση (α), ενώ θα είχε άθροισμα στοιχείων μικρότερο από αυτό του συνόλου $\{a_0,\ a_1,\ldots,a_n\}$, που είναι άτοπο.

Έστω τώρα $Q(x)=b_{n-2}x^{n-2}+b_{n-1}x^{n-1}+\ldots+b_1x+b_0$. Τότε από την ταυτότητα

$$a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\ldots+a_1x+a_0-2017=\left(x^2+x-4\right)\left(b_{n-2}x^{n-2}+b_{n-3}x^{n-3}+\ldots+b_1x+b_0\right)$$

προκύπτουν οι ισότητες:

$$\left\{\begin{array}{ll}
a_0-2017=-4b_0 & \\
a_1 & =-4b_1+b_0\\
a_2 & =-4b_2+b_1+b_0\\
a_3 & =-4b_3+b_2+b_1\\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & \\
a_{n-2} & =-4b_{n-2}+b_{n-3}+b_{n-4}\\
a_{n-1} & =b_{n-2}+b_{n-3}\\
a_n & =b_{n-2}
\end{array}\right\}\Leftrightarrow\left\{\begin{array}{ll}
a_0-2017 & =-4b_0\\
a_1-b_0 & =-4b_1\\
a_2-b_1-b_0 & =-4b_2\\
a_3-b_2-b_1 & =-4b_3\\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & \\
a_{n-2}-b_{n-3}-b_{n-4} & =-4b_{n-2}\\
a_{n-1}-b_{n-2} & =b_{n-3}\\
a_n & =b_{n-2}
\end{array}\right\}$$

Γενικά ισχύει ότι: $a_{i+2}-b_{i+1}-b_i=-4b_{i+2}$, για κάθε $i=0,1,\ldots,n-4$

Επειδή είναι $0\le a_i\le 3$, για κάθε $i=1,2,\ldots,n-2,$ από την πρώτη εξίσωση από τις παραπάνω προκύπτει ότι $a_0=1$ και $b_0=504$. Από τη δεύτερη εξίσωση λαμβάνουμε $a_1=0$ και $b_1=126$. Από την τρίτη εξίσωση λαμβάνουμε $a_2=2$ και $b_2=157$. Συνεχίζοντας ομοίως λαμβάνουμε τα σύνολα

$$\{b_0,b_1,b_2,\ldots b_{14}\}=\{504,126,157,70,56,31,21,13,8,5,3,2,1,0,0\}$$
$$\{a_0,a_1,a_2,\ldots a_{14}\}=\{1,\ 0,\ 2,\ 3,\ 3,\ 2,\ 3,\ 0,\ 2,\ 1,\ 1,\ 0,\ 1,\ 3,\ 1\}$$

Επομένως η ελάχιστη δυνατή τιμή του αθροίσματος $a_0+a_1+\ldots+a_n$ είναι **23.**