Π. ΓΕΛ Βαρβακείου και Ευαγγελικής Σχολής

ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΑ

ΣΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ Γ ΚΑΤ/ΝΣΗΣ

Για την συγγραφή Λυγάτσικας Ζ.

18 Δεκεμβρίου 2016

Διάρκεια: 3 διδακτικές ώρες

ΘΕΜΑ 1ο

1. Για τη συνέχεια οι αριθμοί $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ είναι πραγματικοί. Να διαπιστώσετε αν οι παρακάτω προτάσεις είναι σωστές ή όχι **αιτιολογώντας την επιλογή σας όταν δώσετε καταφατική απάντηση ή δίνοντας ένα αντι-παράδειγμα σε αντίθετη περίπτωση**:

   (α΄) Αν η συνάρτηση f είναι συνεχής στο διάστημα $[\alpha, \beta]$, η f θα πάρει μία φορά και μόνο μία όλες τις τιμές μεταξύ $f(\alpha)$ και $f(\beta)$.

   (β΄) Η εικόνα ενός διαστήματος Δ μέσω μιας συνεχούς συνάρτησης f είναι διάστημα.

   (γ΄) Η εικόνα ενός διαστήματος (α, β) μέσω μιας συνεχούς συνάρτησης είναι διάστημα της μορφής (γ, δ).

   (δ΄) Αν η εικόνα του $[\alpha, \beta]$ μέσω μιας συνάρτησης είναι διάστημα, τότε η συνάρτηση είναι συνεχής στο $[\alpha, \beta]$.

   (ε΄) Αν $f,\ g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ δύο συναρτήσεις έτσι ώστε $\lim\limits_{x\to\alpha} g(x) = \beta$ και $\lim\limits_{x\to\beta} f(x) = \gamma$, με $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$, τότε $\lim\limits_{x\to\alpha} f\Big(g(x)\Big) = \gamma$.

Μονάδες 3+3+3+3+5=17

2. Έστω συνάρτηση $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ με $f(x) = |x|$. Να βρεθούν:

   (α΄) $f\Big([-1, 1]\Big)$

   (β΄) $f^{-1}\Big([-1, 0)\Big)$

   (γ΄) $f^{-1}\Bigg(f\Big([0, 1]\Big)\Bigg)$

Μονάδες 2+3+3=8

ΘΕΜΑ 2ο

1. Να διαπιστώσετε αν οι παρακάτω προτάσεις είναι σωστές ή όχι **αιτιολογώντας την επιλογή σας όταν δώσετε καταφατική απάντηση ή δίνοντας ένα αντιπαράδειγμα σε αντίθετη περίπτωση**:

   (α΄) Αν μια συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα και θετική στο $(0, +\infty)$ τότε $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$.

   (β΄) Αν μια συνάρτηση f έχει το 0 για όριο όταν $x \to +\infty$, τότε όταν το x αυξάνεται απεριόριστα οι εικόνες $f(x)$ έχουν το ίδιο πρόσημο.

   (γ΄) Αν f έχει όριο το -1 για $x \to +\infty$, τότε όταν το x αυξάνεται απεριόριστα οι εικόνες $f(x)$ έχουν το ίδιο πρόσημο.

Μονάδες 2+3+4=9

2. Να βρεθούν συναρτήσεις f, g, h και t έτσι ώστε όλες να τείνουν στο $+\infty$ όταν $x \to +\infty$, και:

$$1)\quad \lim_{x\to+\infty}\Big(f(x)-g(x)\Big)=1, \qquad\qquad 2)\quad \lim_{x\to+\infty}\frac{h(x)}{t(x)}=7$$

Μονάδες 5

3. Να βρεθούν τα παρακάτω όρια:

   (α΄) $\lim\limits_{x\to\alpha}\dfrac{x^4-\alpha^4}{x-\alpha}$, με $\alpha \in \mathbb{R}^*$ (όχι κανόνα de l' Hôpital).

   (β΄) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}-\sqrt{x}\right)$.

   (γ΄) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{4\text{ημ}^2(x)+3\text{συν}(5x)}{x}$.

   (δ΄) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x}{2+\text{ημ}\left(\dfrac{1}{x}\right)}$.

Μονάδες 2+3+3+3=11

ΘΕΜΑ 3ο

1. (α') Να δώσετε ένα παράδειγμα μη συνεχούς συνάρτησης $f:\ \mathbb{R}\to\mathbb{R}$ έτσι ώστε να ικανοποιεί την σχέση:

$$\forall x\in\mathbb{R} \text{ ισχύει } f^2(x)=1 \tag{1}$$

   (β') Δίδεται συνεχής συνάρτηση $f:\ \mathbb{R}\to\mathbb{R}$ η οποία ικανοποιεί τη σχέση (1). Αποδείξτε ότι η συνάρτηση f έχει τύπο: $\forall x\in\mathbb{R}$, $f(x)=1$ είτε $\forall x\in\mathbb{R}$, $f(x)=-1$.

Μονάδες 2+7=9

2. (α') Να αποδειχθεί ότι η εξίσωση $\text{ημ}(x)-x+1=0$ έχει μία τουλάχιστον ρίζα στο διάστημα $(0,\pi)$.

   (β') i. Να βρεθούν οι συνεχείς συναρτήσεις $f:\ [0,\pi]\to\mathbb{R}$ για τις οποίες ισχύει η σχέση

$$f^2(x)-2f(x)+\text{συν}^2(x)=0,\quad x\in[0,\pi]$$

   και έχουν μέγιστο στο $x_0=\dfrac{\pi}{2}$.

   ii. Αν f συνεχής συνάρτηση του προηγουμένου ερωτήματος να αποδειχθεί ότι η γραφική παράσταση, $\mathcal{G}_f$, της f τέμνει την $y=x$ σε ένα τουλάχιστον σημείο με τετμημένη $x_0\in(0,\pi)$.

Μονάδες 2+4+4=10

3. Έστω $f:\ [0,+\infty)\to\mathbb{R}$ μια συνεχής και μη αρνητική συνάρτηση. Υποθέτουμε ότι: $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=\alpha<1$. Δείξτε ότι υπάρχει $\xi\in[0,+\infty)$ έτσι ώστε $f(\xi)=\xi$, δηλαδή η f έχει σταθερό σημείο.

Μονάδες 6

ΘΕΜΑ 4ο

Υποθέστε [1] ότι η συνάρτηση f είναι μια πραγματική συνάρτηση με τις εξής δύο ιδιότητες: 1) $D_f = A$ είναι το μεγαλύτερο σύνολο όπου ορίζονται οι συναρτήσεις f, f^{-1}, $\dfrac{1}{f}$ και η συνάρτηση f είναι συνεχής και 2) η αντίστροφη f^{-1} ικανοποιεί την ιδιότητα:

$$f^{-1} = \frac{1}{f} \tag{2}$$

τότε:

1. Δείξτε ότι το 0 δεν ανήκει στο πεδίο ορισμού D_f και το σύνολο τιμών της συνάρτησης f.
2. Δείξτε ότι (α, β) ανήκει στο γράφημα $\mathcal{G}_f$ της συνάρτησης αν και μόνο αν ανήκουν επίσης στο γράφημα $\mathcal{G}_f$ και τα $\left(\beta, \dfrac{1}{\alpha}\right)$, $\left(\dfrac{1}{\alpha}, \dfrac{1}{\beta}\right)$, $\left(\dfrac{1}{\beta}, \alpha\right)$.
3. Μπορεί να υπάρχει μια τέτοια συνάρτηση στο σύνολο των ακεραίων; Δικαιολογείστε την απάντησή σας.
4. Δείξτε ότι $\Big(f \circ f\Big)(x) = \dfrac{1}{x}$, $f\left(\dfrac{1}{f(x)}\right) = x$, $f\Big(\dfrac{1}{x}\Big) = \dfrac{1}{f(x)}$ και $\Big(f \circ f \circ f \circ f\Big)(x) = x$, για κάθε x στο A.
5. Έστω η συνάρτηση
$$h(x) = \begin{cases} -x & \text{αν} \quad x > 0 \\ \\ -\dfrac{1}{x} & \text{αν} \quad x < 0 \end{cases}$$
Δείξτε ότι η h ικανοποιεί τη σχέση (2).
6. Βρείτε ακόμα ένα παράδειγμα, μη τετριμμένο, που να ικανοποιεί τη σχέση (2). Δικαιολογείστε την επιλογή σας.

Μονάδες 2+7+3+6+4+3=25

[1] Cheng, R., Dasgupta, A., Ebanks, B.R., Kinch, L., Larson, L.M., McFadden, R.B.,: *When Does $f^{-1} = 1/f$?* The American Mathematical Monthly, Vol. 105, No. 8 (Oct. 1998) pp 704-717.

Ενδεικτικές Λύσεις

ΘΕΜΑ 1ο

1. (α΄) Λάθος, για παράδειγμα η $f(x) = \text{ημ}(x)$ στο διάστημα $[0, 6\pi]$.

   (β΄) Λάθος, μπορεί να είναι συνεχής και σταθερή. Δες θεώρημα σελ. 76 Σχολικό βιβλίο.

   (γ΄) Λάθος, για παράδειγμα $\text{ημ}\left((-2\pi, 2\pi)\right) = [-1, 1]$.

   (δ΄) Λάθος, για παράδειγμα η συνάρτηση $f(x) = \begin{cases} \text{ημ}\left(\dfrac{1}{x}\right) & , \quad x \in \left[-\dfrac{1}{\pi}, \dfrac{1}{\pi}\right] \\ 2016 & , \quad x = 0 \end{cases}$.

   Τότε, $f\left(\left[-\dfrac{1}{\pi}, \dfrac{1}{\pi}\right]\right) = [-1, 1]$ αλλά η f δεν είναι συνεχής στο διάστημα.

   (ε΄) Λάθος, για παράδειγμα οι συναρτήσεις: $f(x),\ g(x) = \begin{cases} 0 & \text{αν} \quad x \neq 0 \\ 1 & \text{αν} \quad x = 0 \end{cases}$.

   Ενώ, $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = \lim\limits_{x\to 0} g(x) = 0$ τότε $\lim\limits_{x\to 0} f\left(g(x)\right) = 1$, δες παρατήρηση σελ. 55 του σχολικού βιβλίου.

2. (α΄) $f\left([-1, 1]\right) = \{f(x) :\ x \in [-1, 1]\} = \{|x|,\ x \in [-1, 1]\} = [0, 1]$

   (β΄) $f^{-1}\Big([-1, 0)\Big) = \Big\{f^{-1}(x) :\ x \in [-1, 0)\Big\} = \{-x :\ x \in [-1, 0)\} = (0, 1]$.

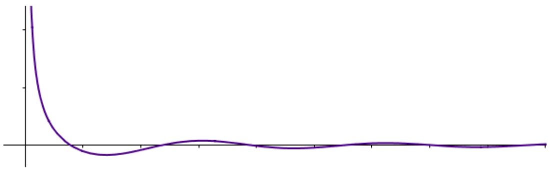
   (γ΄) $f^{-1}\left(f\Big([0, 1]\Big)\right) = f^{-1}([0, 1]) = \{x :\ x \in [0, 1]\} = [0, 1]$.

■

ΘΕΜΑ 2ο

1. (α΄) Λάθος, έστω $f(x) = 2 - \dfrac{1}{x+1}$ γν. αύξουσα στο $[0, +\infty)$, αλλά $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 2$.

   (β΄) Λάθος, για παράδειγμα η $f(x) = \dfrac{\text{συν}(x)}{x}$ στο $(0, +\infty)$. Τότε, $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0$, αλλά η $f(x)$ δεν έχει το ίδιο πρόσημο για $x \to +\infty$, αφού αναπηδά πότε στα θετικά και πότε στα αρνητικά.

   Σχήμα 1: $f(x) = \dfrac{\text{συν}(x)}{x}$

   (γ΄) Αληθές, γιατί κάθε διάστημα με κέντρο το -1 θα περιέχει όλες τις τιμές $f(x)$ για x πολύ μεγάλα. Έτσι, $-1,5 \leq f(x) \leq -0,5$ και συνεπώς θα έχουν το ίδιο πρόσημο.

2. (α΄) $f(x) = x + 1$ και $g(x) = x$.

   (β΄) $h(x) = 7x$ και $t(x) = x$.

3. (α') $f(x) = \dfrac{x^4-\alpha^4}{x-\alpha} = (x+\alpha)(x^2+\alpha^2)$ άρα, $\lim\limits_{x\to\alpha} f(x) = (x+\alpha)(x^2+\alpha^2) = 4\alpha^3$.

   (β') $f(x) = \sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}} - \sqrt{x} = \cdots = \dfrac{\sqrt{1+\dfrac{1}{\sqrt{x}}}}{\sqrt{1+\sqrt{\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{x\sqrt{x}}}}+1}$, άρα, $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \dfrac{1}{2}$ αφού $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{\sqrt{x}} = 0$.

   (γ') $\left|\dfrac{4\text{ημ}^2(x)+3\text{συν}(5x)}{x}\right| < \dfrac{4\text{ημ}^2(x)+3|\text{συν}(5x)|}{x} < \dfrac{7}{x}$. Άρα το όριο είναι 0.

   (δ') $-1 \leq \text{ημ}\dfrac{1}{x} \leq 1 \Leftrightarrow 1 \leq 2+\text{ημ}\dfrac{1}{x} \leq 3$.

      i. $x>0$, $\dfrac{x}{3} \leq \dfrac{x}{2+\text{ημ}\dfrac{1}{x}} \leq \dfrac{x}{1}$.

      ii. $x<0$, $\dfrac{x}{3} \geq \dfrac{x}{2+\text{ημ}\dfrac{1}{x}} \geq \dfrac{x}{1}$.

   Τέλος, το όριο και στις δύο περιπτώσεις είναι 0. ■

ΘΕΜΑ 3ο

1. (α') Η συνάρτηση $f(x) = \begin{cases} -1 & , \; x\in(-\infty,0] \\ 1 & , \; x\in(0,+\infty) \end{cases}$

   (β') $\forall x\in\mathbb{R}$ έχουμε ότι $f^2(x)=1 \Rightarrow f(x)=1$ ή $f(x)=-1$. Θα δείξω ότι $\forall x\in\mathbb{R}$, $f(x)=1$ είτε $\forall x\in\mathbb{R}$, $f(x)=-1$. Αν υποθέσουμε ότι υπάρχουν $x\in\mathbb{R}$ έτσι ώστε $f(x)=1$ ή $f(x)=-1$, τότε, υπάρχει $x_0\in\mathbb{R}$ έτσι ώστε $f(x_0)=1$ και $x_1\in\mathbb{R}$ με $f(x_1)=-1$. Επομένως, από το Θεώρημα ενδιαμέσων τιμών $\exists\xi\in(x_0,x_1)$ έτσι ώστε $f(\xi)=0$, που αντιβαίνει στην $f^2(x)=1$. Άρα, καταλήγουμε στο αποτέλεσμα.

2. (α') Αν $f(x)=\text{ημ}(x)-x+1$ τότε $f(0)=1>0$ και $f(\pi)=-\pi<0$. Άρα, $\exists\xi\in(0,\pi):\; f(\xi)=0$.

   (β') Λύνοντας την εξίσωση ως προς f θα πάρουμε $f(x)=1\pm\text{ημ}(x)$ Επειδή όμως η συνάρτηση έχει μέγιστο στο $\frac{\pi}{2}$, επιλέγουμε την $f(x)=1+\text{ημ}(x)$.

   (γ') Πρέπει η εξίσωση $f(x)=x \Rightarrow 1+\text{ημ}(x)=1$ να έχει μια τουλάχιστον ρίζα. Είναι συνέπεια του πρώτου ερωτήματος.

3. (α') Αν $f(0)=0$ τότε έχει ένα σταθερό σημείο, το 0. Αν $f(0)=r\neq 0$, η συνάρτηση $g(x)=\dfrac{f(x)}{x}$ είναι καλά ορισμένη και συνεχής στο $(0,+\infty)$.
   $\lim\limits_{x\to0^+} g(x)=+\infty$, αφού $\lim\limits_{x\to0^+} f(x)=r$, $r\in\mathbb{R}$. Επίσης, $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)=\alpha<1$. Άρα, από το Θεώρημα ενδιαμέσων τιμών υπάρχει $\xi\in(0,+\infty)$ έτσι ώστε $g(\xi)=1$ ή $f(\xi)=\xi$.

   (β') (Λύση Π. Παπαγεωργίου) Αρκεί να δείξουμε ότι η εξίσωση $f(x)-x$ έχει τουλάχιστον μία ρίζα. Θεωρώ τη συνάρτηση $g(x)=f(x)-x$, $x\in[0,+\infty)$. Η $g(x)$ είναι συνεχής και $g(0)=f(0)\geq 0$. Επειδή $\alpha<1\Rightarrow\alpha-1<0$ και:
   $$\lim_{x\to+\infty}\Big(f(x)-x\Big)=-\infty$$
   Άρα, υπάρχει ένα β αρκετά μεγάλο έτσι ώστε $g(\beta)<0$. Συνεπώς $g(0)\cdot g(\beta)\leq 0$.

i. Αν $g(0) = 0$ τότε $f(0) = 0$ και η f έχει σταθερό σημείο.

ii. Αν $g(0) \cdot g(\beta) < 0$ τότε από Θεώρημα Bolzano, υπάρχει τουλάχιστον ένα $\xi \in (0, +\infty)$ έτσι ώστε $g(\xi) = 0 \Rightarrow f(\xi) = \xi$.

■

ΘΕΜΑ 4ο

1. Έστω, D_f, V_f το πεδίο ορισμού και το σύνολο τιμών της συνάρτησης f. Από τη σχέση (2), $D_f = V_f = \dfrac{1}{D_f}$, πρέπει $0 \notin D_f$.

2. Αν, $f(\alpha) = \beta$, τότε $(\alpha, \beta) \in \mathcal{G}_f \Rightarrow (\beta, \alpha) \in \mathcal{G}_{f^{-1}}$ και $(\beta, \alpha) \in \mathcal{G}_{\frac{1}{f}}$, άρα: $\left(\beta, \dfrac{1}{\alpha}\right) \in \mathcal{G}_f$. Έτσι, αν $(\alpha, \beta) \in \mathcal{G}_f$, τότε $\left(\beta, \dfrac{1}{\alpha}\right)$, $\left(\dfrac{1}{\alpha}, \dfrac{1}{\beta}\right)$, $\left(\dfrac{1}{\beta}, \alpha\right)$ είναι σημεία του $\mathcal{G}_f$.

3. Αν $D_f = \mathbb{Z}$ με $f:\ \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ και $f(\alpha) = \beta$ με $\alpha, \beta \in \mathbb{Z}$. Τότε, $\dfrac{1}{\alpha} \in \mathbb{Z}$. Αδύνατο, αν $\alpha \neq 1$.

4. Είδαμε προηγουμένως ότι αν $(\alpha, \beta) \in \mathcal{G}_f$, τότε $\left(\beta, \dfrac{1}{\alpha}\right)$, $\left(\dfrac{1}{\alpha}, \dfrac{1}{\beta}\right)$, $\left(\dfrac{1}{\beta}, \alpha\right)$ είναι σημεία του $\mathcal{G}_f$.

   Σχηματικά λοιπόν:

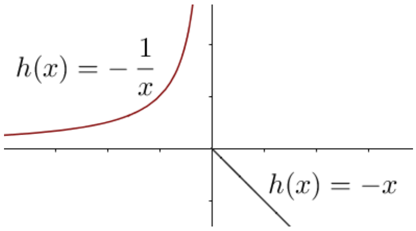
$$\begin{array}{ccccc} & \alpha & \xrightarrow{f} & \beta & \\ f & \uparrow & & \downarrow & f \\ & \dfrac{1}{\beta} & \xleftarrow{f} & \dfrac{1}{\alpha} & \end{array}$$

   Άρα, αν $f(\alpha) = \beta$:

$$f\left(f(\alpha)\right) = f(\beta) = \frac{1}{\alpha}$$
$$f\left(\frac{1}{f(\alpha)}\right) = f\left(\frac{1}{\beta}\right) = \alpha$$
$$f\left(\frac{1}{\alpha}\right) = \frac{1}{\beta} = f\left(\frac{1}{f(\alpha)}\right)$$
$$\begin{aligned} f\left(f\left(f\left(f(\alpha)\right)\right)\right) &= f\left(f\left(f\left(\beta\right)\right)\right) \\ &= f\left(f\left(\frac{1}{\alpha}\right)\right) \\ &= f\left(\frac{1}{\beta}\right) \\ &= \alpha \end{aligned}$$

5. Έστω, $x \in (0, +\infty) \Rightarrow h(x) = -x$. Τότε, για $x \in (-\infty, 0)$, $h^{-1}(x) = -x = \dfrac{1}{-\dfrac{1}{x}} = \dfrac{1}{h(x)}$, αφού $x < 0$ και $h(x) = -\dfrac{1}{x}$. Έστω, $x \in (-\infty, 0) \Rightarrow h(x) = -\dfrac{1}{x}$. Η αντίστροφη της συνάρτησης είναι για $x > 0$, $h^{-1}(x) = -\dfrac{1}{x} = \dfrac{1}{-x} = \dfrac{1}{h(x)}$ αφού για $x > 0$, $h(x) = -x$.

   Άρα, η h ικανοποιεί την συνθήκη (2).



6. Έστω η συνάρτηση

$$g(x) = \begin{cases} -x^5 & \text{αν} \quad x > 0 \\ -\dfrac{1}{\sqrt[5]{x}} & \text{αν} \quad x < 0 \end{cases}$$

■