ΕΠΙΤΡΟΠΗ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΩΝ
33η Ελληνική Μαθηματική Ολυμπιάδα «Ο Αρχιμήδης»
27 Φεβρουαρίου 2016

Θέματα μεγάλων τάξεων

Πρόβλημα 1

Να βρείτε όλες τις τριάδες μη αρνητικών ακεραίων (x,y,z) με $x \le y$, που ικανοποιούν την εξίσωση:

$$x^2 + y^2 = 3 \cdot 2016^z + 77$$

Πρόβλημα 2

Τα πολυώνυμα $P(x), Q(x)$ με πραγματικούς συντελεστές είναι μη σταθερά, έχουν συντελεστή του μεγιστοβάθμιου όρου ίσο με 1 και επιπλέον ικανοποιούν τις ισότητες:

$$2P(x) = Q\left(\frac{(x+1)^2}{2}\right) - Q\left(\frac{(x-1)^2}{2}\right), \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}, \quad P(1) = 1.$$

Να βρείτε τα πολυώνυμα $P(x)$ και $Q(x)$.

Πρόβλημα 3

Δίνεται ισοσκελές και οξυγώνιο τρίγωνο $ΑΒΓ$ $(\text{με } ΑΒ = ΑΓ)$ και το ύψος του ΓΔ. Ο κύκλος $c_2(Γ, ΓΔ)$ τέμνει την ΑΓ στο σημείο Κ, την προέκταση της ΑΓ στο σημείο Ζ και τον κύκλο $c_1(Β, ΒΔ)$ στο σημείο Ε. Η ευθεία ΔΖ τέμνει τον κύκλο c_1 στο σημείο Μ.

Να αποδείξετε ότι:

(α) $\widehat{ΖΔΕ} = 45^0$

(β) Τα σημεία Ε,Μ και Κ βρίσκονται στην ίδια ευθεία.

(γ) Η ευθεία ΒΜ είναι παράλληλη με την ευθεία ΕΓ.

Πρόβλημα 4

Τετράγωνο ABCD διαιρείται σε n^2 ίσα μικρά (στοιχειώδη) τετράγωνα, σχεδιάζοντας ευθείες παράλληλες στις πλευρές του. Τις κορυφές των στοιχειωδών τετραγώνων τις ονομάζουμε σημεία του πλέγματος. Ένα ρόμβο θα τον ονομάζουμε «καλό», όταν:

- δεν είναι τετράγωνο
- οι κορυφές του είναι σημεία του πλέγματος
- οι διαγώνιές του είναι παράλληλες με τις πλευρές του τετραγώνου ABCD.

Να βρεθεί (συναρτήσει του n) το πλήθος των «καλών» ρόμβων, όπου n ακέραιος αριθμός μεγαλύτερος του 2.

Διάρκεια διαγωνίσματος: 3 ώρες και 30 λεπτά

Κάθε πρόβλημα βαθμολογείται με 5 μονάδες. **Καλή επιτυχία!**