# Διαγώνισμα 1ου τετραμήνου ΒΘ θετικού προσανατολισμού[1]

ΟΝΟΜΑΤΕΠΩΝΥΜΟ ......

## ΟΜΑΔΑ $\mathcal{A}$

**Θέμα 1**

1. (α΄) Πότε λέμε ότι δύο μη μηδενικά διανύσματα είναι παράλληλα;

   (β΄) Αν $\vec{\alpha}$ και $\vec{\beta}$ δύο μη-συγγραμμικά διανύσματα. Πότε λέμε ότι το διάνυσμα $\vec{\gamma}$ είναι γραμμικός συνδυασμός των $\vec{\alpha}$ και $\vec{\beta}$;

2. Χαρακτηρίστε με ΣΩΣΤΟ $\left(\Sigma\right)$ ή ΛΑΘΟΣ $\left(\Lambda\right)$ τις παρακάτω προτάσεις:

   (α΄) Τα διανύσματα $\vec{\alpha} - \frac{1}{3}\vec{\beta}$ και $-\frac{3}{2}\vec{\alpha} + \frac{1}{2}\vec{\beta}$, είναι παράλληλα.

   (β΄) Ισχύει η ισότητα $\dfrac{\left(\vec{\alpha}\cdot\vec{b}\right)\cdot\vec{b}^2}{|\vec{b}|} = \left(\vec{\alpha}\cdot\vec{b}\right)\cdot\vec{b}$.

   (γ΄) Αν $\vec{\alpha}^2 = \vec{b}^2$ τότε $\vec{\alpha} = \vec{b}$ και $\vec{\alpha} = -\vec{b}$.

   (δ΄) Αν το $\vec{\alpha} + \vec{b}$ είναι συγγραμμικό με το $\vec{\alpha}$, τότε είναι συγγραμμικό και με το $\vec{b}$.

   (ε΄) Ισχύει: $\left(\vec{\alpha}\cdot\vec{b}\right)^2 \le \vec{\alpha}^2\cdot\vec{b}^2$.

Μονάδες $5 + 5 + (5 \times 5) = 35$

**Θέμα 2**

Δίνονται τα διανύσματα $\overrightarrow{OA} = (4, -2)$ και $\overrightarrow{OB} = (1, 2)$, όπου $O$ είναι η αρχή των αξόνων.

1. Να αποδείξετε ότι τα διανύσματα $\overrightarrow{OA}$ και $\overrightarrow{OB}$ είναι κάθετα.

2. Αν $\Gamma(\alpha, \beta)$ είναι σημείο της ευθείας που διέρχεται από τα σημεία $A$ και $B$, τότε:

   (α΄) Να αποδείξετε ότι $\overrightarrow{AB} = (-3, 4)$ και $\overrightarrow{A\Gamma} = (\alpha - 4, \beta + 2)$

   (β΄) Να αποδείξετε ότι: $4\alpha + 3\beta = 10$.

   (γ΄) Αν επιπλέον τα διανύσματα $\overrightarrow{O\Gamma}$ και $\overrightarrow{AB}$ είναι κάθετα, να βρείτε τις συντεταγμένες του σημείου Γ.

Μονάδες $5 + 7 + 13 + 5 = 30$

**Θέμα 3**

1. Έστω τα διανύσματα $\vec{\alpha} = (1, 2)$ και $\vec{\beta} = (-1, 3)$ Να βρεθεί διάνυσμα $\vec{\delta}$, τέτοιο ώστε $\vec{\delta} \parallel \vec{\alpha} + \vec{\beta}$ και $\vec{\beta} \perp (\vec{\delta} - \vec{\alpha})$.

2. Αν $\vec{\delta}$ το διάνυσμα του πρώτου ερωτήματος, να λυθεί ως προς $\vec{x}$ η εξίσωση:

$$\left|\vec{x} + \vec{\delta}\right|\cdot\vec{x} = -\left|\vec{x} - 6\vec{\delta}\right|\cdot\vec{\delta}$$

Μονάδες $25 + 10 = 35$

[1] Πρότυπο ΓΕΛ Βαρβακείου Σχολής καθ. Ζ. Λυγάτσικας - 10 Δεκεμβρίου 2015

# Διαγώνισμα 1ου τετραμήνου Β θετικού προσανατολισμού[2]

ΟΝΟΜΑΤΕΠΩΝΥΜΟ . . . . . .

## ΟΜΑΔΑ $\mathcal{B}$

**Θέμα 1**

1. (α′) Πότε λέμε ότι είναι ίσα δύο μη μηδενικά διανύσματα;

   (β′) Τι ονομάζουμε εσωτερικό γινόμενο δύο διανυσμάτων $\overrightarrow{\alpha}$ και $\overrightarrow{\beta}$;

2. Χαρακτηρίστε με ΣΩΣΤΟ $\Big(\Sigma\Big)$ ή ΛΑΘΟΣ $\Big(\Lambda\Big)$ τις παρακάτω προτάσεις:

   (α′) Αν $\overrightarrow{i}$, $\overrightarrow{j}$ τα δύο μοναδιαία διανύσματα του ορθοκανονικού συστήματος $(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$, τότε $\text{προβ}_{\overrightarrow{i}}(3\overrightarrow{i} + 3\overrightarrow{j}) = 3\overrightarrow{i}$

   (β′) Για κάθε $x_1, y_1 \in \mathbb{R}$, αν $|\overrightarrow{\alpha}| = \sqrt{x_1^2 + y_1^2}$, τότε $\overrightarrow{\alpha} = (x_1, y_1)$.

   (γ′) Αν $\overrightarrow{\alpha}$, $\overrightarrow{\beta} \neq \overrightarrow{0}$, και $\overrightarrow{v} = 5\overrightarrow{\alpha} + 5\overrightarrow{\beta}$, $\overrightarrow{u} = -5\overrightarrow{\alpha} - 5\overrightarrow{\beta}$, τότε: $|\overrightarrow{v}| = |\overrightarrow{u}|$ και $\overrightarrow{v} \nearrow\!\!\nearrow \overrightarrow{u}$.

   (δ′) Δίδεται τρίγωνο $AB\Gamma$ με $\widehat{BA\Gamma} = 90^o$, τότε: $\overrightarrow{B\Gamma} \cdot \overrightarrow{BA} = |\overrightarrow{BA}|^2$

   (ε′) Για δύο διανύσματα ισχύει: $\overrightarrow{\alpha} \nearrow\!\!\swarrow \overrightarrow{\beta} \Longleftrightarrow det(\overrightarrow{\alpha}, \overrightarrow{\beta}) = -1$

Μονάδες $5 + 10 + (5 \times 5) = 40$

**Θέμα 2** Σε τρίγωνο $AB\Gamma$ είναι $\overrightarrow{AB} = (\lambda, \lambda + 1)$, $\overrightarrow{A\Gamma} = (3\lambda, \lambda - 1)$, όπου $\lambda \neq 0$, $\lambda \neq -2$ και $M$ είναι το μέσο της πλευράς $B\Gamma$.

1. Να αποδείξετε ότι $\overrightarrow{AM} = (2\lambda, \lambda)$.
2. Να βρείτε την τιμή του $\lambda$ για την οποία το διάνυσμα $\overrightarrow{AM}$ είναι κάθετο στο διάνυσμα $\overrightarrow{\alpha} = \left(\frac{2}{\lambda}, -\lambda\right)$.
3. Για την τιμή του $\lambda$ βρήκατε στο ερώτημα 2, να αναλύσετε το διάνυσμα $\alpha$ σε δύο κάθετες συνιστώσες από τις οποίες η μια να είναι παράλληλη στο $\overrightarrow{AB}$.

Μονάδες $2 + 3 + 20 = 25$

**Θέμα 3**

1. Έστω τα διανύσματα $\overrightarrow{\alpha} = (2, 2)$ και $\overrightarrow{\beta} = (-2, 1)$. Να βρεθεί διάνυσμα $\overrightarrow{\delta}$, τέτοιο ώστε $\overrightarrow{\delta} \parallel \overrightarrow{\alpha} - \overrightarrow{\beta}$ και $\overrightarrow{\alpha} \perp (\overrightarrow{\delta} + \overrightarrow{\beta})$.
2. Αν $\overrightarrow{\delta}$ το διάνυσμα του πρώτου ερωτήματος, να λυθεί ως προς $\overrightarrow{x}$ η εξίσωση:

$$\left|\overrightarrow{x} - \overrightarrow{\delta}\right| \cdot \overrightarrow{x} = \left|\overrightarrow{x} + 8\overrightarrow{\delta}\right| \cdot \overrightarrow{\delta}$$

Μονάδες $25 + 10 = 35$

[2] Πρότυπο ΓΕΛ Βαρβακείου Σχολής καθ. Ζ. Λυγάτσικας - 10 Δεκεμβρίου 2015

# Διαγώνισμα 1ου τετραμήνου Β θετικού προσανατολισμού[3]

ΟΝΟΜΑΤΕΠΩΝΥΜΟ ......

## ΟΜΑΔΑ $\mathcal{A}$

**Θέμα 1**

1. (α′) Πότε λέμε ότι είναι δύο μη μηδενικά διανύσματα είναι ομόρροπα;
   (β′) Τι ονομάζουμε μέτρο ενός διανύσματος $\overrightarrow{\alpha} = (x_A, y_A)$, $x_A, y_A \in \mathbb{R}$;
   (γ′) Τι είναι ο συντελεστής διεύθυνσης ενός διανύσματος $\overrightarrow{\alpha} = (x, y)$, $x, y \in \mathbb{R}$;

2. Χαρακτηρίστε με ΣΩΣΤΟ $\left(\Sigma\right)$ ή ΛΑΘΟΣ $\left(\Lambda\right)$ τις παρακάτω προτάσεις:
   (α′) Αν $\overrightarrow{\imath}$, $\overrightarrow{\jmath}$ τα δύο μοναδιαία διανύσματα του ορθοκανονικού συστήματος $(O, \overrightarrow{\imath}, \overrightarrow{\jmath})$, τότε $\text{προβ}_{\overrightarrow{\imath}}(-3\overrightarrow{\imath} + 3\overrightarrow{\jmath}) = 3\overrightarrow{\imath}$
   (β′) Για κάθε $x, y \in \mathbb{R}$, αν $|\overrightarrow{\alpha}| = \sqrt{x^2 + y^2}$, τότε $\overrightarrow{\alpha} = (|x|, |y|)$.
   (γ′) Αν $\overrightarrow{\alpha}$, $\overrightarrow{\beta} \neq \overrightarrow{0}$, και $\overrightarrow{v} = 5\overrightarrow{\alpha} + 5\overrightarrow{\beta}$, $\overrightarrow{u} = -5\overrightarrow{\alpha} - 5\overrightarrow{\beta}$, τότε: $|\overrightarrow{v}| = |\overrightarrow{u}|$ και $\overrightarrow{v} \nearrow\!\swarrow \overrightarrow{u}$.
   (δ′) Δίδεται τρίγωνο $AB\Gamma$ με $\widehat{BA\Gamma} = 90^o$, τότε: $\overrightarrow{B\Gamma} \cdot \overrightarrow{BA} = \overrightarrow{BA}^2$

Μονάδες $5 + 5 + 5 + (4 \times 5) = 35$

**Θέμα 2** Δίδονται δύο μη μηδενικά διανύσματα $\overrightarrow{\alpha}$ και $\overrightarrow{\beta}$. Τότε:

1. Αν $2|\overrightarrow{\alpha}| = |\overrightarrow{\beta}|$ και $|\overrightarrow{\alpha} + \overrightarrow{\beta}| = |\overrightarrow{\alpha}|$, δείξτε ότι τα διανύσματα $\overrightarrow{\alpha}$ και $\overrightarrow{\beta}$ είναι αντίρροπα.
2. Αν $\overrightarrow{\alpha} = (3, 3)$ και $\overrightarrow{\delta} = (-2, 1)$ να υπολογισθεί η $\text{προβ}_{\overrightarrow{\alpha}}(2\overrightarrow{\alpha} + 3\overrightarrow{\beta} - \overrightarrow{\delta})$.

Μονάδες $15 + 20 = 35$

**Θέμα 3**

Έστω τρία διαφορετικά μη-συνευθειακά σημεία του επιπέδου: $K$, $A$, $B$. Για κάθε $\mu \in \mathbb{R}$ ορίζουμε ένα σημείο $M_\mu$ έτσι ώστε:

$$\overrightarrow{KM_\mu} = 3\mu\overrightarrow{KA} + 3(1 - \mu)\overrightarrow{KB} \qquad (1)$$

Έστω $M_0$ το σημείο που αντιστοιχεί στο $\mu = 0$ και $M_1$ το σημείο που αντιστοιχεί στο $\mu = 1$. Δείξτε ότι:

1. $\overrightarrow{AB} \nearrow\!\swarrow \overrightarrow{M_0M_1}$
2. για κάθε $\mu \in \mathbb{R}$ το αντίστοιχο σημείο $M_\mu$, που ορίζεται απο την εξίσωση (1), ανήκει στην ευθεία που ορίζουν τα σημεία $M_0$ και $M_1$.
3. Να βρεθεί η τιμή της παραμέτρου $\mu$ έτσι ώστε το σημείο $M_\mu$ να είναι το μέσο του ευθυγράμμου τμήματος $M_0M_1$.

Μονάδες $5 + 15 + 10 = 30$

[3]Πρότυπο ΓΕΛ Βαρβακείου Σχολής καθ. Ζ. Λυγάτσικας - 10 Δεκεμβρίου 2015

# Διαγώνισμα 1ου τετραμήνου Β θετικού προσανατολισμού[4]

ΟΝΟΜΑΤΕΠΩΝΥΜΟ ......

## ΟΜΑΔΑ $\mathcal{B}$

**Θέμα 1**

1. (α′) Πότε λέμε ότι είναι δύο μη μηδενικά διανύσματα είναι αντίρροπα;
   (β′) Τι ονομάζουμε γινόμενο του $\lambda \in \mathbb{R}$ με το διάνυσμα $\overrightarrow{\alpha}$;
   (γ′) Τι ονομάζουμε εσωτερικό γινόμενο δύο διανυσμάτων;

2. Χαρακτηρίστε με ΣΩΣΤΟ $\left(\Sigma\right)$ ή ΛΑΘΟΣ $\left(\Lambda\right)$ τις παρακάτω προτάσεις:

   (α′) Τα διανύσματα $\overrightarrow{\alpha} - \frac{1}{3}\overrightarrow{\beta}$ και $-\frac{3}{2}\overrightarrow{\alpha} + \frac{1}{2}\overrightarrow{\beta}$, δεν είναι συγγραμμικά.

   (β′) Ισχύει η ισότητα $\dfrac{\left(\overrightarrow{\alpha}\cdot\overrightarrow{b}\right)\cdot\overrightarrow{b}^2}{|\overrightarrow{b}|} = \left(\overrightarrow{\alpha}\cdot\overrightarrow{b}\right)\cdot|\overrightarrow{b}|$.

   (γ′) Αν $\overrightarrow{\alpha}^2 = \overrightarrow{b}^2$ τότε $\overrightarrow{\alpha} = |\overrightarrow{b}|$.

   (δ′) Αν το $\overrightarrow{\alpha} + \overrightarrow{b}$ είναι συγγραμμικό με το $\overrightarrow{\alpha}$, τότε είναι συγγραμμικό και με το $\overrightarrow{b}$.

Μονάδες $5 + 5 + 5 + (4 \times 5) = 35$

**Θέμα 2** Δίδονται δύο μη μηδενικά διανύσματα $\overrightarrow{\alpha}$ και $\overrightarrow{\beta}$. Τότε: Αν για τα διανύσματα $\overrightarrow{\alpha}$ και $\overrightarrow{\beta}$ ισχύουν:

$(\Sigma)\begin{cases} |\overrightarrow{\beta}| = 2|\overrightarrow{\alpha}| \\ \text{και} \\ |\overrightarrow{\alpha} - \overrightarrow{\beta}| = |\overrightarrow{\alpha}| \end{cases}$, δείξτε ότι:

1. τα διανύσματα $\overrightarrow{\alpha}$ και $\overrightarrow{\beta}$ είναι ομόρροπα,

2. αν επι πλέον $\overrightarrow{\alpha} = (2, -2)$ και ισχύουν οι σχέσεις $(\Sigma)$ για τα διανύσματα $\overrightarrow{\alpha}$ και $\overrightarrow{\beta}$, να βρεθεί το μοναδιαίο διάνυσμα που βρίσκεται στη διχοτόμο της γωνίας των $\overrightarrow{\alpha}$ και $\overrightarrow{\alpha} - \overrightarrow{\beta}$.

Μονάδες $15 + 20 = 35$

**Θέμα 3**

Έστω τρία διαφορετικά μη-συνευθειακά σημεία του επιπέδου: $O$, $A$, $B$. Για κάθε $\lambda \in \mathbb{R}$ ορίζουμε ένα σημείο $M_\lambda$ έτσι ώστε:

$$\overrightarrow{OM_\lambda} = 3(1-\lambda)\overrightarrow{OA} + 3\lambda\overrightarrow{OB} \tag{2}$$

Έστω $M_0$ το σημείο που αντιστοιχεί στο $\lambda = 0$ και $M_1$ το σημείο που αντιστοιχεί στο $\lambda = 1$. Δείξτε ότι:

1. $\overrightarrow{AB} \nearrow\nearrow \overrightarrow{M_0M_1}$

2. για κάθε $\lambda \in \mathbb{R}$ το αντίστοιχο σημείο $M_\lambda$, που ορίζεται απο την εξίσωση (2), ανήκει στην ευθεία που ορίζουν τα σημεία $M_0$ και $M_1$.

3. Να βρεθεί η τιμή της παραμέτρου $\lambda$ έτσι ώστε το σημείο $M_\lambda$ να είναι το μέσο του ευθυγράμμου τμήματος $M_0M_1$.

Μονάδες $5 + 15 + 10 = 30$

[4] Πρότυπο ΓΕΛ Βαρβακείου Σχολής καθ. Ζ. Λυγάτσικας - 10 Δεκεμβρίου 2015