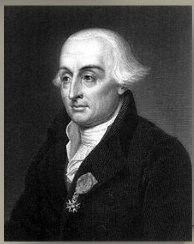
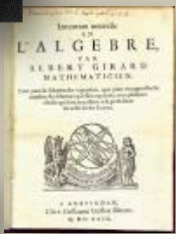


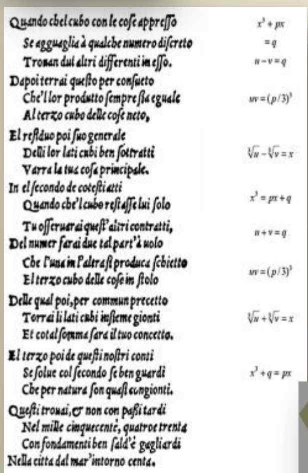


ΣΤΙΓΜΕΣ ΙΣΤΟΡΙΑΣ

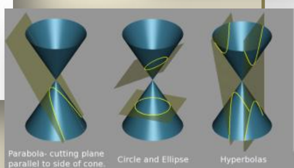
της επίλυσης των ΕΞΙΣΩΣΕΩΝ



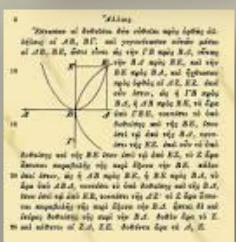


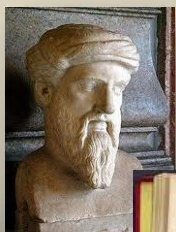



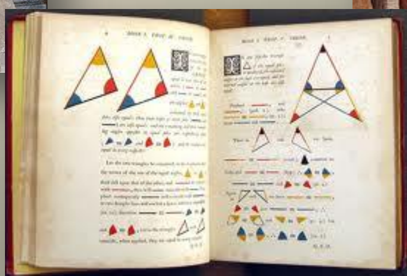
Quando chel cubo con le cose appresso	x^3+px
Se agguaglia à qualche numero discreto	$=q$
Trouan dui altri differenti in esso.	$u-v=q$
Dapoi terrai questo per consueto	
Che'l lor produtto sempre sia eguale	$uv=(p/3)^3$
Al terzo cubo delle cose neto,	
El residuo poi suo generale	
Delli lor lati cubi ben sottratti	$\sqrt[3]{u}-\sqrt[3]{v}=x$
Varra la tua cosa principale.	
In el secondo de cotesti atti	
Quando che'l cubo restasse lui solo	$x^3=px+q$
Tu osseruarai quest'altri contratti,	
Del numer farai due tal part'à uolo	$u+v=q$
Che l'una in l'altra si produca schietto	
El terzo cubo delle cose in stolo	$uv=(p/3)^3$
Delle qual poi, per commun precetto	
Torrai li lati cubi insieme gionti	$\sqrt[3]{u}+\sqrt[3]{v}=x$
Et cotal somma sarà il tuo concetto.	
El terzo poi de questi nostri conti	$x^3+q=px$
Se solue col secondo se ben guardi	
Che per natura son quasi congionti.	
Questi trouai, & non con passi tardi	
Nel mille cinquecentè, quatroe trenta	
Con fondamenti ben sald'è gagliardi	
Nella citta dal mar'intorno centa.	

ΓΙΩΡΓΟΣ ΛΑΓΟΥΔΑΚΟΣ





Μελίσσια Ιούλιος 2014

0. Εισαγωγή

Το καλοκαίρι του 2014 διάβασα για δεύτερη φορά το βιβλίο :
« Ο Γκαλουά και το κλειδί της συμμετρίας»* του *Ian Stewart* εκδόσεις *Τραυλός.

Όπως και την πρώτη φορά γεννήθηκαν πολλές απορίες. Συγχρόνως γεννήθηκε και το μικρόβιο να ψάξω να βρω περισσότερα στοιχεία της ιστορίας της επίλυσης των εξισώσεων από όσα παρουσίαζε ο συγγραφέας. Ξεκίνησα λοιπόν το διάβασμα.

Αποτέλεσμα των όσων μελέτησα είναι γραμμένα στις σελίδες που ακολουθούν. Πιστεύω ότι είναι ένα χρήσιμο υλικό για κάποιον που θα θελήσει διαβάζοντας το βιβλίο να έχει, ένα βοηθό, απλά γραμμένο για τις απορίες που θα του γεννηθούν.
Ποιος ξέρει μπορεί να είναι η αφορμή για να γεννηθεί μια πιο εμπεριστατωμένη μελέτη από τον επόμενο μελετητή.

Οι Στιγμές της Ιστορίας της επίλυσης Εξισώσεων, όπως ονόμασα τις σημειώσεις που ακολουθούν μας ταξιδεύουν …
Από την Αίγυπτο και την Βαβυλώνα, στην Αθήνα και στην Αλεξάνδρεια και πάλι στην Βαβυλώνα αλλά και στην μακρινή Σαμαρκάνδη. Μετά στην Ισπανία , Ιταλία , Γαλλία , Γερμανία. Από την Ευρώπη του μεσαίωνα ως την Ευρώπη της αναγέννησης. Από τον 16^{o} αιώνα και τους πρώτους Ιταλούς αλγεβριστές στην Ευρώπη του Gauss του Lagrange του Abel και του Galois.

Τα μαθηματικά που χρησιμοποιώ πιστεύω πως είναι βατά για κάποιον που έχει βασικές γνώσεις. Απευθύνομαι εξάλλου σε κάποιον που θα αγαπάει ότι έχει να κάνει με την επιστήμη και την εξέλιξη της. Συγχρόνως υπάρχουν και πολλά βιογραφικά στοιχεία των πρωταγωνιστών οπότε αν κάποιος θέλει μπορεί να επικεντρώσει την προσοχή του εκεί και να αφήσει το καθαρά μαθηματικό μέρος της εργασίας.

Αν κάποια σημεία δεν μπόρεσα να τα φωτίσω όσο έπρεπε τότε μάλλον αυτό το έργο ανατίθεται μοιραία στον επόμενο μελετητή.

Γιώργος Λαγουδάκος
Μελίσσια - Καλοκαίρι 2014

1. Τα μαθηματικά της Αιγύπτου και της Βαβυλώνας

Γύρω από την εύφορη πεδιάδα του Νείλου αναπτύχθηκε ένα σπουδαίος πολιτισμός . Στις τέσσερις χιλιετίες που κράτησε, οι αρχαίοι Αιγύπτιοι άφησαν ελάχιστες ενδείξεις για την μαθηματική τους επιστήμη. Οι κύριες πηγές μας είναι **ο πάπυρος της Μόσχας** που γράφτηκε περίπου το 1850 π.χ. , **ο πάπυρος του Rhind** που γράφτηκε γύρω στο 1650 π.χ. αλλά πρόκειται για αντιγραφή μαθηματικών πρακτικών προβλημάτων από παλαιότερο πάπυρο και **ο πάπυρος του Βερολίνου**.

Το χαρακτηριστικό των Αιγυπτιακών μαθηματικών είναι ότι τα κείμενα παρουσιάζουν το πρόβλημα και μετά οδηγίες για τα βήματα που πρέπει να ακολουθηθούν για τη λύση, χωρίς όμως να υπάρχουν αιτιολογίες. Ενδιαφέρον για το θέμα που εξετάζουμε είναι τα προβλήματα «**άχα**» - λέξη που μεταφράζεται ως σωρός ή ποσότητα. Ουσιαστικά είναι ο πρόδρομος του συμβολισμού του αγνώστου χ κατά την δική μας συνήθεια. Ας δούμε μερικά.

Πρόβλημα 63 από τον πάπυρο του Rhind

«*Πόσα καρβέλια ψωμί πρέπει να έχουμε ώστε αν ο πρώτος πάρει τα 2/3 ο δεύτερος το 1/2 ο τρίτος το 1/3 και ο τέταρτος το 1/4 τότε θα έχουν συνολικά πάρει 700 καρβέλια*»

<u>Οδηγίες</u>	<u>Εξίσωση</u>
Πρόσθεσε τα 2/3 , 1/2 , 1/3 , 1/4	$(\frac{2}{3}+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4})\cdot x = 700$
Αυτό μας κάνει $1\frac{3}{4}$	$(1\frac{3}{4})\cdot x = 700$
Διαίρεσε το 1 με το $1\frac{3}{4}$	$x = 700\cdot\frac{1}{1\frac{3}{4}}$
Αυτό δίνει 8/14	$x = 700\cdot\frac{8}{14}$
Βρες τα 8/14 του 700	$x = 400$
Αυτό δίνει 400	

Πρόβλημα 26 από τον πάπυρο του Rhind

« Να βρεθεί μία ποσότητα ώστε αν σε αυτήν προσθέσουμε το 1/4 του εαυτού της το άθροισμα να είναι 15»

Στο πρόβλημα αυτό ακολουθείται η τεχνική της **ψευδούς παραδοχής**. Ουσιαστικά θεωρούμε ως απάντηση μία βολική λύση αλλά όπως αποδεικνύεται είναι λαθεμένη και μετά διορθώνεται κατάλληλα.

Οδηγίες :	Με εξίσωση $x+\frac{1}{4}\cdot x=15$
Έστω 4	Έστω ότι η λύση είναι 4
Τότε το $1\frac{1}{4}$ του 4 είναι 5	Τότε $4+\frac{1}{4}\cdot 4=5\neq 15$
Πολλαπλασίασε το 5 ώστε να βρεις 15	Επειδή $5\cdot 3=15$
Η απάντηση είναι 3	
Πολλαπλασίασε 3 επί 4	Η απάντηση είναι $3\cdot 4=12$
Η απάντηση είναι 12	

Ο λύτης θέλει να απαλείψει το 1/4 γιαυτό επιλέγει ως λύση το 4, όμοια θα μπορούσε να επέλεγε $x=4t$ οπότε η εξίσωση θα γραφόταν $4t+t=15\Leftrightarrow t=3$, άρα $x=4t=4\cdot 3=12$

Πρόβλημα 6 από τον πάπυρο της Μόσχας

«*Ποιο το μήκος ενός ορθογωνίου παραλληλογράμμου αν το εμβαδόν του είναι 12 και το πλάτος του τα 3/4 του μήκους***»**

Οδηγίες	Με εξίσωση – έστω χ το μήκος
Βρες τον αντίστροφο του 3/4	$x\cdot\frac{3}{4}x=12\Leftrightarrow\frac{3}{4}\cdot x^2=12$
Το αποτέλεσμα είναι 4/3	
Πολλαπλασίασε το 4/3 με το 12	$x^2=\frac{4}{3}\cdot 12$
Το αποτέλεσμα είναι 16	$x^2=16$
Πάρε τη τετραγωνική ρίζα του 16	$x=4$ και $\frac{3}{4}\cdot 4=3$
Το αποτέλεσμα είναι 4 για το μήκος	
Και τα 3/4 αυτού δηλαδή 3 για το πλάτος	

Πρόβλημα πάπυρου του Βερολίνου

« *Το άθροισμα των εμβαδών δύο τετραγώνων είναι 100. Το τριπλάσιο της πλευράς του ενός είναι ίσο με το τετραπλάσιο της πλευρά του άλλου, ποιες είναι οι πλευρές των δύο τετραγώνων*.» τεχνική της **ψευδούς παραδοχής**

Με σύγχρονους τρόπους γραφής ουσιαστικά το πρόβλημα ανάγεται στην επίλυση του συστήματος

$$\begin{aligned} x^2+y^2&=100 \\ 3x&=4y \end{aligned}$$

<u>Οδηγίες</u>

Πάρε x=4 τότε y=3

Είναι $4^2+3^3=25\neq 100$

Βρες τις ρίζες των 25 και 100

Είναι 5 και 10 αντίστοιχα

Διαίρεσε το 10 με το 5

Είναι 2

<u>Με εξίσωση</u>

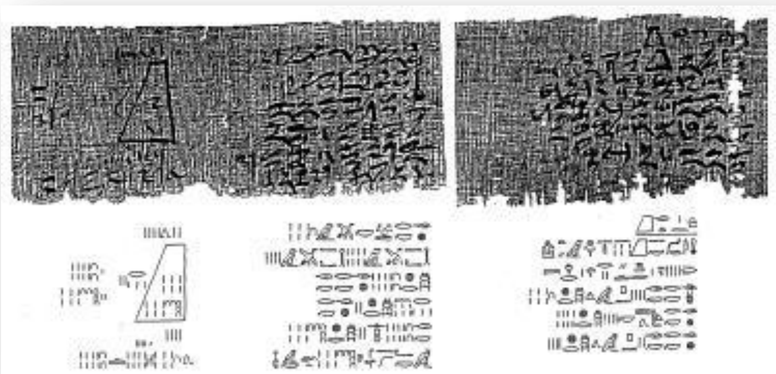
Η δεύτερη γράφεται $\frac{x}{4}=\frac{y}{3}=t$

Άρα $x=4t$, $y=3t$

Η 1$^{\eta}$ εξίσωση γράφεται :$16t^2+9t^2=100$

$25t^2=100 \Leftrightarrow t^2=4 \Leftrightarrow t=2$

Άρα οι πλευρές είναι $2\cdot 4=8$ και $2\cdot 3=6$



Ανάμεσα στα δύο μεγαλύτερα ποτάμια της μέσης ανατολής τον Τίγρη και τον Ευφράτη αναπτύχθηκε επί σειρά ετών πολλοί πολιτισμοί **Σουμέριοι – Ακκάδες - Χετταίοι –Ασσύριοι - Χαλδαίοι - Βαβυλώνιοι - Πέρσες** . Τα σπουδαιότερα μαθηματικά στοιχεία προέρχονται από την εποχή της Βαβυλωνιακής αυτοκρατορίας. Πρόκειται για πήλινες πλάκες γραμμένες με σφηνοειδή γραφή στις οποίες γίνεται χρήση του **εξηκονταδικού αριθμητικού συστήματος**. Οι χιλιάδες πινακίδες που βρέθηκαν χωρίζονται σε δύο ιστορικές περιόδους η πρώτη μεταξύ του 1830 π.χ και του 1530 π.χ. επί της **δυναστείας των Χαμουραμπί** και η δεύτερη περίοδος από την Ελληνιστική εποχή επί **δυναστείας των Σελευκιδών** περίπου το 311 π.χ. Στα προβλήματα η άγνωστη ποσότητα ονομάζονταν πλευρά ή αν είχαμε δύο αγνώστους πλευρά και μήκος. Ας σημειώσουμε ότι ενώ χρησιμοποιούσαν γεωμετρικούς όρους για τα διάφορα μεγέθη π.χ. για το x^2 χρησιμοποιούσαν το εμβαδόν ή για το x^3 τον όγκο, δεν δίσταζαν να αφαιρέσουν ή να προσθέσουν ετεροειδή μεγέθη. Ας δούμε μερικά κλασικά προβλήματα όπου περιγράφονται οι Βαβυλωνιακοί τρόποι επίλυσης εξισώσεων.

Πινακίδα Νο: 13901 Βρετανικού Μουσείου

« *Αν αφαιρέσουμε την πλευρά του τετραγώνου από το εμβαδόν του μένει 870, να βρεθεί η πλευρά του τετραγώνου*.»

<u>Οδηγίες</u>

Πάρε το συντελεστή 1 της πλευράς
Βρες το μισό του
Αποτέλεσμα 1/2=0,5
Πολλαπλασίασε το 0,5 με το 0,5
Αποτέλεσμα 0,25
Πρόσθεσε το 0,25 στο 870

Αποτέλεσμα 870,25

Βρες τη τετραγωνική ρίζα του 870,25
Το αποτέλεσμα είναι 29,5
Πάρε το 0,5 και πρόσθεσε το στο 29,5
Το μήκος είναι το 30

<u>Παρατηρήσεις</u>

Με τα βήματα γίνεται φανερό ότι γνώριζαν τύπο για την επίλυση εξίσωσης της μορφής $x^2 - ax = b$ ο οποίος είναι ο εξής :

$$x = \sqrt{(\frac{1}{2}a)^2 + b} + \frac{1}{2}a$$

Στις περιπτώσεις όπου ο άγνωστος x^2 έχει συντελεστή όπως για παράδειγμα στην εξίσωση $11x^2+7x=375$ τότε πολλαπλασίαζαν όλους τους όρους με το συντελεστή του x^2, οπότε έχουμε την εξίσωση $(11x)^2+7\cdot(11x)=4125$, η οποία είναι της προηγούμενης μορφής με άγνωστο $11x$.


Εύρεση τετραγωνικής ρίζας του 2

Οι βαβυλώνιοι λύνανε επίσης προβλήματα του τύπου :
«να βρεθούν δύο αριθμοί με άθροισμα 14 και γινόμενο 45»

<u>Οδηγίες</u>

Έστω οι αριθμοί x και y
Γράφονται 7+α και 7-α
Οπότε (7+α)(7-α)=45
Η οποία λύνεται κατά τα γνωστά δηλαδή : $49-\alpha^2=45 \Leftrightarrow \alpha^2=4 \Leftrightarrow \alpha=2$.
Άρα οι αριθμοί είναι οι x=9 και y=5

Οι μαθηματικοί εκείνη της περιόδου είχαν συντάξει πίνακες κύβων , οπότε έλυναν προβλήματα όπως :
Να βρεθεί η πλευρά κύβου που έχει όγκο 0,125.
Το πρόβλημα ανάγεται στην επίλυση της εξίσωσης : $x^3=0{,}125$ που αποδίδει λύση $x=0{,}5$.
Στην περίπτωση όπου ο αριθμός που αναζητούσαν την κυβική ρίζα βρισκόταν ανάμεσα σε δύο τιμές του πίνακα των κύβων τότε προσέγγιζαν την ζητούμενη κυβική ρίζα κάνοντας ουσιαστικά γραμμική παρεμβολή μεταξύ των δύο πλησιέστερων τιμών.

Είχαν συντάξει όμως και πίνακες των αθροισμάτων n^3+n^2 για $n=\{1,2,3...,30\}$. Χρησιμοποιώντας τους πίνακες αυτούς έλυναν εξισώσεις της μορφής :
Π.χ. $x^3+x^2=252$ που αποδίδει λύση την x=6
Αλλά και εξίσωση της μορφής $ax^3+bx^2=c$, την οποία μετασχημάτιζαν. Συγκεκριμένα πολλαπλασίαζαν όλους τους όρους με το $\frac{a^2}{b^3}$ με τον τρόπο αυτό η εξίσωση γράφεται $\frac{a^3}{b^3}x^3+\frac{a^2}{b^2}x^2=c$ η οποία είναι της μορφής $y^3+y^2=c$ αν θέσουμε $\frac{a}{b}x=y$.

2. Τα μαθηματικά της Αρχαίας Ελλάδας

Δεν υπάρχει βιβλίο που να εξιστορεί μαθηματικές ιστορίες, και να μη κάνει αναφορά στην πιο εκπληκτική ιστορία από όλες. Τη δημιουργία και ανάπτυξη της μαθηματικής επιστήμης στην Αρχαία Ελλάδα.

Βρισκόμαστε στις αρχές του 6ου αιώνα. Εκείνη την εποχή μεγαλουργούν στον χώρο του Αιγαίου πανεπιστήμονες , και δημιουργούν χώρους κάτι σαν τα σύγχρονα πανεπιστήμια , χωρίς να χάσουν την ενότητα της γνώσης. Τα μαθηματικά, η μουσική , η φιλοσοφία , η ρητορική δεν είναι κομμάτια ξένα αλλά μία ολότητα που σκοπό έχει τη διδασκαλία του μέτρου και της αρετής . Είναι ένα σύστημα ηθικής με σκοπό την εξύψωση του ανθρώπου, με σεβασμό στο περιβάλλον και στους άλλους ανθρώπους ,με ανεκτικότητα και χωρίς δογματισμούς.

Αλλά γιατί στο χώρο αυτόν , να αναπτυχθούν τα Μαθηματικά ;

Γιατί οι Έλληνες αγαπούν τη συζήτηση…

(Η επόμενη παράγραφος είναι από το βιβλίο του Ντένι Γκετζ «Το Θεώρημα του παπαγάλου» Εκδόσεις Πόλις)

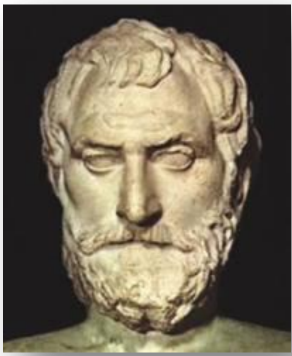
Πράγματι ο Θαλής ,ο Πυθαγόρας ,ο Ιπποκράτης ο Χίος, ο Δημόκριτος , ο Θεαίτητος , ο Αρχύτας ο Ταραντινός , και τόσοι άλλοι Έλληνες στοχαστές που διαμόρφωσαν τα Μαθηματικά που γνωρίζουμε σήμερα δεν ήταν ούτε σκλάβοι ούτε κρατικοί υπάλληλοι. Στην Ελλάδα του τότε δεν υπάρχει ούτε βασιλιάς ούτε μέγας ιερέας για να αποφασίζει τη φύση της δουλείας τους ή να βάλει όρια στις μελέτες τους. Οι Έλληνες διανοητές είναι ελεύθεροι άνθρωποι. Αλλά … οφείλουν να υπερασπιστούν την άποψη τους μπροστά σε συναδέλφους τους. …. Στην Αθήνα γινόντουσαν συνελεύσεις 7-8000 ατόμων και καθένας με τη σειρά του μπορούσε να πάρει το λόγο. Δυναμικά επιχειρήματα διασταυρώνονταν για να καταφέρουν να κερδίσουν τη συναίνεση και τελικά την πλειοψηφία. ….. Οι Έλληνες φιλόσοφοι , πολιτικοί και νομικοί διέπρεπαν στην τέχνη της πειθούς, αλλά η πρακτική τους είχε κάποια όρια. Η πειθώ δεν απαλείφει οριστικά την αμφιβολία .

Τα Μαθηματικά όμως απαιτούν κάτι περισσότερο από την απλή πειθώ. Ζητούν το αναμφισβήτητο. Οι Έλληνες μαθηματικοί θέλουν να πείσουν με τέτοιο τρόπο, που κανείς να μην μπορεί να αμφισβητήσει τα συμπεράσματά τους και να μπορούν ανά πάσα στιγμή να άρουν οποιαδήποτε αμφιβολία για τους ισχυρισμούς τους.

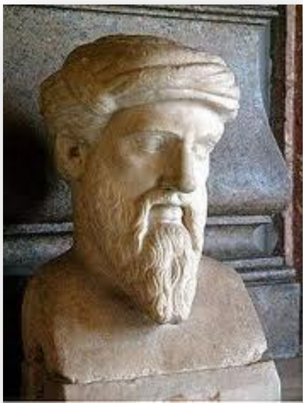
Θέλουν λοιπόν αποδείξεις.

Αυτή είναι η προσφορά των πανεπιστημόνων της εποχή εκείνης στον σύγχρονο άνθρωπο. Άνετα θα μπορούσαν ακόμα και στην εποχή μας να δίνουν διαλέξεις για την φύση των όντων και των επιστημών στα σπουδαιότερα πανεπιστήμια του σήμερα και τα αμφιθέατρα σίγουρα θα ήταν γεμάτα.

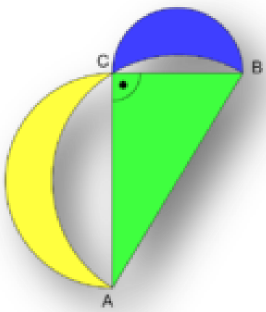
Γραπτά κείμενα που να περιγράφουν την ανάπτυξη των ελληνικών μαθηματικών πριν το 300 π.χ. δυστυχώς δεν έχουν σωθεί. Η πληρέστερη αναφορά γίνεται στα σχόλια του **Πρόκλου** στο πρώτο βιβλίο των Στοιχείων του Ευκλείδη που γράφηκαν τον 5^{ο} αιώνα μ.Χ. 1000 χρόνια δηλαδή μετά τα σχολιαζόμενα έργα.



Όπως και να έχει, σύμφωνα με τις σωζόμενες αναφορές ο αρχαιότερος έλληνας μαθηματικός αναφέρεται ότι είναι ο **Θαλής ο Μιλήσιος (624-547 π.χ.)** Λέγεται ότι προέβλεψε μία ηλιακή έκλειψη το 585 π.χ., εφάρμοσε κριτήρια ομοιότητας τριγώνων για να υπολογίσει τις αποστάσεις των πλοίων από το λιμάνι. Αποκάλυψε πλήθος θεωρημάτων όπως ότι οι παρά τη βάση γωνίες ισοσκελούς τριγώνου ότι είναι ίσες ή ότι η διάμετρος του κύκλου τον χωρίζει σε δύο ίσα μέρη.

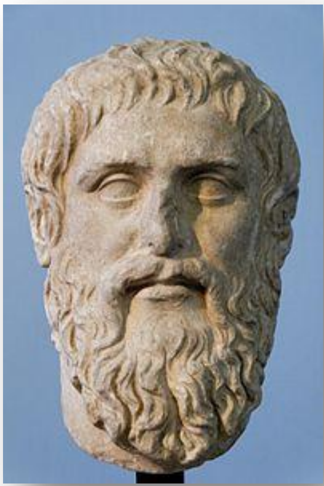


Ο επόμενος μεγάλος μαθηματικός είναι αναμφισβήτητα **ο Πυθαγόρας ο Σάμιος (572-497 π.χ.)** Αφού επισκέφτηκε Αίγυπτο και Βαβυλώνα εγκαταστάθηκε στην Κάτω Ιταλία στην πόλη Κρότωνα .Εκεί ίδρυσε μία φιλοσοφική σχολή . Δεν διασώζονται κείμενα που να αποδίδονται στον ίδιο ή σε μαθητές του. Τα πάντα βασίζονται στους αριθμούς υποστήριζαν « ο αριθμός είναι η ουσία των πραγμάτων». Για παράδειγμα οι κινήσεις των πλανητών περιγράφονται με τη βοήθεια αριθμητικών λόγων. Οι μουσικές αρμονίες εξαρτώνται από αριθμητικούς λόγους. Στο ίδιο αποδίδεται το περίφημο **Πυθαγόρειο θεώρημα**. Το θεώρημα αυτό ήταν και η αιτία να εγκαταλείψουν οι Πυθαγόρεια την βασική αρχή τους ότι κάθε μήκος μπορεί να μετρηθεί με τη λογική ότι το μήκος του θα είναι ρητό πολλαπλάσιο του μέτρου σύγκρισης που έχουμε επιλέξει. Όμως η διαγώνιος ενός ορθογωνίου τριγώνου με κάθετες πλευρές ίσες με την μονάδα είναι ένας **άρρητος αριθμός.**



Στα μέσα του 5^{ου} αιώνα παρατηρείται μία στροφή προς την απόδειξη και σταδιακά να απομακρύνονται από τους αριθμητικούς υπολογισμούς και την αριθμολογία των Πυθαγόρειων. Κεντρικός στόχος των ελληνικών μαθηματικών πλέον είναι γεωμετρική επίλυση προβλημάτων όπως ο **τετραγωνισμός του κύκλου, ο διπλασιασμός του κύβου ή η τριχοτόμηση οποιασδήποτε γωνίας**.

Ο **Ιπποκράτης ο Χίος (- , 470 π.χ.)** ανακαλύπτει μεικτόγραμμα σχήματα που τετραγωνίζονται υπολογίζεται δηλαδή το εμβαδόν τους με τη βοήθεια του εμβαδού ενός τριγώνου άρα και συναρτήσει του εμβαδού ενός τετραγώνου.



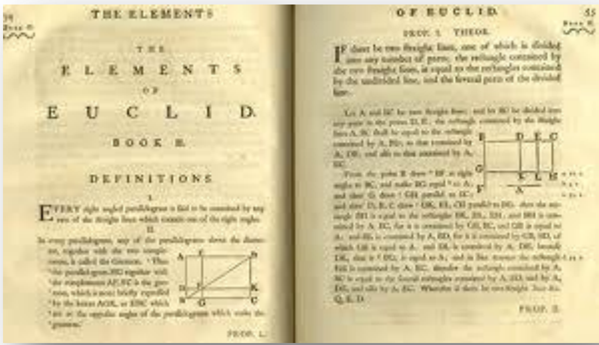
Μεγάλη πρόοδος παρουσιάζεται χάρη κυρίως στην Ακαδημία που δημιουργείται στην Αθήνα από τον φιλόσοφο **Πλάτωνα (429-347 π.χ.)** Στο χώρο αυτό συγκεντρώθηκαν φιλόσοφοι από ολόκληρο τον Ελληνικό κόσμο και δίδασκαν Μαθηματικά και Φιλοσοφία. Στην είσοδο της ακαδημίας – λέγεται- ότι ήταν χαραγμένη η φράση «**ΜΗΔΕΙΣ ΑΓΕΩΜΕΤΡΗΤΟΣ ΕΙΣΗΤΩ**» . Στο κλασικό έργο « η Πολιτεία» ο Πλάτωνας περιγράφει την μαθηματική παιδεία ως ένα συνδυασμό διδασκαλίας των γνωστικών κλάδων της αριθμητικής, της επιπεδομετρίας, της στερεομετρίας της αστρονομίας και της Μουσικής.

«Η πλατωνική φιλοσοφία χωρίζει τον κόσμο σε μία υλική και μία ιδεατή σφαίρα ύπαρξης. Αυτό γίνεται με την εισαγωγή της θεωρίας των ***ιδεών****, οι οποίες κατά τον Πλάτωνα είναι τα αιώνια αρχέτυπα των αισθητών, υλικών πραγμάτων, υπερβατικές φόρμες που γίνονται αντιληπτές μόνο με τη λογική και όχι με τις αισθήσεις. Τα αισθητά αντικείμενα τα θεωρεί κατώτερα, υλικά και φθαρτά είδωλα των ιδεών, οι οποίες τα μορφοποιούν».*

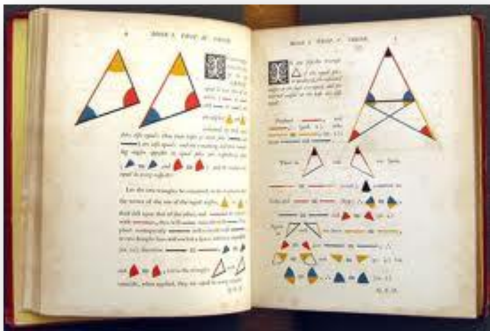
Έτσι άλλο πράγμα ο κύκλος που σχεδιάζουμε και άλλο ο ιδεατός κύκλος που υπάρχει στο νου και είναι το αληθινό αντικείμενο της γεωμετρικής μελέτης.

Συνεχιστής του έργου του Πλάτωνα ήταν ο **Αριστοτέλης (384-322 π.χ.)** όπου βρέθηκε στην ακαδημία από τα δεκαοκτώ του χρόνια ως το θάνατο του Πλάτωνα το 347. Μετά προσκεκλημένος του βασιλιά της Μακεδονίας Φίλιππο αναλαμβάνει την εκπαίδευση του μεγάλου Αλεξάνδρου στην Μίεζα. Επιστρέφει στην Αθήνα όπου ιδρύει φιλοσοφική σχολή το ονομαστό «Λύκειον». Στα έργα του πρώτος αυτός κωδικοποίησε τις αρχές που διέπουν τα λογικά επιχειρήματα. Διακρίνει τις βασικές αλήθειες που συνάδουν με κάθε επιστήμη και εκείνων που είναι κοινές για όλες. Οι πρώτες ονομάζονται αιτήματα και οι δεύτερες αξιώματα.

**Λεπτομέρεια από το έργο
« ακαδημία των Αθηνών » του Ραφαήλ .
Παρουσιάζονται : ο Πλάτων (αριστερά) δείχνει
προς τα πάνω, τον ιδεατό κόσμο ενώ ο
Αριστοτέλης (δεξιά) προς τα κάτω δηλώνοντας
την πεποίθηση του για την κατάκτηση της γνώσης
μέσω της εμπειρίας και της παρατήρησης**



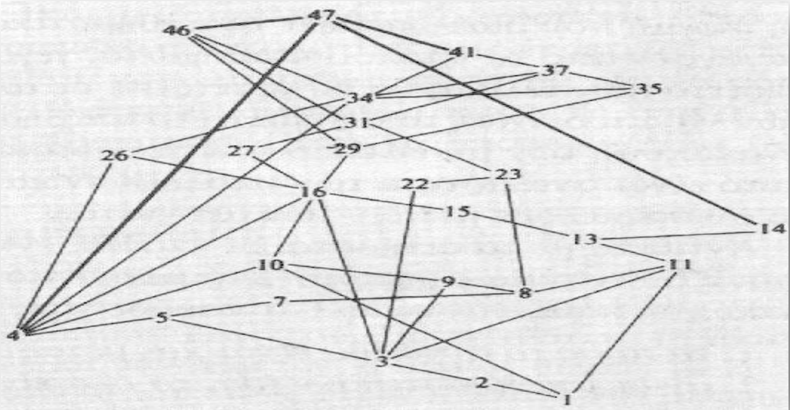
Κάτι εκπληκτικό συνέβη το 300π.χ. Ο «πρύτανης του πανεπιστημίου της Αλεξάνδρειας » **ο Ευκλείδης (325 – 265 π.χ.),** συγκέντρωσε όλα τα επιτεύγματα της ελληνικής μαθηματικής επιστήμης σε δεκατρία βιβλία και συνέγραψε τα λεγόμενα **Στοιχεία**.



Όμως ο τρόπος που έγραψε το βιβλίο αυτό ,είναι ο ίδιος που μέχρι σήμερα θεωρούμε ως ο ιδανικός τρόπος συγγραφής οποιουδήποτε επιστημονικού πονήματος. Αρχικά έδινε τους όρους (**ορισμούς**), μετά το απολύτως αναγκαίο αριθμό αξιωμάτων (**αιτήματα**), μετά τις λεγόμενες **κοινές έννοιες** αναπόδεικτες ως προφανείς προτάσεις και ακολούθως προτάσεις που αποδεικνύονται από τα προηγούμενα , τα λεγόμενα **θεωρήματα** ,τελειώνοντας κάθε φορά την αποδεικτική διαδικασία με τις περίφημες εκφράσεις του :

ὅπερ ἔδει ποιῆσαι όταν επρόκειτο για κατασκευή,

ὅπερ ἔδει δεῖξαι, όταν επρόκειτο για απόδειξη.



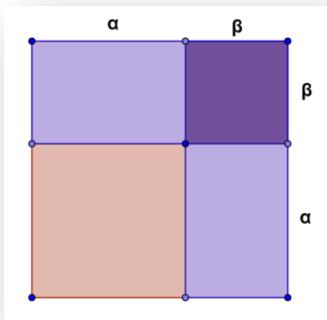
Το παραπάνω σχήμα δείχνει τον τρόπο της αποδεικτικής διαδικασίας που χρησιμοποιείται στα Στοιχεία του Ευκλείδη . Οι αριθμοί δηλώνουν την αρίθμηση των προτάσεων από το βιβλίο Ι των Στοιχείων με σκοπό να αποδειχθεί τελικά η $47^{η}$ πρόταση το περίφημο πυθαγόρειο θεώρημα. (Από το « The Greek Concept of proof» σειρά MA290 : Topics in the history of Mathematics, του ανοικτού Αγγλικού Πανεπιστημίου)

Ολόκληρο το έργο των Στοιχείων αποτελεί τη πρώτη συνεκτική δομή της γεωμετρικής σκέψης. Αλλά είναι εύκολο να μετατρέψει κανείς τα διάφορα αποτελέσματα σε απλούς αλγεβρικούς κανόνες καθώς επίσης σε διαδικασίες επίλυσης δευτεροβάθμιων εξισώσεων. Έτσι δεν είναι παράξενο να μιλάμε για μία γεωμετρική άλγεβρα που εμπεριέχεται στα 13 βιβλία των στοιχείων του Ευκλείδη. Ας δούμε μερικά παραδείγματα :

Βιβλίο ΙΙ πρόταση 4

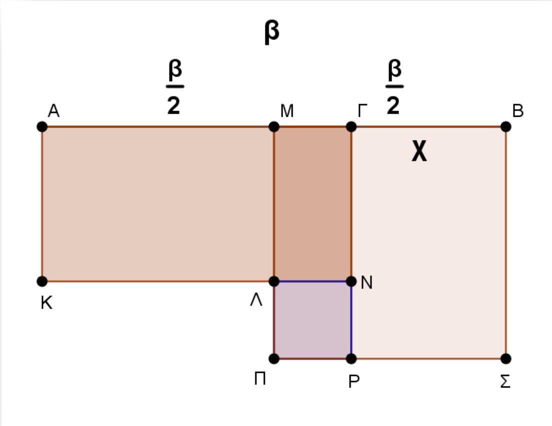
δ΄.[4]
Ἐὰν εὐθεῖα γραμμὴ τμηθῇ, ὡς ἔτυχεν, τὸ ἀπὸ τῆς ὅλης τετράγωνον ἴσον ἐστὶ τοῖς τε ἀπὸ τῶν τμημάτων τετραγώνοις καὶ τῷ δὶς ὑπὸ τῶν τμημάτων περιεχομένῳ ὀρθογωνίῳ.

Η πρόταση αυτή παρουσιάζει γεωμετρικά την γνωστή ταυτότητα : $(\alpha+\beta)^2 = \alpha^2 = 2\alpha\beta + \beta^2$



Βιβλίο ΙΙ πρόταση 5

ε΄.[5]
Ἐὰν εὐθεῖα γραμμὴ τμηθῇ εἰς ἴσα καὶ ἄνισα, τὸ ὑπὸ τῶν ἀνίσων τῆς ὅλης τμημάτων περιεχόμενον ὀρθογώνιον μετὰ τοῦ ἀπὸ τῆς μεταξὺ τῶν τομῶν τετραγώνου ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς ἡμισείας τετραγώνῳ.

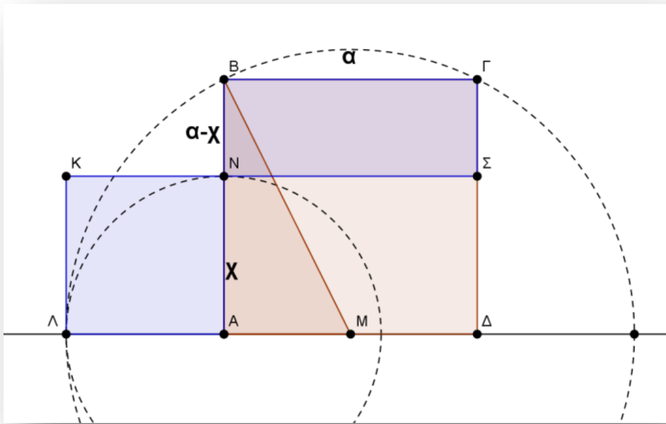


Σύμφωνα με τη πρόταση το ευθύγραμμο τμήμα ΑΒ=β χωρίζεται στη μέση ΑΜ=ΜΒ=β/2 και μετά θεωρούμε σημείο Γ που χωρίζει το ΑΒ σε δύο άνισα τμήματα ΑΓ και ΓΒ. Τότε το ορθογώνιο με πλευρές τα άνισα τμήματα δηλαδή το ΑΚΝΓ μαζί με το τετράγωνο που ορίζουν τα σημεία ΜΓ δηλαδή το ΛΝΠΡ είναι ίσο με το τετράγωνο με πλευρά το μισό του αρχικού τμήματος δηλαδή το ΜΒΣΠ.
Με σύγχρονους συμβολισμούς θα έχουμε :

$$(\mathrm{A\Gamma NK})+(\mathrm{\Lambda NP\Pi})=(\mathrm{MB\Sigma\Pi})\Leftrightarrow(\beta-x)\cdot x+\left(\frac{\beta}{2}-x\right)^2=\left(\frac{\beta}{2}\right)^2$$

Βιβλίο ΙΙ πρόταση 11

ια΄.[11]
Τὴν δοθεῖσαν εὐθεῖαν τεμεῖν ὥστε τὸ ὑπὸ τῆς ὅλης καὶ τοῦ ἑτέρου τῶν τμημάτων περιεχόμενον ὀρθογώνιον ἴσον εἶναι τῷ ἀπὸ τοῦ λοιποῦ τμήματος τετραγώνῳ.



Σύμφωνα με την πρόταση πρέπει να χωρίσουμε το ευθύγραμμο τμήμα ΑΒ=α σε δύο τμήματα το ΑΝ=χ και το ΝΒ=α-χ ώστε το εμβαδόν του ορθογωνίου που σχηματίζουν τα τμήματα α και α-χ να είναι ίσο με το εμβαδόν του τετραγώνου πλευράς χ.
Δηλαδή πρέπει να είναι :

$$(\mathrm{B\Gamma\Sigma N})=(\mathrm{KNA\Lambda})\Leftrightarrow\alpha(\alpha-x)=x^2$$

Η εξίσωση αυτή είναι ισοδύναμη με την $x^2+\alpha x-\alpha^2=0$ η οποία αν λυθεί με τον γνωστό τύπο της διακρίνουσας μας δίνει ότι :

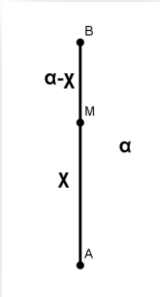
$$x=\frac{-\alpha+\sqrt{\alpha^2+4\alpha^2}}{2}=\frac{\alpha\sqrt{5}}{2}-\frac{\alpha}{2}$$

Για να δούμε πως κατασκευάζει ο Ευκλείδης το τμήμα χ.
Κατασκευάζει τετράγωνο ΑΒΓΔ. Θεωρεί το μέσο Μ της ΑΔ και κατασκευάζει το ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΜ με υποτείνουσα ΒΜ. Από Πυθαγόρειο θεώρημα έχουμε ότι $\mathrm{BM}^2=\alpha^2+(\frac{\alpha}{2})^2 \Leftrightarrow \mathrm{BM}=\sqrt{\alpha^2+\frac{\alpha^2}{4}} \Leftrightarrow \mathrm{BM}=\frac{\alpha\sqrt{5}}{2}$

Με κέντρο Μ και ακτίνα ΜΒ γράφει κύκλο ώστε να «μεταφέρει» το τμήμα αυτό πάνω στην ΑΔ και συγχρόνως να σχηματιστεί το τμήμα $\mathrm{A\Lambda}=\frac{\alpha\sqrt{5}}{2}-\mathrm{AM}=\frac{\alpha\sqrt{5}}{2}-\frac{\alpha}{2}$ το οποίο είναι και το ζητούμενο. Μετά με κέντρο το Α και ακτίνα το ΑΛ «μεταφέρει» το ζητούμενο τμήμα στο ΑΒ ώστε να ολοκληρώσει την κατασκευή.

Βιβλίο VI πρόταση 30

λ΄.[30]
Τὴν δοθεῖσαν εὐθεῖαν πεπερασμένην ἄκρον καὶ μέσον λόγον τεμεῖν.



Ουσιαστικά πρόκειται για την ίδια κατασκευή αφού το ζητούμενο είναι βρούμε σημείο Μ στο τμήμα ΑΒ ώστε να ισχύει :
$\frac{\mathrm{AB}}{\mathrm{MA}}=\frac{\mathrm{MA}}{\mathrm{MB}} \Leftrightarrow \frac{\alpha}{x}=\frac{x}{\alpha-x} \Leftrightarrow x^2=\alpha\cdot(\alpha-x) \Leftrightarrow x^2+\alpha\cdot x-\alpha^2=0$ Ο λόγος $\frac{\alpha}{x}=\frac{\sqrt{5}+1}{2}$ =1,618.. είναι γνωστός ως **χρυσή τομή.**

3. Από τον Αρχιμήδη και τον Απολλώνιο μέχρι τον Διόφαντο

Σύμφωνα με τον μύθο στο ιερό νησί των Ελλήνων Δήλος, όπου υπήρχε και ναός του θεού Απόλλωνα του θεού του φωτός, της γνώσης, έπεσε λοιμός. Οι κάτοικοι αρρώσταιναν, αποφάσισαν λοιπόν να στείλουν αντιπροσωπεία στο μαντείο των Δελφών για να τους πει τι έπρεπε να κάνουν ώστε να αποχτήσουν ξανά την εύνοια του θεού που μάλλον είχαν χάσει. Η Πυθία τους κάλεσε να διπλασιάσουν τον όγκο του βάθρου πάνω στο οποίο υπήρχε το άγαλμα του θεού στο κεντρικό ιερό του νησιού διατηρώντας όμως το κυβικό σχήμα του. Στην αρχή οι Δήλιοι θεώρησαν ότι αυτό ήταν κάτι απλό, θα διπλασίαζαν τις ακμές του κύβου, αλλά αλλοίμονο αν έκαναν κάτι τέτοιο ο όγκος του βάθρου θα οκταπλασιάζονταν. Απελπισμένοι όπως ήταν έστειλαν αντιπροσωπία στην Ακαδημία του Πλάτωνος για να τους λύσουν το πρόβλημα που είχε προκύψει. Κατά τον μύθο λέγεται ότι ο ίδιος ο Πλάτωνας έδωσε μία λύση (όπως θα δούμε παρακάτω) συγχρόνως όμως τους επίπληττε λέγοντας τους ότι ο θεός έδωσε έναν τέτοιο χρησμό για ασχοληθούν με την μαθηματική επιστήμη και να μη την παραμελούν.

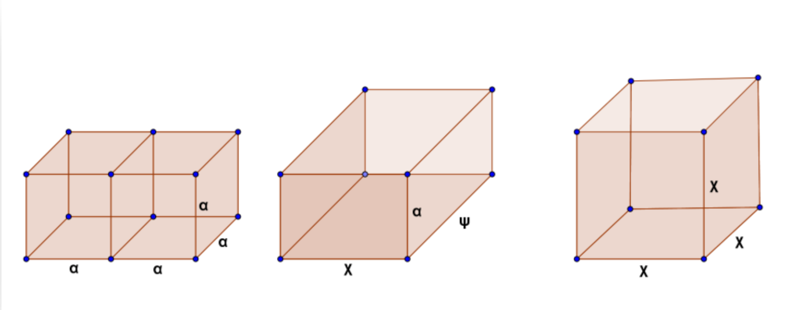
Ανεξάρτητα αν είναι αληθινά ή όχι τα όσα αναφέρονται στον μύθο το σίγουρο είναι ότι τέτοια δυσεπίλυτα προβλήματα είναι οι αιτίες όπου ο άνθρωπος αντιλαμβάνεται ότι όσα ξέρει δεν είναι αρκετά και πρέπει να ψάξει. Υπάρχουν τρία προβλήματα που αναφέρονται ως **άλυτα προβλήματα της αρχαιότητας**. Το Δήλιο πρόβλημα που έχουμε ήδη αναφέρει δηλαδή το πρόβλημα του **διπλασιασμού του κύβου**. Το πρόβλημα της **τριχοτόμησης οποιασδήποτε γωνίας**. Και το πρόβλημα του **τετραγωνισμού του κύκλου**, δηλαδή η κατασκευή τετραγώνου που να έχει το ίδιο εμβαδόν με δοσμένο κυκλικό δίσκο.

Γιατί όμως ήταν άλυτα;

Γιατί τα μαθηματικά που μέχρι εκείνη τη στιγμή γνώριζαν οι άνθρωποι δεν έφθαναν για να δώσουν απαντήσεις. Έπρεπε να βρεθούν καινούργια μαθηματικά, νέες τεχνικές, να έρθουν σε σύγκρουση με όσα στερεότυπα είχαν για τα μαθηματικά και υπήρχαν τέτοια.

Στην αρχαία Ελλάδα της κλασικής περιόδου μία κατασκευή θεωρείτο σωστή – παραδεκτή- αν γινόταν μόνο με τα πιο βασικά γεωμετρικά όργανα, τον διαβήτη και τον κανόνα (ένα απλό κομμάτι ξύλο χωρίς υποδιαιρέσεις και διαβαθμίσεις). Όμως τα προβλήματα αυτά δεν μπορούσαν να λυθούν με τους περιορισμούς αυτούς.

Ας παρακολουθήσουμε τις παρακάτω σκέψεις :



Θέλουμε να φτιάξουμε ένα στερεό με όγκο διπλάσιο του όγκου ενός κύβου πλευράς α. Άρα το στερεό θα έχει όγκο όσο το πρώτο στερεό του διπλανού σχήματος.

Αν υποθέσουμε ότι και το στερεό του δεύτερου σχήματος έχει όγκο $2\alpha^3$ τότε επειδή η μία ακμή του είναι α, θα πρέπει να ισχύει $x \cdot y = 2\alpha^2 \Leftrightarrow \frac{\alpha}{x} = \frac{y}{2\alpha}$

Αν και το τρίτο σχήμα έχει τον ίδιο όγκο, επειδή τώρα πρόκειται για κύβο ακμής χ θα ισχύει ότι : $x^2 = \alpha \cdot y \Leftrightarrow \frac{\alpha}{x} = \frac{x}{y}$

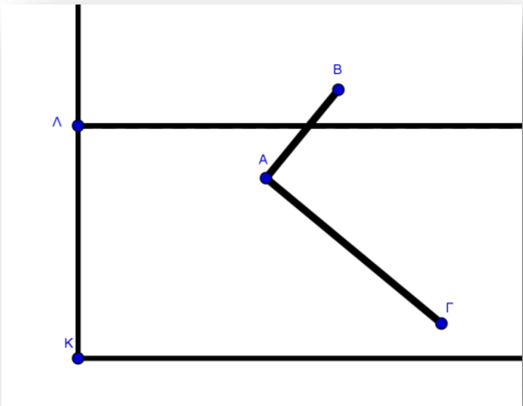
Οπότε από τις δύο σχέσεις καταλήγουμε ότι θα είναι $\frac{\alpha}{x} = \frac{x}{y} = \frac{y}{2\alpha}$

Το πρόβλημα του διπλασιασμού του κύβου ουσιαστικά πρόκειται για επίλυση μιας απλής κυβικής εξίσωσης αφού ανάγεται στην επίλυση της εξίσωσης $x^3 = 2\alpha^3$. Στην εποχή μας ένας μαθητής Α’ Λυκείου θα έλεγε ότι $x = \alpha\sqrt[3]{2}$, αλλά **πως μπορούμε να κατασκευάσουμε ένα τέτοιο τμήμα αν το μόνο που γνωρίζουμε είναι το τμήμα α;**

Ο Ιπποκράτης ο Χίος – πιθανόν με την σειρά των σκέψεων που προαναφέραμε – έκανε μία αναγωγή του προβλήματος της κατασκευής αυτής στην **κατασκευή δύο τμημάτων x, y που να βρίσκονται σε συνεχιζόμενη αναλογία μεταξύ των τμημάτων με μήκη α και 2α .**

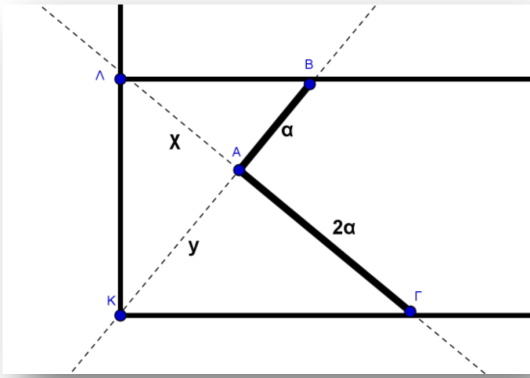
Ας δούμε μερικές λύσεις που δόθηκαν :

<u>1η Λύση – από τον Πλάτωνα</u>



Στο διπλανό σχήμα έχουμε δύο κάθετα τμήματα ΑΒ και ΑΓ με μήκη α και 2α αντίστοιχα.

Συγχρόνως υπάρχει ένα σύστημα τριών ράβδων κάθετων ανά δύο όπου η μία ράβδος μπορεί να ανεβοκατεβεί – μεταβάλλοντας τη θέση του Λ διατηρώντας την καθετότητα.



Στρέφοντας κατάλληλα το ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ και την αρθρωτή ράβδο τοποθετούμε το σύστημα ώστε η προέκταση της ΑΓ να διέρχεται από το Λ και η προέκταση της ΑΒ από το Κ.

Έτσι θα έχουμε τελικά ένα σχήμα σαν το διπλανό. Στα ορθογώνια τρίγωνα ΚΛΒ και ΛΚΓ ισχύουν οι σχέσεις : $x^2 = \alpha \cdot y$ και $y^2 = x \cdot 2\alpha$ απ' όπου απαλείφοντας το y έχουμε

$$x^4 = \alpha^2 \cdot y^2 \Leftrightarrow x^4 = \alpha^2 \cdot x \cdot 2\alpha \Leftrightarrow x^3 = 2\alpha^3$$

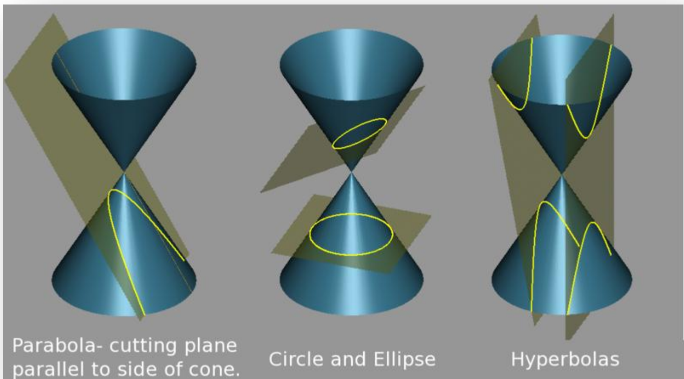
Άρα το ζητούμενο τμήμα χ είναι το ΛΑ.

Με την κατασκευή αυτή χρησιμοποιούμε ράβδους , βάζουμε σημάδια, εκτελούμε στροφές ολισθήσεις, έως ότου ικανοποιηθούν κάποιες συνθήκες. Τέτοιες λύσεις οι αρχαίοι τις ονόμαζαν **μηχανικές**, ή λύσεις με **χρήση νεύσης** – κίνησης. Τέτοιες λύσεις δεν ήταν αποδεκτές από την μαθηματική κοινότητα αφού ξέφευγαν από τους περιορισμούς αναφορικά με τη χρήση του κανόνα και του διαβήτη.

Αρχιμήδης
«Μη μου τους κύκλους τάραττε »
λέγεται ότι είπε στον Ρωμαίο στρατιώτη
που πήγε να τον συλλάβει.

2η Λύση : με χρήση κωνικών τομών

Όπως είπαμε η λύση του προβλήματος που αντιμετωπίζουμε δεν μπορεί να λυθεί με συμβατικούς τρόπους. Πρέπει να βρεθούν νέες καμπύλες – νέα μαθηματικά. Δύο μεγάλοι μαθηματικοί ο **Αρχιμήδης ο Συρακούσιος (287-212 π.χ.)** και ο **Απολλώνιος από την Πέργη της Μικράς Ασίας (250-175 π.χ.)** ασχολήθηκαν με καμπύλες που σχηματίζονται από την τομή ενός κώνου με ένα επίπεδο. Οι καμπύλες αυτές ονομάστηκαν κωνικές τομές και είναι ο κύκλος , η παραβολή, η έλλειψη και η υπερβολή.

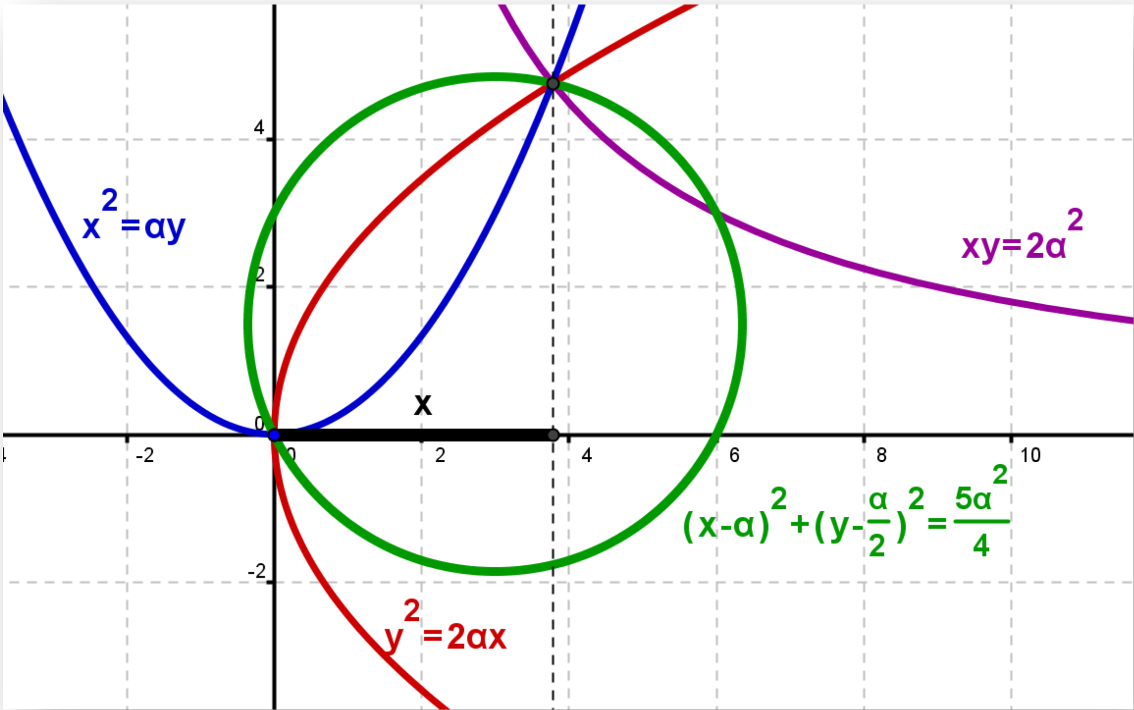


Απολλώνιος ο Περγαίος

Η ιδέα ότι οι καμπύλες αυτές μπορούν να λύσουν το πρόβλημα του διπλασιασμού του κύβου είχε αναπτυχθεί από τον 4 π.χ. αιώνα από τον μαθηματικό Μέναιχμο αφού από την εξίσωση $\frac{\alpha}{x}=\frac{x}{y}=\frac{y}{2\alpha}$ μπορούμε να πάρουμε τις ισότητες :

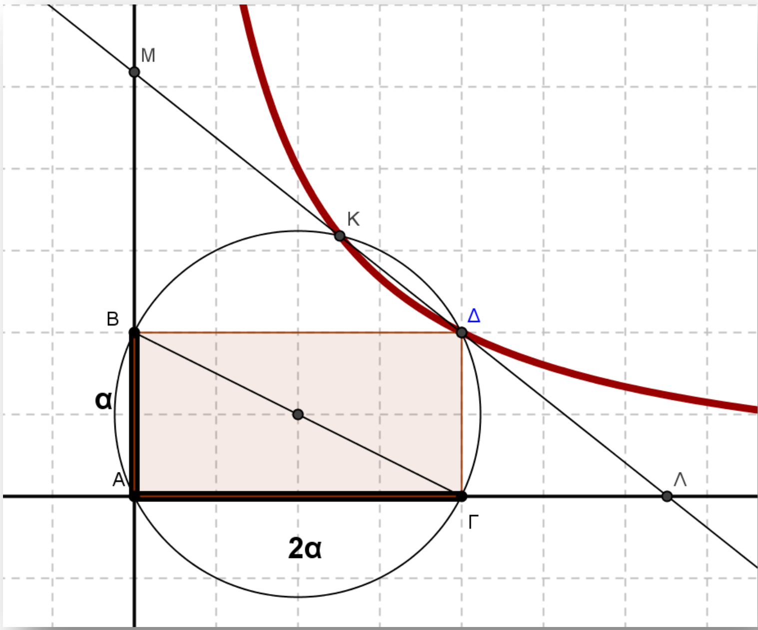
$x^2=\alpha\cdot y$ και $y^2=2\alpha\cdot x$ που παριστάνουν παραβολές , $x\cdot y=2\alpha^2$ που παριστάνει υπερβολή αλλά και από συνδυασμό τους μπορούμε να καταλήξουμε και στην ισότητα $x^2+y^2-2\alpha x-\alpha y=0\Leftrightarrow(x-\alpha)^2+(y-\frac{\alpha}{2})^2=\frac{5\alpha^2}{4}$ που παριστάνει κύκλο.

Οπότε το ζητούμενο τμήμα x μπορεί να προκύψει ως η τετμημένη του σημείου τομής δύο από τις παραπάνω καμπύλες.



Επειδή στα προηγούμενα χρησιμοποιούμε σύγχρονο μαθηματικό συμβολισμό το ερώτημα είναι πως έλυναν τα θέματα αυτά οι αρχαίοι με χρήση μόνο γεωμετρικών μεθόδων και συμβολισμών;
Ας δούμε τη λύση που προτείνει ο Απολλώνιος στο κλασικό έργο του «**Κωνικά**» .

Κατασκευάζουμε ορθογώνιο παραλληλόγραμμο ΑΒΔΓ με διαστάσεις ΑΒ=α και ΑΓ=2α και τον περιγεγραμμένο κύκλο του διαμέτρου ΒΓ.



Στη συνέχεια κατασκευάζουμε υπερβολή που διέρχεται από το σημείο Δ και έχει ασύμπτωτες τους άξονες. ((Μία τέτοια κατασκευή περιγράφεται στην πρόταση ΙΙ-4 στα κωνικά του Απολλώνιου.)

Αν ονομάσουμε Κ το δεύτερο κοινό σημείο κύκλου και υπερβολής τότε θα ισχύουν :

$$\mathrm{\Lambda A}\cdot\mathrm{\Lambda\Gamma}=\mathrm{\Lambda\Delta}\cdot\mathrm{\Lambda K} \quad \text{και} \quad \mathrm{MA}\cdot\mathrm{MB}=\mathrm{MK}\cdot\mathrm{M\Delta}$$

καθώς επίσης : ΜΚ=ΔΛ άρα και ΛΚ=ΜΔ (Πρόταση ΙΙ-8 στα κωνικά)

Οπότε έχουμε ότι : $\mathrm{\Lambda A}\cdot\mathrm{A\Gamma}=\mathrm{MA}\cdot\mathrm{MB} \Leftrightarrow \dfrac{\mathrm{\Lambda A}}{\mathrm{AM}}=\dfrac{\mathrm{MB}}{\mathrm{\Lambda\Gamma}} \quad (1)$

Από ομοιότητα των σχηματιζόμενων ορθογωνίων τριγώνων ισχύουν :

$$\frac{\mathrm{A\Lambda}}{\mathrm{AM}}=\frac{\mathrm{B\Delta}}{\mathrm{BM}}=\frac{\mathrm{\Gamma\Lambda}}{\mathrm{\Gamma\Delta}} \Leftrightarrow \frac{\mathrm{A\Lambda}}{\mathrm{AM}}=\frac{2\alpha}{\mathrm{BM}}=\frac{\mathrm{\Gamma\Lambda}}{\alpha} \quad (2)$$

Από (1) και (2) έχουμε τελικά : $\dfrac{\mathrm{MB}}{\mathrm{\Lambda\Gamma}}=\dfrac{2\alpha}{\mathrm{BM}}=\dfrac{\mathrm{\Gamma\Lambda}}{\alpha}$ άρα $\mathrm{BM}=y$ και $\mathrm{\Gamma\Lambda}=x$

Τελειώνοντας την σύντομη αναφορά στα αρχαία ελληνικά μαθηματικά θα κάνουμε ένα μεγάλο χρονικό άλμα. Μεταφερόμαστε στην Αλεξάνδρεια της Αιγύπτου και θα αναφερθούμε στον **Διόφαντο** που έζησε το **210-290 μ.Χ.** Είναι ο συγγραφέας των «**Αριθμητικών**» 13 βιβλίων Άλγεβρας που περιέχουν προβλήματα που λύνονται με εξισώσεις και συστήματα. Χρησιμοποιώντας και αναπτύσσοντας ένα δικό του τρόπο συμβολισμού των μεταβλητών, των δυνάμεων, των κλασμάτων, των πράξεων, δικαίως θεωρείται ο πατέρας της Άλγεβρας.

Ας δούμε μερικές εξισώσεις που περιέχονται στα «Αριθμητικά»

Πρόβλημα Ι-27

κζ.

Εὑρεῖν δύο ἀριθμοὺς ὅπως ἡ σύνθεσις αὐτῶν καὶ ὁ πολλαπλασιασμὸς ποιῇ δοθέντας ἀριθμούς.

Δεῖ δὴ τῶν εὑρισκομένων τὸν ἀπὸ τοῦ ἡμίσεος τοῦ συναμφοτέρου τετράγωνον τοῦ ὑπ' αὐτῶν ὑπερέχειν τετραγώνῳ. ἔστι δὲ τοῦτο πλασματικόν.

27.

Νὰ εὑρεθῶσι δύο ἀριθμοί, ὅπως τὸ ἄθροισμα καὶ τὸ γινόμενον αὐτῶν εἶναι ἴσα πρὸς δύο δοθέντας ἀριθμούς.

(Περιορισμός). Πρέπει δὲ τὸ τετράγωνον τοῦ ἡμιαθροίσματος τῶν δύο ἀριθμῶν νὰ ὑπερέχῃ τοῦ γινομένου αὐτῶν κατὰ τετράγωνον. Εἶναι δὲ τοῦτο τυπικόν.

(Το πρόβλημα ο Διόφαντος το λύνει με άθροισμα ίσο 20 και γινόμενο 96)

Έστω ότι οι αριθμοί είναι οι 10-α και 10+α τότε θα είναι

$$(10-\alpha)\cdot(10+\alpha)=96 \Leftrightarrow 100-\alpha^2=96 \Leftrightarrow \alpha^2=4 \Leftrightarrow \alpha=2$$

Αν υποθέσουμε ότι το άθροισμα των αριθμών είναι Α και το γινόμενο Β τότε μία γενική λύση του προβλήματος θα είχε ως εξής :

Έστω ότι οι αριθμοί είναι $\frac{A}{2}-x$ και $\frac{A}{2}+x$ τότε θα είναι :

$$(\frac{A}{2}-x)\cdot(\frac{A}{2}+x)=B \Leftrightarrow \frac{A^2}{4}-x^2=B \Leftrightarrow x^2=(\frac{A}{2})^2-B$$

Για να έχει λύση η τελευταία εξίσωση πρέπει το τετράγωνο του ημιαθροίσματος να είναι μεγαλύτερο του γινομένου των αριθμών κατά τετράγωνο αριθμό. Πρόκειται ουσιαστικά για μια πλήρη διερεύνηση του προβλήματος που ο Διόφαντος τη δίνει ως περιορισμό.

κζ.

Εὑρεῖν δύο ἀριθμοὺς ὅπως ἡ σύνθεσις αὐτῶν καὶ ὁ πολλαπλασιασμὸς ποιῇ δοθέντας ἀριθμούς.

Δεῖ δὴ τῶν εὑρισκομένων τὸν ἀπὸ τοῦ ἡμίσεος τοῦ συναμφοτέρου τετράγωνον τοῦ ὑπ' αὐτῶν ὑπερέχειν τετραγώνῳ. ἔστι δὲ τοῦτο πλασματικόν.

Ἐπιτετάχθω δὴ τὴν μὲν σύνθεσιν αὐτῶν ποιεῖν Μ̊ κ̄, τὸν δὲ πολλαπλασιασμὸν ποιεῖν Μ̊ ϙ̄ς̄.

Τετάχθω ἡ ὑπεροχὴ αὐτῶν ς β̄. καὶ ἐπεὶ τὸ σύνθεμα αὐτῶν ἐστι Μ̊ κ̄, ἐὰν τοῦτο τέμω δίχα, ἔσται ἑκάτερος τῶν ἐκ τῆς διαιρέσεως, τοῦ L' τοῦ συνθέματος, Μ̊ ῑ. κἂν τὸ ἥμισυ τῆς ὑπεροχῆς, τουτέστιν ς ᾱ ἑνὶ μὲν τῶν ἐκ τῆς διαιρέσεως προσθῶ, τοῦ δὲ λοιποῦ ἀφέλω, μένει πάλιν τὸ σύνθεμα Μ̊ κ̄, ἡ δὲ ὑπεροχὴ ς β̄. τετάχθω οὖν ὁ μείζων ς ᾱ καὶ Μ̊ ῑ τῶν ἡμίσεων τοῦ συνθέματος· ὁ ἄρα ἐλάσσων ἔσται Μ̊ ῑ ⋔ ς ᾱ. καὶ μένει τὸ μὲν σύνθεμα Μ̊ κ̄, ἡ δὲ ὑπεροχὴ ς β̄.

λοιπόν ἐστι καὶ τὸν ὑπ' αὐτῶν ποιεῖν Μ̊ ϙ̄ς̄· ἀλλ' ὁ ὑπ' αὐτῶν ἐστι Μ̊ ρ̄ ⋔ Δ^Υ ᾱ· ταῦτα ἴσα Μ̊ ϙ̄ς̄· καὶ γίνεται ὁ ς Μ̊ β̄.

ἔσται ἄρα ὁ μὲν μείζων Μ̊ ιβ̄, ὁ δὲ ἐλάσσων Μ̊ η̄. καὶ ποιοῦσι τὰ τῆς προτάσεως.

Η απόδειξη του 27ου προβλήματος από το πρωτότυπο

<u>Πρόβλημα Ι-28</u>

κη.

Εὑρεῖν δύο ἀριθμοὺς ὅπως καὶ ἡ σύνθεσις αὐτῶν καὶ ἡ σύνθεσις τῶν ἀπ᾽ αὐτῶν τετραγώνων ποιῇ δοθέντας ἀριθμούς.

Δεῖ δὴ τοὺς δὶς ἀπ᾽ αὐτῶν τετραγώνους τοῦ ἀπὸ συναμφοτέρου αὐτῶν τετραγώνου ὑπερέχειν τετραγώνῳ. ἔστι δὲ καὶ τοῦτο πλασματικόν.

28.

Νὰ εὑρεθῶσι δύο ἀριθμοί, ὅπως τὸ ἄθροισμα αὐτῶν καὶ τὸ ἄθροισμα τῶν τετραγώνων αὐτῶν δίδῃ δοθέντας ἀριθμούς.

(Περιορισμός). Πρέπει δὲ τὸ διπλάσιον τοῦ ἀθροίσματος τῶν τετραγώνων αὐτῶν νὰ ὑπερέχῃ τοῦ τετραγώνου τοῦ ἀθροίσματος αὐτῶν κατὰ τετράγωνον ἀριθμόν. Εἶναι δὲ καὶ τοῦτο τυπικόν.

(Το πρόβλημα ο Διόφαντος το λύνει με άθροισμα ίσο 20 και άθροισμα τετραγώνων ίσο με 208)

Έστω ότι οι αριθμοί είναι οι 10-α και 10+α τότε θα είναι

$$(10-\alpha)^2+(10+\alpha)^2=208 \Leftrightarrow \ldots \Leftrightarrow 200+2\alpha^2=208 \Leftrightarrow \alpha^2=4 \Leftrightarrow \alpha=2$$

Αν υποθέσουμε ότι το άθροισμα των αριθμών είναι Α και το άθροισμα των τετραγώνων Β τότε μία γενική λύση του προβλήματος θα είχε ως εξής :

Έστω ότι οι αριθμοί είναι $\frac{A}{2}-x$ και $\frac{A}{2}+x$ τότε θα είναι :

$$\left(\frac{A}{2}-x\right)^2+\left(\frac{A}{2}+x\right)^2=B \Leftrightarrow \frac{A^2}{2}+2\cdot x^2=B \Leftrightarrow 4x^2=2B-A^2$$

Για να έχει λύση η τελευταία εξίσωση πρέπει το διπλάσιο του αθροίσματος των τετραγώνων να είναι μεγαλύτερο του τετραγώνου του αθροίσματος των αριθμών κατά τετράγωνο αριθμό. Πρόκειται ουσιαστικά για μια πλήρη διερεύνησης του προβλήματος που ο Διόφαντος τη δίνει ως περιορισμό.

κη.

Εὑρεῖν δύο ἀριθμοὺς ὅπως καὶ ἡ σύνθεσις αὐτῶν καὶ ἡ σύνθεσις τῶν ἀπ᾽ αὐτῶν τετραγώνων ποιῇ δοθέντας ἀριθμούς.

Δεῖ δὴ τοὺς δὶς ἀπ᾽ αὐτῶν τετραγώνους τοῦ ἀπὸ συναμφοτέρου αὐτῶν τετραγώνου ὑπερέχειν τετραγώνῳ. ἔστι δὲ καὶ τοῦτο πλασματικόν.
᾽Επιτετάχθω δὴ τὴν μὲν σύνθεσιν αὐτῶν ποιεῖν $\overset{\circ}{M}\overline{\kappa}$, τὴν δὲ σύνθεσιν τῶν ἀπ᾽ αὐτῶν τετραγώνων ποιεῖν $\overset{\circ}{M}\overline{\sigma\eta}$.

Τετάχθω δὴ ἡ ὑπεροχὴ αὐτῶν ϛ$\overline{\beta}$. καὶ ἔστω ὁ μείζων ϛ$\overline{\alpha}$ καὶ $\overset{\circ}{M}\overline{\iota}$, τῶν ἡμίσεων πάλιν τοῦ συνθέματος, ὁ δὲ ἐλάσσων $\overset{\circ}{M}\overline{\iota}$ ⋔ ϛ$\overline{\alpha}$, καὶ μένει πάλιν τὸ μὲν σύνθεμα αὐτῶν $\overset{\circ}{M}\overline{\kappa}$, ἡ δὲ ὑπεροχὴ ϛ$\overline{\beta}$.
λοιπὸν ἔστι καὶ τὸ σύνθεμα τῶν ἀπ᾽ αὐτῶν τετραγώνων ποιεῖν $\overset{\circ}{M}\overline{\sigma\eta}$·

Απόσπασμα από τη λύση της 28ης πρότασης όπως δίνεται στο πρωτότυπο

Τέλος ας δούμε και ένα πρόβλημα που ανάγεται σε επίλυση εξίσωσης τρίτου βαθμού.

Τα παρακάτω είναι αποσπάσματα από το βιβλίο
« ΔΙΟΦΑΝΤΟΥ ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΑ »
Επιμέλεια Ευάγγελου Σ. Σταμάτη
Η άλγεβρα των αρχαίων ελλήνων.
Από τον Οργανισμό Εκδόσεων Διδακτικών Βιβλίων – Αθήνα 1963.

β.

Εὑρεῖν δύο ἀριθμοὺς ὅπως ἡ ὑπεροχὴ αὐτῶν ποιῇ δοθέντα, καὶ ἔτι ἡ τῶν ἀπ' αὐτῶν κύβων ὑπεροχή.

Ἔστω δὴ τὴν μὲν ὑπεροχὴν αὐτῶν ποιεῖν $\overset{\circ}{M}\,\overline{\varsigma}$, *τὴν δὲ ὑπεροχὴν τῶν ἀπ' αὐτῶν κύβων* $\overset{\circ}{M}\,\overline{\varphi\delta}$.

Τετάχθω πάλιν ἡ τοῦ μείζονος κύβου πλ. 𐆊 $\overline{\alpha}$ ⟨ $\overset{\circ}{M}\,\overline{\gamma}$, *ἡ δὲ τοῦ ἐλάσσονος* 𐆊 $\overline{\alpha}$ ⟩ $\pitchfork$ $\overset{\circ}{M}\,\overline{\gamma}$· *καὶ μένει ὥστε τὴν ὑπεροχὴν αὐτῶν εἶναι* $\overset{\circ}{M}\,\overline{\varsigma}$. *λοιπὸν δεῖ τῶν κύβων τὴν ὑπεροχὴν εἶναι* $\overset{\circ}{M}\,\overline{\varphi\delta}$· *ἀλλ' ἡ τῶν κύβων ὑπεροχὴ ἐστι* $\Delta^{Y}\,\overline{\iota\eta}$ $\overset{\circ}{M}\,\overline{\nu\delta}$· *ταῦτα ἴσα* $\overset{\circ}{M}\,\overline{\varphi\delta}$, *καὶ γίνεται ὁ* 𐆊 $\overset{\circ}{M}\,\overline{\varepsilon}$.

ἐπὶ τὰς ὑποστάσεις· ἔσται ἡ μὲν τοῦ μείζονος κύβου πλ. $\overset{\circ}{M}\,\overline{\eta}$, *ἡ δὲ τοῦ ἐλάσσονος* $\overset{\circ}{M}\,\overline{\beta}$. *αὐτοὶ δὲ οἱ κύβοι, ὃς μὲν* $\overline{\varphi\iota\beta}$, *ὃς δὲ* $\overline{\eta}$, *καὶ ἡ ἀπόδειξις φανερά.*

2.

Νὰ εὑρεθῶσι δύο ἀριθμοί, ὅπως ἡ διαφορὰ αὐτῶν δίδῃ δοθέντα ἀριθμόν, καὶ ἡ διαφορὰ τῶν κύβων αὐτῶν δίδῃ ἐπίσης δοθέντα.

Ἔστω ἡ μὲν διαφορὰ τῶν ἀριθμῶν νὰ δίδῃ 6, ἡ δὲ διαφορὰ τῶν κύβων αὐτῶν νὰ δίδῃ 504.

Ἄς ταχθῇ πάλιν ἡ κυβικὴ ῥίζα τοῦ μεγαλυτέρου κύβου $x + 3$, ἡ δὲ τοῦ μικροτέρου $x - 3$· καὶ εἶναι ἡ διαφορὰ αὐτῶν 6. Ὑπολείπεται νὰ εἶναι ἡ διαφορὰ τῶν κύβων 504· ἀλλὰ ἡ διαφορὰ τῶν κύβων αὐτῶν εἶναι $18x^2 + 54$· ταῦτα εἶναι ἴσα πρὸς 504, ἐξ ἧς $x = 5$.

Ἐπὶ τὰ δεδομένα· ἡ μὲν κυβικὴ ῥίζα τοῦ μεγαλυτέρου κύβου θὰ εἶναι 8, ἡ δὲ τοῦ μικροτέρου 2. Αὐτοὶ δὲ οἱ κύβοι, ὁ μὲν εἷς 512, ὁ δὲ ἄλλος 8, καὶ ἡ ἀπόδειξις εἶναι φανερά.

4. Επίλυση εξισώσεων από τους Άραβες

Στο πρώτο μισό του 7ου αιώνα ένας νέος πολιτισμός ξεπήδησε από την Αραβία. Σε λιγότερο από έναν αιώνα το Ισλάμ – η νέα μονοθεϊστική θρησκεία - επικράτησε από την Περσία ως την Ισπανία και από την Αραβία ως το μακρινό Ουζμπεκιστάν.

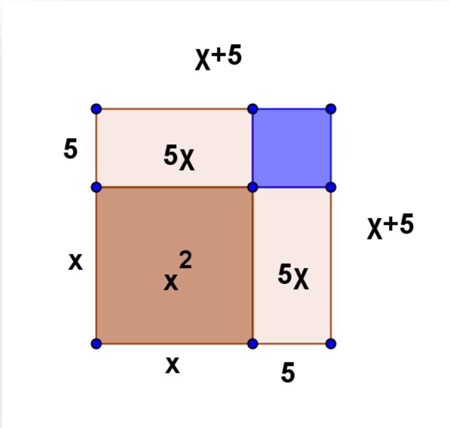
Ο χαλίφης Harun al-Rashid περί το 790 μ.Χ. ιδρύει βιβλιοθήκη στην Βαγδάτη η οποία γεμίζει με συλλογές από χειρόγραφα Ελλήνων όπως Ευκλείδη – Αρχιμήδη – Απολλώνιου – Διόφαντου – Πτολεμαίου και μεταφράζονται στα Αραβικά.
Ο χαλίφης al-Mamun (813-833) ιδρύει ερευνητικό κέντρο το οποίο έμεινε γνωστό ως **ο οίκος της σοφίας, Bayt al-Hikma**.

Οι μορφωμένοι πλέον Άραβες μαθηματικοί συνδυάζουν την Ελληνική επιστήμη με την Βαβυλωνιακή παράδοση που προϋπήρχε αλλά και την τριγωνομετρία – αστρονομία και το αριθμητικό σύστημα των Ινδών.

Ένα από τα σπουδαιότερα ισλαμικά μαθηματικά κείμενα είναι το Al-Kitab al-muhtasar fi hisab **al-jabr** wa-l-muqabala (Συνοπτικό βιβλίο για τον λογισμό της jabr και της Muqabala) του πέρση μαθηματικού **Muhammad ibn musa al-Khwarizmi (780-850)** Από τον όρο **al-jabr** προέρχεται η ονομασία **Άλγεβρα** που χρησιμοποιούμε σήμερα. Ο όρος αυτός σημαίνει **αποκατάσταση** ενώ ο όρος **al-muqabala σύγκριση**.
Για παράδειγμα η μετατροπή της εξίσωσης :
$2x+3=5-x$ στην μορφή $3x+3=5$ γίνεται μέσω της al-jabr , ενώ ο μετασχηματισμός στη μορφή $3x=2$ μέσω της al-muqabala.

Στο κείμενο παρουσιάζονται γεωμετρικές λύσεις εξισώσεων 2ου βαθμού με ρίζες θετικούς αριθμούς, ας δούμε δύο παραδείγματα.

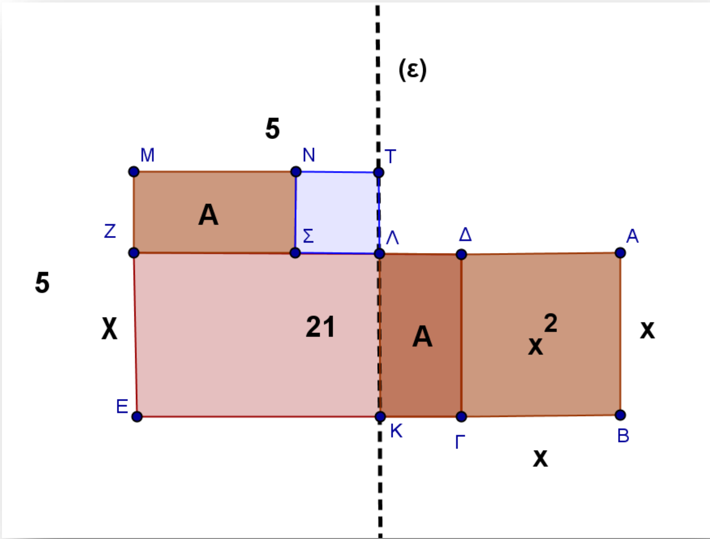
1ο παράδειγμα. Να λυθεί η εξίσωση
$x^2+10x=39$



Σχηματίζουμε τετράγωνο πλευρά χ και τα δύο ορθογώνια παραλληλόγραμμα πλευρών χ και 5 με τον τρόπο αυτό σχηματίζεται τετράγωνο πλευρά χ+5. Το εμβαδόν του τετραγώνου είναι $x^2+10x+25=(x+5)^2$.
Αλλά $x^2+10x=39$, άρα θα ισχύει
$(x+5)^2=25+39 \Leftrightarrow (x+5)^2=64 \Leftrightarrow$
$x+5=8 \Leftrightarrow x=3$

Ουσιαστικά πρόκειται για μία γεωμετρική εφαρμογή της μεθόδου «συμπλήρωσης τετραγώνου» για την επίλυση μιας δευτοβάθμιας εξίσωσης.

2ο παράδειγμα. Να λυθεί η εξίσωση : $x^2+21=10x$



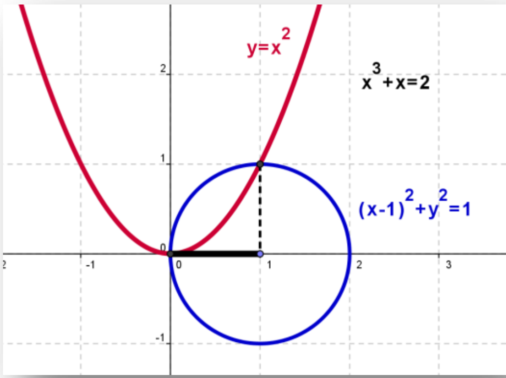
Σχηματίζουμε τετράγωνο ΑΒΓΔ πλευράς χ και ένα ορθογώνιο ΓΔΖΕ με μία διάσταση χ ώστε το εμβαδόν του να είναι 21 . Το εμβαδόν του ΑΒΕΖ είναι x^2+21, επειδή όμως $x^2+21=10x$, έχουμε ότι το ορθογώνιο αυτό έχει εμβαδόν $10x$.
Όμως η μία διάστασή του είναι χ , άρα η άλλη θα είναι 10, δηλαδή ΕΒ=10.
Φέρνουμε μία ευθεία (ε) που χωρίζει το σχήμα μας στη μέση , άρα ΕΚ=5. Σχηματίζουμε , όπως στο σχήμα το ορθογώνιο ΖΜΝΣ εμβαδού Α όσο και το ορθογώνιο ΚΓΔΛ.
Με τον τρόπο αυτό κατασκευάζεται τετράγωνο ΜΤΚΕ πλευράς 5 και εμβαδού 25 . Αλλά το άθροισμα των εμβαδών των ορθογωνίων ΖΛΚΕ και ΜΝΣΖ είναι 21. Άρα το σχηματιζόμενο τετράγωνο ΝΤΛΣ έχει εμβαδόν : 25-21=4, άρα πλευρά 2. Οπότε θα ισχύει $5-x=2 \Leftrightarrow x=3$.

Ο επόμενος ονομαστός εκπρόσωπος των «ισλαμικών» μαθηματικών είναι **ο Al-Khayyami (1048-1123)** – γνωστός στην Ελληνική βιβλιογραφία ως ποιητής Ομάρ Καγιάμι με πιο γνωστό έργο του την ποιητική συλλογή Ρουμπαγιάτ (Rubaiyat) .

Η ζωή του ένα πραγματικό μυθιστόρημα που αξίζει κανείς να εξιστορήσει.

« Λέγεται ότι ζούσε στο Nishapur του Ιράν, όπου συνδέθηκε με δεσμούς φιλίας με τους Χασάν Σαμπάχ και Νιζάμ-αλ-Μουλκ. Οι τρεις φίλοι έδωσαν ένα όρκο, αν κάποιος από τους τρεις γινόταν πλούσιος θα βοηθούσε και τους άλλους. Ο Ομάρ ασχολήθηκε με τα μαθηματικά, ενώ ο Νιζάμ έγινε επίτροπος των υποθέσεων του σουλτάνου Αρσλάν στο Ναισαπούρ. Αφού ο Νιζάμ έγινε πλούσιος έφερε τους φίλους του κοντά του και ο μεν Χασάν έγινε κυβερνητικός υπάλληλος ενώ ο Ομάρ υπηρέτησε στο αστεροσκοπείο του Isfahan όπου ασχολήθηκε με τη μαθηματική επιστήμη.
Ο Χασάν όμως εδιώχθη από τον σουλτάνο και το έτος 1090 έγινε επικεφαλής ομάδας λιστών όπου με ορμητήριο κάστρο νότιας της Κασπίας τρομοκρατούσαν την περιοχή. Ο Χασάν πήρε το όνομα ο Γέρος των Ορέων και η συμμορία του έμειναν γνωστοί ως Χασισιγιούν , λόγω χρήσης του γνωστού ναρκωτικού. Από το όνομα τους προέρχεται και η λέξη assassin – δολοφόνος. Ο Ομάρ πέθανε το 1123 ενώ ο παλιός φίλος του Χασάν το επόμενο έτος.»

Ο Ομάρ το 1070 γράφει το κλασικό μαθηματικό έργο με τίτλο Risala fi-l-barahin ala masa il al-jabr w'al muqabala (Πραγματεία για τις αποδείξεις των προβλημάτων της al-jabr και της muqabala) . Εκεί ταξινομεί τις κυβικές εξισώσεις σε δεκατέσσερις διαφορετικούς τύπους και τις λύνει χρησιμοποιώντας κωνικές τομές. Ο ίδιος αναφέρει ότι το έργο του βασίζεται και μπορεί να κατανοηθεί μέσα από τη καλή γνώση των Στοιχείων και των Δεδομένων του Ευκλείδη καθώς και των Κωνικών του Απολλώνιου.

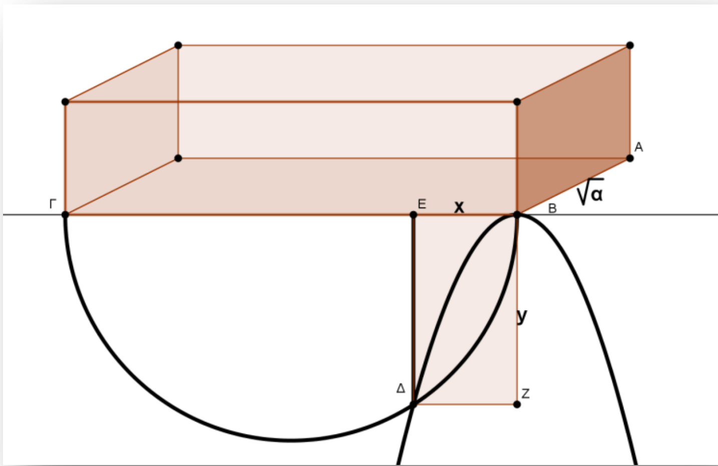


Ας δούμε πως λύνει την εξίσωση $x^3+\alpha x=\beta$

<u>Λύση με σύγχρονο συμβολισμό</u> : θεωρεί την παραβολή $x^2=\sqrt{\alpha}\cdot y$ και τον κύκλο $(x-\frac{\beta}{2\alpha})^2+y^2=\frac{\beta^2}{4\alpha^2}$ η λύση της εξίσωσης προκύπτει ως η τετμημένη του σημείου τομής των δύο καμπυλών . Πράγματι η δεύτερη εξίσωση γίνεται με τη βοήθεια της πρώτης

$$(x-\frac{\beta}{2\alpha})^2+\frac{x^4}{\alpha}=\frac{\beta^4}{4\alpha^2}\Leftrightarrow x^2-\frac{\beta}{\alpha}x+\frac{x^4}{\alpha}=0\Leftrightarrow x-\frac{\beta}{\alpha}+\frac{x^3}{\alpha}=0\Leftrightarrow x^3+\alpha x=\beta$$

Όμως ο Ομάρ Καγιάμ σκέφτεται γεωμετρικά οπότε βλέπει τον κάθε όρο της εξίσωσης με την ίδια διάσταση, άρα λόγω της ύπαρξης του όρου x^3 οι όροι της εξίσωσης είναι τρισδιάστατα στερεά. Άρα ο συντελεστής α εκφράζει εμβαδόν τετραγώνου πλευράς $\sqrt{\alpha}$, ενώ ο όρος β εκφράζει όγκο ορθογωνίου παραλληλεπιπέδου.



<u>Γεωμετρική λύση :</u>
Έστω τετράγωνο πλευράς $AB=\sqrt{\alpha}$ και ορθογώνιο παραλληλεπίπεδο με βάση το τετράγωνο και όγκο ίσο με β.
Η παραβολή $x^2=\sqrt{\alpha}\cdot y$ γράφεται «γεωμετρικά» $BE^2=AB\cdot BZ$ και ο κύκλος διαμέτρου ΒΓ γράφεται : $E\Delta^2=E\Gamma\cdot EB$, επειδή ΒΖ=ΕΔ έχουμε τελικά :

$$BE^2=AB\cdot E\Delta\Leftrightarrow BE^4=AB^2\cdot E\Delta^2\Leftrightarrow BE^4=AB^2\cdot E\Gamma\cdot EB\Leftrightarrow BE^3=AB^2\cdot E\Gamma$$
$$\Leftrightarrow BE^3+AB^2\cdot EB=AB^2\cdot E\Gamma+AB^2\cdot EB\Leftrightarrow BE^3+AB^2\cdot EB=AB^2\cdot B\Gamma$$
$\Leftrightarrow BE^3+\alpha\cdot BE=\beta$, άρα το ζητούμενο τμήμα χ – λύση της εξίσωσης είναι το ΒΕ.

5. Από τον μεσαίωνα ως την αναγέννηση …

Τα μαθηματικά ξανάρθαν στην Ευρώπη χάρις των προσπαθειών μιας ομάδας λογίων, των λεγόμενων μεταφραστών. Στις αρχές του 12ου αιώνα σημαντικά ελληνικά επιστημονικά έργα τις περισσότερες φορές στην αραβική άρχισαν να μεταφράζονται. Μεγάλο μέρος του έργου συντελέστηκε στο Τολέδο της Ισπανίας όπου είχε κατακτηθεί από τους Χριστιανούς. Η εβραϊκή κοινότητα που ανθούσε στην περιοχή μετέφραζε από τα αραβικά στα ισπανικά και ακολούθως χριστιανοί μετέφραζαν στα λατινικά. Με τον τρόπο τα έργα των Ευκλείδη , Αρχιμήδη, Αριστοτέλη, Θεοδόσιου, Πτολεμαίου, αλλά και η άλγεβρα του al-Khwarizmi καθώς και άλλων σπουδαίων αράβων μαθηματικών έγιναν γνωστά στη Δύση.

Fibonacci

Έτσι φθάνουμε στον **Λεονάρδο της Πίζας (1170-1240 μ.Χ.)** γνωστός ως **Fibonacci.** Ταξίδεψε στην Ελλάδα στην Αίγυπτο και στην Συρία γνωρίζοντας τα Ελληνικά και Αραβικά μαθηματικά. Επιστρέφει στην Πίζα γύρω στο 1200 και το 1202 δημοσιεύει το **liber abaci** ή βιβλίο των υπολογισμών, γεμάτο με τις μαθηματικές γνώσεις που είχε αποκτήσει στα ταξίδια του. Στο βιβλίο του έδειχνε την πρακτικότητα του αραβικού αριθμητικού συστήματος στην τήρηση εμπορικών βιβλίων, στις χρηματοσυναλλαγές, τις μετατροπές των μέτρων και σταθμών, στον υπολογισμό των επιτοκίων. Οι έμποροι του Μεσαίωνα έγραφαν με το ρωμαϊκό σύστημα αρίθμησης ενώ στις συναλλαγές τους χρησιμοποιούσαν αριθμητικό άβακα, για να κάνουν υπολογισμούς. Ο Fibonacci τους έδωσε ένα λειτουργικό σύστημα ψηφίων για τον υπολογισμό των αριθμητικών πράξεων. Περιγράφει τα εννιά δεκαδικά ψηφία καθώς το σύμβολο 0 .

Σελίδα από το Liber Abaci

Το βιβλίο έτυχε θερμής υποδοχής ανάμεσα στους λογίους της Ευρώπης και τους επηρέασε σημαντικά. Εξέδωσε επίσης και τα βιβλία **Practica geometriae** (1220), και το **Liber Quadratorum** (1225) όπου επιλύονται διάφοροι τύποι εξισώσεων. Στο έργο του επιλύονται έξι «κανονικές» μορφές οι εξής :

$$bx = c \ , \ ax^2 = c \ , \ ax^2 = bx \ , \ ax^2 = bx + c \ , \ ax^2 + bx = c \ , \ ax^2 + c = b$$

Όπου η άγνωστη ποσότητα λέγεται radix , το τετράγωνό της quadratus ή census και ο σταθερός όρος numerous.

Με την άλωση της Κωνσταντινούπολης από τους Φράγκους το 1204 ένα μεγάλο πλήθος λογίων αλλά και συγγραμμάτων φθάνει στην Μεσαιωνική Ευρώπη. Η μετάγγιση αυτή θα ολοκληρωθεί το 1453 με την άλωση της Πόλης από τους Τούρκους. Οι αυλές της Δύσης θα συγκεντρώσουν ότι πολυτιμότερο υπήρχε σε έμψυχο αλλά και σε άψυχο υλικό. Η μαθηματική παιδεία αναπτύσσεται στα πλαίσια του quadrivium μελέτη δηλαδή των κλάδων της αριθμητικής , της γεωμετρίας της μουσικής και της αστρονομίας. Στη Δυτική και Βόρεια Ευρώπη το εμπόριο ανθεί, αρχίζουν τα υπερπόντια ταξίδια, οι ανακαλύψεις και η ανάγκη για γρήγορους και σωστούς υπολογισμούς δίνει το έναυσμα για τη ίδρυση και των πρώτων πανεπιστημίων. Τα παλαιότερα ιδρύματα βρίσκονται στο Παρίσι, την Οξφόρδη και την Μπολόνια τα πρώτα δειλά βήματα ανάπτυξης των δυτικών μαθηματικών ξεκινούν. Ας αναφερθούμε σε μερικούς από τους σπουδαίους « άγνωστους» μαθηματικούς της εποχής αυτής.

Luca Pacioli 1445-1517. Η πρόσβαση που είχε στη βιβλιοθήκη του κόμη του Urbino του επέτρεψε να διευρύνει τις γνώσεις του στα μαθηματικά. Το 1470 γράφει το πρώτο χειρόγραφο του σχετικά με την άλγεβρα. Το 1472 γίνεται μοναχός και τρία χρόνια μετά καθηγητής στο Πανεπιστήμιο της Περούτζια, όπου έμεινε για έξι χρόνια. Ήταν ο πρώτος λέκτορας που πήρε έδρα μαθηματικών και τον τίτλο του "Magister". Το 1494 εκδίδει το γνωστό βιβλίο του **Summa**. Μία συλλογή αριθμητικής, γεωμετρίας, αναλογίας και αναλογικότητας. Στο κεφάλαιο «*μια πραγματεία σχετικά με τη λογιστική*» τον κάνει διάσημο εκεί περιγράφεται για πρώτη φορά το <u>διπλογραφικό λογιστικό σύστημα</u> . Γίνεται η πιο πολυδιαβασμένη μαθηματική εργασία σε όλη την Ιταλία, και ένα από τα πρώτα βιβλία που δημοσιεύτηκαν από τον Γουτεμβέργιο . Προσκλήθηκε στο Μιλάνο για να διδάξει μαθηματικά όπου ένας από τους μαθητές του ήταν ο **Leonardo da Vinci**. Ο Da Vinci εικονογράφησε το δεύτερο πιο σημαντικό χειρόγραφο του, το "**Divine Proportions**", ενώ η γνώση που πήρε ο Da Vinci από αυτόν σχετικά με την γεωμετρία, του έδωσε την δυνατότητα να δημιουργήσει ένα από τα μεγαλύτερα αριστουργήματα του τον "**Μυστικό Δείπνο**". Στα χρόνια που ακολούθησαν, συνέχισε να διδάσκει και να γράφει. Το 1509 δίνει διάλεξη με θέμα «Αναλογία και αναλογικότητα", όπου παρουσίασε τη σχέση της αναλογίας με τη θρησκεία, την ιατρική, νομική, αρχιτεκτονική, τη γραμματική, την εκτύπωση, τη γλυπτική, τη μουσική.

Το σημαντικό των μαθηματικών εργασιών του **Pacioli** είναι ότι ο τρόπος με τον οποίο διατυπώνει τις σκέψεις του αλλά κυρίως ο συμβολισμός που χρησιμοποιεί. Για παράδειγμα την τετραγωνική ρίζα την συμβολίζει με R (radice-ρίζα) ή R2 την κυβική ρίζα με R3 την τέταρτη με R4 κ.ο.κ. Τον άγνωστο σε μία εξίσωση τον συμβολίζει με co (cosa- πράγμα) , το τετράγωνό του με ce (censo-τετράγωνο) τον κύβο του με cu (cubo-κύβος) την τέταρτη δύναμη με ce.ce (censo-censo) . Στην περίπτωση όπου έχουμε και δεύτερο άγνωστο σε μία εξίσωση αυτός καλείται quantita. Για την πρόσθεση χρησιμοποιεί το σύμβολο p (piu), ενώ για την αφαίρεση το m(meno) .

Το 1344 μ.Χ. παρουσιάζεται η εργασία του **Master Dardi of Piza** με τίτλο «**Aliabraa argibra**» που περιέχει 198 τύπους εξισώσεων και τους τρόπους επίλυσής τους. Ας δούμε μερικά προβλήματα :

1^{ο} πρόβλημα

« Κάποιος δανείζει σε ένα άλλο 100Lira και μετά από 3 χρόνια λαμβάνει το ποσό των 150Lira στο οποίο συμπεριλαμβάνεται τόκος και κεφάλαιο. Πόσος ήταν ο μηνιαίος τόκος με τον οποίο δόθηκε το δάνειο»

Από τον τύπο του ανατοκισμού $\alpha_\nu = \alpha(1+\tau)^\nu$

, (α αρχικό κεφάλαιο – τ ετήσιο επιτόκιο και ν χρόνος σε έτη)

το πρόβλημα ανάγεται στην εξίσωση : $100(1+\frac{x}{20})^3 = 150$.

(Το ετήσιο επιτόκιο υπολογίζεται σε δηνάρια – υποδιαίρεση της λίρας με σχέση 1 λίρα =240 δηνάρια)

Που ισοδύναμα γράφεται $x^3 + 60x^2 + 1200x = 4000 \Leftrightarrow (x+20)^3 = 12000$

Άρα $x = \sqrt[3]{12000} - 20$

Εργαζόμενος παρόμοια καταλήγει σε έναν λαθεμένο γενικό τύπο επίλυσης της εξίσωσης $x^3 + ax^2 + bx = c$. (1)

Γράφει την ταυτότητα $(x+m)^3 = x^3 + 3mx^2 + 3m^2x + m^3$ (2)

Υποθέτει ότι υπάρχει μία σταθερή ποσότητα K που αν προστεθεί και στα δύο μέλη της (1) να μας δίνει κύβο αθροίσματος.

Άρα $x^3 + ax^2 + bx + K = c + K$ οπότε θα ισχύει $a = 3m$ και $b = 3m^2$ από τις δύο αυτές ισότητες έχουμε ότι $m = \frac{b}{a}$ και $K = m^3 = (\frac{b}{a})^3$

Οπότε καταλήγουμε στην εξίσωση $(x+\frac{b}{a})^3 = c + (\frac{b}{a})^3 \Leftrightarrow x = \sqrt[3]{c+(\frac{b}{a})^3} - \frac{b}{a}$

2ο πρόβλημα

«*Να χωριστεί το 10 σε δύο μέρη ώστε το γινόμενό τους διαιρούμενο με τη διαφορά τους να είναι ίσο με* $\sqrt{18}$ »

Θεωρεί τα δύο μέρη ίσα με χ και 10-χ οπότε καταλήγει στην εξίσωση :

$$\frac{x\cdot(10-x)}{x-(10-x)}=\sqrt{18}\Leftrightarrow x\cdot(10-x)=\sqrt{18}\cdot(2x-10)$$

Ο **Dardi** λύνει το πρόβλημα ως εξής : $x\cdot(10-x)=\sqrt{18}\cdot(2x-10)\Leftrightarrow$

$$x^2-2(5-\sqrt{18})x=10\sqrt{18}\Leftrightarrow(x-5+\sqrt{18})^2=10\sqrt{18}+(5-\sqrt{18})^2\Leftrightarrow$$

$$(x-5+\sqrt{18})^2=25+18\Leftrightarrow x=\sqrt{43}+5-\sqrt{18}$$

ο Nicolas Chuquet (1445-1488) γιατρός το επάγγελμα έγραψε ένα χειρόγραφο Αριθμητικής και Άλγεβρας το **Triparty** στο οποίο εμφανίζονται για πρώτη φορά αρκετές τεχνικές αλλά και συμβολισμοί, όπως :

1. Γνωρίζοντας ότι $\frac{a}{b}<\frac{a+c}{b+d}<\frac{c}{d}$ (1) <u>προσδιορίζει ρίζες εξίσωσης με δοκιμές</u>.

Για παράδειγμα για να υπολογίσει την ρίζα της εξίσωσης $x^2+x=39\frac{13}{81}$ παρατηρεί ότι είναι ένας αριθμός μεταξύ του 5 και του 6. Μετά εφαρμόζοντας τον τύπο (1) ελέγχει διαδοχικά τους αριθμούς $5\frac{1}{2}$, $5\frac{2}{3}$, $5\frac{3}{4}$, $5\frac{4}{5}$ για να καταλήξει ότι η ρίζα βρίσκεται ανάμεσα στους δύο τελευταίους αριθμούς. Εφαρμόζει τον κανόνα, βρίσκει τον αριθμό $5\frac{7}{9}$, που είναι η σωστή.

2. Για να βρει την τετραγωνική ρίζα π.χ. του 6 παρατηρεί – με δοκιμές ότι είναι ένας αριθμός ανάμεσα στους $2\frac{1}{3}$ και $2\frac{1}{2}$. Μετά βρίσκει τους αριθμούς $2\frac{2}{5}$, $2\frac{3}{7}$, $2\frac{4}{9}$, $2\frac{5}{11}$, $2\frac{9}{20}$. Σε κάθε βήμα βρίσκει το τετράγωνο του αριθμού που επέλεξε και ανάλογα αν είναι μεγαλύτερο ή μικρότερο από το 6 προσδιορίζει τον επόμενο αριθμό. Με τον τρόπο αυτό καταλήγει στο ότι όσο περισσότερο προχωρήσει κανείς με την διαδικασία αυτή τόσο καλύτερη προσέγγιση θα βρει.

3. Η εργασία του μπορεί να θεωρηθεί επαναστατική σε θέματα συμβολισμού συγκεκριμένα :

Α) χρησιμοποιεί και αυτός τον συμβολισμό R^2 , R^3 , κ.ο.κ. για να <u>συμβολίσει τις ρίζες διαφόρων τάξεων</u> καθώς επίσης <u>τα σύμβολα</u> $\bar{p}$ και $\bar{m}$ <u>για την πρόσθεση και αφαίρεση αντίστοιχα.</u> Για παράδειγμα γράφει $R^2 14\bar{p}R^2 180$ για να συμβολίσει το $\sqrt{14+\sqrt{180}}$.

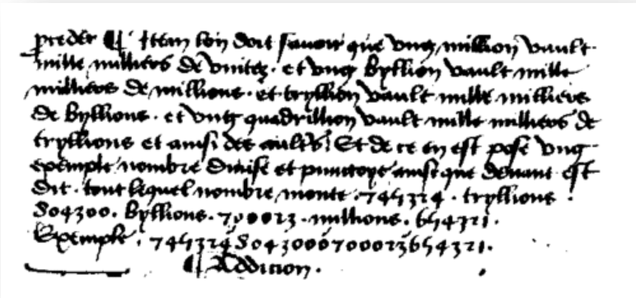
Β) γράφει 12^2 για να συμβολίσει το $12x^2$. <u>Χρησιμοποιεί και αρνητικούς εκθέτες</u>, για παράδειγμα γράφει $\bar{m}12^{2\bar{m}}$ για να συμβολίσει το $-12x^{-2}$

	1	x	x^2	x^3	x^4	x^5	x^6	x^7	x^8
Diophante		ς	Δ^Y	K^Y	$\Delta^Y\Delta$	ΔK^Y	$K^Y K$	....	....
Tradition de Diophante (Bachet,1624)		N	Q	C	QQ	....	....	....	....
Tradition arabe Stifel, les Italiens, etc., ici Clavius.	N	℞	ʒ	ꝶ	ʒʒ	β	ʒꝶ	Bβ	ʒʒʒ
Chuquet	1^0	1^1	1^2	1^3	1^4	1^5	1^6	1^7	1^8

Γ) <u>εφαρμόζει τους κανόνες πολλαπλασιασμού</u> για παράδειγμα γράφει ότι αν θέλουμε να πολλαπλασιάσουμε το 8^3 με το $7^{1\bar{m}}$ πρέπει πρώτα να πολλαπλασιάσουμε το 8 με το 7 και μετά να προσθέσει τα $3\bar{p}$ και $1\bar{m}$ δηλαδή γράφει : $8x^3 \cdot 7x^{-1} = 56x^2$

Δ) <u>γνωρίζει τις ιδιότητες των δυνάμεων</u>. Γράφει σε δύο γραμμές δυνάμεις του 2 (η πρώτη γραμμή οι εκθέτες και στην δεύτερη γραμμή το αποτέλεσμα της αντίστοιχης δύναμης) και παρατηρεί ότι το γινόμενο του 128 που αντιστοιχεί σε εκθέτη 7 με το 512 που αντιστοιχεί σε εκθέτη 9 είναι ίσο με 65536 που αντιστοιχεί σε εκθέτη 7+9=16. Επίσης <u>είναι ο πρώτος που σημειώνει ότι</u> $2^0 = 1$.

Ε) <u>«διαβάζει» κατά το σύγχρονο τρόπο τους μεγάλους αριθμούς</u>. Για παράδειγμα ο αριθμός 745324'8043000'700023'654321 που παρουσιάζεται στο διπλανό απόσπασμα τον διαβάζει :



« seven hundred forty-five thousand three hundred and twenty-four tryllions, 804300 byllions 700023 millions 654321 ...»

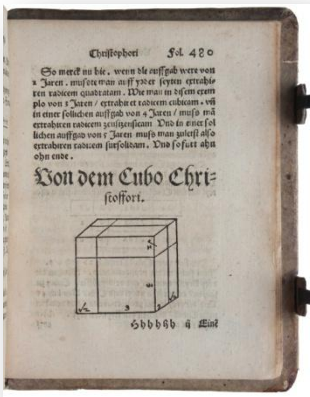
4. Εισάγει νέες τεχνικές επίλυσης εξισώσεων γενικεύοντας τις γνωστές που ήταν γνωστές από τα κλασικά αραβικά μαθηματικά. Για παράδειγμα :

Α) Η εξίσωση $cx^m = bx^{m+n} + x^{m+2n}$ δίνει λύση την $x = \sqrt[n]{\sqrt{(\frac{b}{2})^2 + c} - (\frac{b}{2})}$

Β) <u>Λύνοντας σύστημα δύο εξισώσεων με τρεις αγνώστους δέχεται την ύπαρξη περισσότερων λύσεων</u>
Γ) Σε πολλές εξισώσεις <u>θεωρεί τις αρνητικές λύσεις ως δεκτές για πρώτη φορά στην Ευρώπη !</u>

Ο **Christoff Rudolff** (1499-1545) είναι ο πρώτος γερμανός μαθηματικός που έγραψε βιβλίο Άλγεβρας. Το βιβλίο αυτό που επιγράφεται **Coss** γράφτηκε το 1520 στη Βιέννη και εκδόθηκε στο Στρασβούργο το 1525. Το καινούργιο που <u>εισάγει είναι τα σύμβολα + και – για την πρόσθεση και αφαίρεση αντίστοιχα</u> αλλά και <u>το σύμβολο $\sqrt{\ }$ για την τετραγωνική ρίζα.</u> Ταξινομεί τις εξισώσεις σε διάφορες κατηγορίες και δίνει παραδείγματα. Όπως ότι η εξίσωση $4x^7 + 8x^6 = 32x^5$ έχει λύση την $x = 2$ και γενικεύοντας ότι η εξίσωση

$ax^n + bx^{n-1} = cx^{n-2}$ έχει λύση την $x = \sqrt{(\frac{b}{2a})^2 + \frac{c}{2}} - \frac{b}{2a}$.



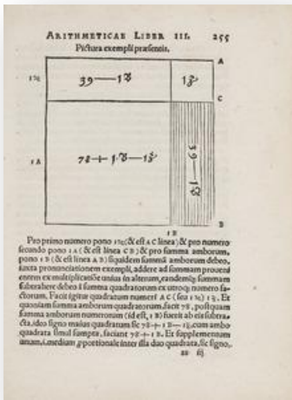
Η Άλγεβρα του εκτός από εξισώσεις που ουσιαστικά ανάγονται σε δευτεροβάθμιες με κατάλληλη εφαρμογή ιδιοτήτων των δυνάμεων παρουσιάζει πλήθος εμπορικών προβλημάτων, προβλήματα που αφορούν αγοροπωλησίες, διαθήκες , τόκων και ανατοκισμού καθώς και διασκεδαστικά μαθηματικά.

Στην τελευταία σελίδα του βιβλίου εικονίζεται ένας κύβος διαστάσεων $3+\sqrt{2}$ που είναι διαιρεμένος σε επιμέρους ορθογώνια παραλληλεπίπεδα και κύβους. Πιθανολογείται ότι είναι μία ανολοκλήρωτη προσπάθεια επίλυση της κυβικής εξίσωσης.

Michael Stifel (1487-1567) Γερμανός μοναχός και μαθηματικός ένθερμος υποστηρικτής του Λούθηρου και της Μεταρρύθμισης .

Δίδαξε στα Πανεπιστήμια του Κένισμπεργκ και της Ιένας.

Πρώτος αυτός εισαγάγει τα γράμματα ως σύμβολα αγνώστων σε αλγεβρικές παραστάσεις και διατυπώνει κανόνες για τις συνήθεις πράξεις πρόσθεσης και πολλαπλασιασμού.
Χαρακτήριζε τους αρνητικούς αριθμούς παράλογους και θεωρείται πρόδρομος του Νάπιερ στην ανακάλυψη των λογαρίθμων.
Το σημαντικότερο έργο του είναι το "**Arithmetica Integra**" , που το εξέδωσε στην Νυρεμβέργη το 1504.



Σελίδα από το Arithmetica Integra

Robert Recorde (1512-1558) Ουαλός ιατρός και μαθηματικός.

Καθηγητής του Κέμπριτζ και της Οξφόρδης. Θεωρείται πως αυτός πρώτος εισαγάγει την Άλγεβρα στην Αγγλία αλλά και ο πρώτος που έγραψε επιστημονικές εργασίες μαθηματικών και αστρονομίας στην Αγγλική.
Πρώτος αυτός χρησιμοποίησε το σύμβολο = για να δηλώσει την ισότητα.

« Για να αποφύγω την κουραστική επανάληψη των λέξεων είναι ίσο προς, θα χρησιμοποιώ ένα ζεύγος παραλλήλων , ή δίδυμα ισομήκη ευθύγραμμα τμήματα = επειδή δεν μπορεί να υπάρχουν δύο πιο ίσα πράγματα »

Για περισσότερο από ένα αιώνα τα βιβλία του που περιλάμβαναν Αριθμητική και Γεωμετρία ήταν τα βιβλία αναφοράς για την μαθηματική παιδεία στην Αγγλία.

Pedro Nunes (1502-1587) Πορτογάλος μαθηματικός, γεωγράφος και αστρονόμος. Ταξίδεψε το 1517 στην Ισπανία όπου σπούδασε στο πανεπιστήμιο της Σαλαμάνκα. Το 1527, επέστρεψε στην Πορτογαλία όπου άρχισε να διδάσκει. Το 1529 διορίστηκε ως βασιλικός κοσμογράφος. Το 1544 μετακόμισε στο Πανεπιστήμιο της Κοΐμπρα και ανέλαβε την προεδρία των μαθηματικών. Εκτός από τα μαθηματικά, εργάστηκε στην φυσική, τη γεωγραφία και έγραφε ποίηση. Γύρω στα 1550 έκανε την ανακάλυψή του για την οποία σήμερα είναι περισσότερο γνωστός, ερεύνησε την λοξοδρομία ή αλλιώς την λοξοδρομική γραμμή.

Το 1534, άρχισε να γράφει το **Libro de Algebra**, το οποίο όμως δημοσιεύτηκε το 1567. Το βιβλίο αναφέρεται στις εξισώσεις πρώτου και δευτέρου βαθμού, μελετά τη θεωρία της αναλογίας και ασχολείται με τις εξισώσεις του τρίτου βαθμού.

Ας δούμε τρεις διαφορετικές λύσεις που έδωσε στο κλασικό πρόβλημα *της εύρεσης δύο αριθμών αν το γινόμενό τους είναι ίσο με 10 και το άθροισμα των τετραγώνων τους ίσο με 30.*

1η λύση

Θεωρεί τους αριθμούς x και $\frac{10}{x}$, οπότε καταλήγει στην εξίσωση

$x^2+\frac{100}{x^2}=30 \Leftrightarrow x^4+100=30x^2$ η οποία ως δευτεροβάθμια ως προς x^2 δίνει λύση

$x^2=15\pm\sqrt{125}$ επομένως $x=\sqrt{15\pm\sqrt{125}}$

2η λύση

Θεωρεί τους αριθμούς $\sqrt{15-x}$ και $\sqrt{15+x}$ οι οποίοι έχουν την ιδιότητα το άθροισμα των τετραγώνων τους να είναι ίσο με 30 ! Οπότε καταλήγει στην εξίσωση

$(\sqrt{15-x})\cdot(\sqrt{15+x})=10 \Leftrightarrow 225-x^2=100 \Leftrightarrow x^2=125 \Leftrightarrow x=\pm\sqrt{125}$

Άρα οι ζητούμενοι αριθμοί είναι οι $x=\sqrt{15\pm\sqrt{125}}$

3η λύση

Με τη βοήθεια της ταυτότητας $(a+b)^2=a^2+2ab+b^2$ έχουμε ότι το τετράγωνο του αθροίσματος των δύο αριθμών είναι :

$(a+b)^2=30+2\cdot 10 \Leftrightarrow (a+b)^2=50 \Leftrightarrow a+b=\sqrt{50}$

Οπότε τους γράφει στην μορφή $\frac{\sqrt{50}}{2}+x$ και $\frac{\sqrt{50}}{2}-x$

Πολλαπλασιάζοντας τους καταλήγει στην εξίσωση :

$(\frac{\sqrt{50}}{2}+x)\cdot(\frac{\sqrt{50}}{2}-x)=10 \Leftrightarrow \frac{50}{4}-x^2=10 \Leftrightarrow x^2=\frac{5}{2} \Leftrightarrow x=\pm\sqrt{\frac{5}{2}}$

Άρα οι ζητούμενοι αριθμοί είναι οι $\frac{\sqrt{50}}{2}+\sqrt{\frac{5}{2}}$ και $\frac{\sqrt{50}}{2}-\sqrt{\frac{5}{2}}$

Παρατηρείστε ότι η μορφή των λύσεων που βρήκαμε στις δύο πρώτες λύσεις σε σχέση με αυτή της τρίτης διαφέρουν. Μπορείτε να αποδείξετε ότι πράγματι είναι οι ίδιοι αριθμοί;

6. Η επίλυση τριτοβάθμιας εξίσωσης στον 16^{ο} αιώνα και η εμφάνιση των μιγαδικών αριθμών …

Γενικοί τύποι για την επίλυση εξισώσεων δευτέρου βαθμού είχαν βρεθεί από την αρχαιότητα , τον 16ο αιώνα σειρά είχαν οι εξισώσεις τρίτου βαθμού.
Η ιστορία ξεκινά …

Ο καθηγητής των μαθηματικών του πανεπιστημίου της Μπολόνια **Scipione dal Ferro** (1464-1526) ανακάλυψε τη μέθοδο επίλυσης των εξισώσεων του τύπου $x^3 + ax = b$ την οποία δεν τη δημοσιοποίησε ποτέ. Λίγο πριν από το θάνατό του δίδαξε την λύση στο μαθητή του **Antonio Maria Fior** και παρέδωσε το τετράδιο με τις σημειώσεις του στο γαμπρό του και διάδοχό του στο πανεπιστήμιο **Aniballe Della Nave** .
Ο Fior αν και μέτριος μαθηματικός προκάλεσε σε «μονομαχία» το 1535 τον μαθηματικό **Nicollo Fontana** (1500-1557) γνωστό και με το ψευδώνυμο **Tardallia** δηλαδή τραυλός.

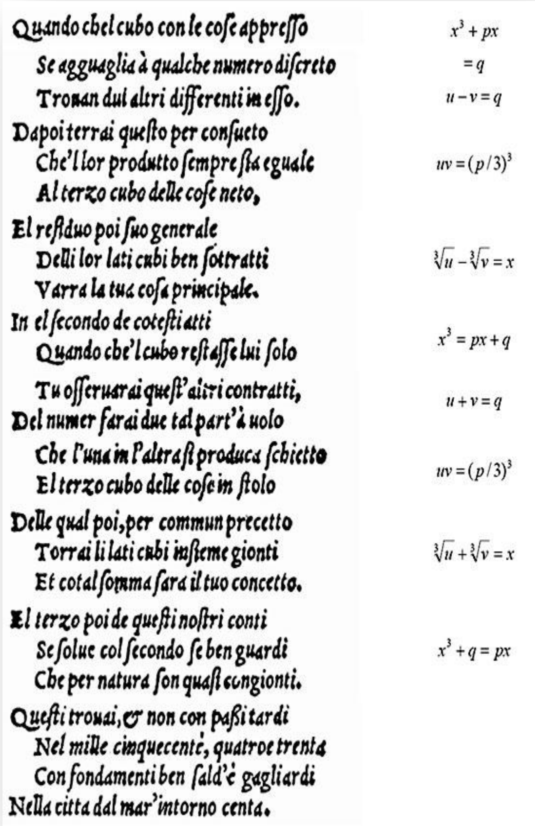
Τον 16^{ο} αιώνα οι μαθηματικοί ζούσαν παραδίδοντας ιδιαίτερα μαθήματα αλλά και από τα στοιχήματα που παίζονταν κατά τις ιδιαίτερες «μονομαχίες» όπου ένας μαθηματικός προκαλούσε δημόσια κάποιον άλλο δίνοντας ο ένας στον άλλο ένα αριθμό προβλημάτων προς λύση. Ο νικητής είχε μερίδιο από τα στοιχήματα που έδιναν και έπαιρναν.

Ο **Tardalia** κατόρθωσε να βρει το τύπο λύσης της εξίσωσης $x^3 + ax = b$ που είχε στην κατοχή του ο Fior αλλά και της $x^3 = ax + b$ που ο Fior αγνοούσε.
Το αποτέλεσμα της ιδιότυπης αυτής μονομαχίας ήταν ο Tardalia να λύσει και τα τριάντα προβλήματα που του έδωσε ο Fior ενώ αντίστοιχα ο Fior δεν έλυσε κανένα.
Μετά από αυτό η φήμη του Tardalia εξαπλώθηκε.

Την εποχή εκείνη ο διάσημος γιατρός και μαθηματικός **Cardano** (1501-1576) συνέγραφε ένα πλήρες για την εποχή του έργο άλγεβρας με τίτλο **Ars Magna** . Προφανώς δεν θα μπορούσε ποτέ ένα πλήρες κατά τα λεγόμενα βιβλίο να μη περιέχει την λύση της τριτοβάθμιας εξίσωσης. Από εκείνη τη στιγμή έκανε τα πάντα ώστε ο Tardalia να του αποκαλύψει την μέθοδο επίλυσης. Τελικά το κατάφερε αφού προηγουμένως ο Tardalia τον έβαλε να ορκιστεί στο Ευαγγέλιο να μη αποκαλύψει ποτέ την ανακάλυψή του.

Ο Tardalia αποκάλυψε στον Cardano την λύση με τη μορφή ενός ποιήματος , που είχε σε μετάφραση την παρακάτω μορφή :

Όταν ο κύβος και τα πράγματα μαζί
είναι ίσα με ένα σταθερό αριθμό
βρες μου δύο άλλους αριθμούς με διαφορά το σταθερό
Ύστερα φρόντισε το γινόμενο τους να είναι ίσο
με το κύβο του ενός τρίτου των πραγμάτων
Το υπόλοιπο λοιπόν που βρίσκεις
αν αφαιρέσεις τις κυβικές ρίζες
θα είναι ίσο με το αρχικό σου πράγμα
Στην δεύτερη από αυτές τις πράξεις
όταν ο κύβος παραμείνει μόνος
θα τηρήσεις τις εξής διαδικασίες
Ευθύς να διαιρέσεις τον αριθμό σε δύο μέρη
ώστε το ένα επί το άλλο να δίνει ακριβώς
τον κύβο του ενός τρίτου των πραγμάτων
Μετά από τα δύο τούτα μέρη αν πάρεις
το άθροισμα των κυβικών ριζών
θα έχεις βρει αυτό που ψάχνεις
Ο τρίτος από τους υπολογισμούς αυτούς
λύνεται με τον δεύτερο, αν δείξεις λίγη προσοχή
καθώς από τη φύση τους είναι σχεδόν όμοιοι
Αυτά τα πράγματα τα βρήκα, βήμα το βήμα
Το έτος χίλια πεντακόσια τριάντα τέσσερα
Με βάσεις στέρεες και δυνατές
Στην πόλη που βρέχεται από θάλασσα.



Quando chel cubo con le coſe appreſſo	$x^3 + px$
Se agguaglia à qualche numero diſcreto	$= q$
Trouan dui altri differenti in eſſo.	$u - v = q$
Dapoi terrai queſto per conſueto	
Che'l lor produtto ſempre ſia eguale	$uv = (p/3)^3$
Al terzo cubo delle coſe neto,	
El reſiduo poi ſuo generale	
Delli lor lati cubi ben ſottratti	$\sqrt[3]{u} - \sqrt[3]{v} = x$
Varra la tua coſa principale.	
In el ſecondo de coteſti atti	
Quando che'l cubo reſtaſſe lui ſolo	$x^3 = px + q$
Tu oſſeruarai queſt'altri contratti,	$u + v = q$
Del numer farai due tal part'à uolo	
Che l'una in l'altra ſi produca ſchietto	$uv = (p/3)^3$
El terzo cubo delle coſe in ſtolo	
Delle qual poi, per commun precetto	
Torrai li lati cubi inſieme gionti	$\sqrt[3]{u} + \sqrt[3]{v} = x$
Et cotal ſomma ſara il tuo concetto.	
El terzo poi de queſti noſtri conti	
Se ſolue col ſecondo ſe ben guardi	$x^3 + q = px$
Che per natura ſon quaſi congionti.	
Queſti trouai, & non con paßi tardi	
Nel mille cinquecentè, quatroe trenta	
Con fondamenti ben ſald'è gagliardi	
Nella citta dal mar'intorno centa.	

Η λύση ήταν περίπου ως εξής :

Θέλουμε να λύσουμε την εξίσωση : $x^3 + px = q$,
θέτουμε $x = u - v$ οπότε η εξίσωση γράφεται :
$(u - v)^3 + p(u - v) = q$.
Γνωρίζουμε την ταυτότητα : $(u - v)^3 + 3uv(u - v) = u^3 - v^3$ οπότε θα ισχύουν :

$\begin{aligned} 3uv &= p \\ u^3 - v^3 &= q \end{aligned}$ σύστημα ως προς u, v το οποίο όταν λυθεί μας δίνει τις λύσεις :

$$x = \sqrt[3]{\frac{q}{2} - \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}} - \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}}$$

Ο Cardano ανακάλυψε αργότερα ότι ο **Aniballe Della Nave** , γαμπρός του Ferro είχε στην κατοχή του το τετράδιο που αναφερόταν και η λύση της τριτοβάθμιας εξίσωσης. Ζήτησε λοιπόν άδεια για να το διαβάσει . Ο Cardano εκτιμούσε τον Tardalia αλλά όταν ανακάλυψε ότι ο Ferro είχε προηγηθεί στην επίλυση της τριτοβάθμιας εξίσωσης δεν θεωρούσε ότι δεσμευόταν από τους όρκους που είχε δώσει στον Tardalia και συμπεριέλαβε την λύση στο έργο του ¨**Μεγάλη τέχνη**». Από τότε ξεκίνησε μία διαμάχη ανάμεσα στον Tardalia από την μία και στον Cardano και τον μαθητή του **Ferrari** από την άλλη. Ας σημειωθεί ότι ο Ferrari ήταν ικανός μαθηματικός που εν τω μεταξύ πρέπει να είχε βρει την γενική λύση της τριτοβάθμιας εξίσωσης.
Ο Ferrari προκάλεσε δημόσια τον Tardalia από την οποία πρόκληση ο Ferrari κέρδισε στα σημεία…

Η γενική λύση των Cardano – Ferrari ήταν στην ουσία μία μέθοδος συμπλήρωσης κύβου και αναγωγή της γενικής μορφής στις προηγούμενες μορφές.
Δηλαδή :

Μετασχηματισμός της πλήρους τριτοβάθμιας εξίσωσης στην ελλιπή της μορφή.

$$x^3+ax^2+bx+c=0 \Leftrightarrow x^3+3\cdot x^2\cdot\frac{a}{3}+3\cdot x\cdot\frac{a^2}{9}+\frac{a^3}{27}-3\cdot x\cdot\frac{a^2}{9}+bx+c-\frac{a^3}{27}=0 \Leftrightarrow$$

$$(x+\frac{a}{3})^3=(\frac{a^2}{3}-b)x+\frac{a^3}{27}-c\,.$$

Αν θέσουμε $y=x+\frac{a}{3}\Leftrightarrow x=y-\frac{a}{3}$ η εξίσωση γράφεται :

$$y^3=(\frac{a^2}{3}-b)(y-\frac{a}{3})+\frac{a^3}{27}-c \Leftrightarrow y^3=(\frac{a^2}{3}-b)y-\frac{a^3}{9}+\frac{ab}{3}+\frac{a^3}{27}-c \Leftrightarrow$$

$$y^3=(\frac{a^2}{3}-b)y-\frac{2a^3}{27}+\frac{ab}{3}-c\ ,$$

οπότε αν θέσουμε $A=-(\frac{a^2}{3}-b)$ και $B=-(-\frac{2a^3}{27}+\frac{ab}{3}-c)$ η εξίσωση παίρνει την ισοδύναμη μορφή $y^3+Ay+B=0$ η οποία αν επιλυθεί κατά παρόμοιο τρόπο όπως πριν καταλήγει στην λύση :

$$y=\sqrt[3]{-\frac{B}{2}+\sqrt{\frac{B^2}{4}+\frac{A^3}{27}}}-\sqrt[3]{\frac{B}{2}+\sqrt{\frac{B^2}{4}+\frac{A^3}{27}}}$$ **ή θέτοντας**

$$\Delta=\frac{B^2}{4}+\frac{A^3}{27} \text{ έχουμε τον τύπο } x=\sqrt[3]{-\frac{B}{2}+\sqrt{\Delta}}-\sqrt[3]{\frac{B}{2}+\sqrt{\Delta}}$$

Η εφαρμογή όμως του τύπου αυτού οδηγούσε σε παράδοξες καταστάσεις μερικές φορές όπως για παράδειγμα στην επίλυση της εξίσωσης : $x^3-15x-4=0$

Η εξίσωση παραγοντοποιείται στην μορφή : $(x-4)(x^2+4x+1)=0$ όπου το τριώνυμο έχει ως ρίζες τους αριθμούς $x=-2\pm\sqrt{3}$

Αν όμως δουλέψουμε με τον τύπο του del Ferro έχουμε :

$$\Delta=\frac{16}{4}-\frac{15^3}{27}=4-125=-121<0!!!$$

Τις περιπτώσεις αυτές ο Cardano τις θεωρούσε διατυπώσεις άνευ νοήματος και δεν προχώρησε στην αναγνώριση των νέων αριθμών που είχαν κάνει την εμφάνισή τους.

Το 1572 ο **Rafael Bombeli** παρατήρησε ότι παραβλέποντας τους ενοχλητικούς αυτούς αριθμούς και αντιμετωπίζοντας τις αρνητικές υπόριζες ποσότητες σαν αριθμούς στους οποίους μπορούμε να εφαρμόζουμε τις συνήθεις πράξεις κατέληξε στην λύση :

$$x=\sqrt[3]{2+\sqrt{-121}}+\sqrt[3]{2-\sqrt{-121}}$$

Έπρεπε λοιπόν να αποδείξει ότι ένας πραγματικός αριθμός όπως το 4 μπορεί να γραφεί ως άθροισμα κυβικών ριζών στις οποίες υπάρχει αρνητική υπόριζη ποσότητα.

Καταρχήν έδειξε ότι ο αριθμός $\sqrt[3]{2+\sqrt{-121}}$ μπορεί να γραφεί στην μορφή $a+b\sqrt{-1}$

Πράγματι έχουμε διαδοχικά :

$$\sqrt[3]{2+\sqrt{-121}}=a+b\sqrt{-1}\Leftrightarrow 2+\sqrt{-121}=(a+b\sqrt{-1})^3\Leftrightarrow$$
$$2+11\sqrt{-1}=a^3+3a^2b\sqrt{-1}-3ab^2-b^3\sqrt{-1}\Leftrightarrow$$

$$2+11\sqrt{-1}=(a^3-3ab^2)+(3a^2b-b^3)\sqrt{-1}\Leftrightarrow$$

Ο Bombeli χρησιμοποίησε την $\sqrt{-1}$ ως έναν φανταστικό αριθμό με την ιδιότητα $(\sqrt{-1})^2=-1$

$$\begin{matrix} a^3-3ab^2=2 \\ 3a^2b-b^3=11 \end{matrix}\Rightarrow \begin{matrix} a^6-6a^4b^2+9a^2b^4=4 \\ 9a^4b^2-6a^2b^4+b^6=121 \end{matrix}$$ προσθέτοντας κατά μέλη έχουμε

$$a^6+3a^4b^2+3a^2b^4+b^6=125\Leftrightarrow(a^2+b^2)^3=5^3\Leftrightarrow a^2+b^2=5$$

Άρα $\begin{cases} a^2+b^2=5 \\ a^3-3ab^2=5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b^2=5-a^2 \\ a^3-3a(5-a^2)=5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b^2=5-a^2 \\ 4a^3-15a-2=0 \end{cases} \Leftrightarrow$

$\begin{cases} b^2=5-a^2 \\ (a-2)(4a^2+8a+1)=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b^2=1 \\ a=2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b=\pm 1 \\ a=2 \end{cases} \Leftrightarrow$

$(a,b)=(2,1)$ ή $(a,b)=(2,-1)$ που απορρίπτεται διότι δεν επαληθεύει τις αρχικές εξισώσεις

Άρα $\sqrt[3]{2+\sqrt{-121}}=2+\sqrt{-1}$

όμοια μπορούμε να δείξουμε ότι είναι $\sqrt[3]{2-\sqrt{-121}}=2-\sqrt{-1}$

Οπότε $x=\sqrt[3]{2+\sqrt{-121}}+\sqrt[3]{2-\sqrt{-121}}=2+\sqrt{-1}+2-\sqrt{-1}=4$

Στην εργασία αυτή του Bombeli εισάγεται για πρώτη φορά η έννοια της αρνητικής υπόριζης ποσότητας στα μαθηματικά ...

Ένα καινούργιο σύνολο αριθμών κάνει δειλά- δειλά την εμφάνισή του στο μαγικό χώρο των Μαθηματικών ...

7. Επίλυση εξισώσεων από τους Viete - Girard και Descartes

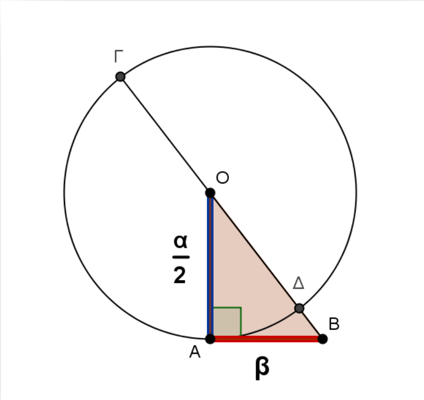
Ο Γάλλος νομικός αλλά και κρυπτογράφος και μαθηματικός **Francois Viete** (1540-1603) είναι το πρόσωπο που συναντούμε στην εξιστόρηση των προσπαθειών για την επίλυση των εξισώσεων στο τέλος του 16ου αιώνα. Στο βιβλίο του με τίτλο **mathematicus seu ad triangula cum appendicibu**s 1571 (**Μαθηματικός κανόνας περί τριγώνων**) είναι η πρώτη στο δυτικό κόσμο συστηματική παρουσίαση των μεθόδων επίλυσης επιπέδων και σφαιρικών τριγώνων με χρήση τριγωνομετρικών συναρτήσεων. Αναπτύσσει τύπους μετασχηματισμούς αθροίσματος σε γινόμενο παρουσιάζοντας συγχρόνως όλους τους γνωστούς τύπους διπλάσιου και τριπλάσιου τόξου.

Στον Viete αναφέρεται και η λύση τριτοβάθμιας εξίσωσης με τη βοήθεια της τριγωνομετρίας. Ας παρακολουθήσουμε τις σκέψεις του με τη βοήθεια ενός παραδείγματος.
Ας υποθέσουμε ότι θέλουμε να λύσουμε την εξίσωση : $x^3 - 3x + 1 = 0 \Leftrightarrow 1 = 3x - x^3$
αν θέσουμε $x = 2y$ τότε η εξίσωση γράφεται $\frac{1}{2} = 3y - 4y^3$.
Αν συγκρίνουμε την εξίσωση αυτή με τους όρους του τύπου του τριπλάσιου τόξου $\eta\mu(3\theta) = 3\cdot\eta\mu\theta - 4\cdot\eta\mu^3\theta$ ουσιαστικά το πρόβλημα ανάγεται στην λύση της τριγωνομετρικής εξίσωσης $\eta\mu 3\theta = \frac{1}{2}$ (1) , θεωρώντας $y = \eta\mu\theta$

Η (1) έχει λύσεις τις $3\theta = 2\kappa\pi + \frac{\pi}{6} \Leftrightarrow \theta = \frac{2\kappa\pi}{3} + \frac{\pi}{18}$ ή $\theta = 10^o + 120^o \cdot \kappa$ με $\kappa = 0,1,2$
Άρα $y = \eta\mu 10^o$ ή $y = \eta\mu 130^o$ ή $y = \eta\mu 250^o$
Οπότε $x = 2\eta\mu 10^o = 0,347...$ ή $x = 2\eta\mu 130^o = 1,532...$ ή $x = 2\eta\mu 250^o = -1,879...$

Επόμενη μεγάλη συνεισφορά του είναι οι γνωστοί σε όλους μας τύποι του Viete όπου πέραν των απλών και γνωστών σε όλους τύπους του αθροίσματος και του γινομένου των ριζών ενός τριωνύμου γενικεύει την ιδέα (χωρίς να το αποδείξει) και σε οποιαδήποτε πολυώνυμο.
Δηλαδή αν έχουμε την πολυωνυμική εξίσωση :
$x^3 - ax^2 + bx - c = 0$ με ρίζες τους αριθμούς x_1, x_2, x_3 τότε θα ισχύουν
$x_1 + x_2 + x_3 = a$, $x_1\cdot x_2 + x_2\cdot x_3 + x_3\cdot x_1 = b$ και $x_1\cdot x_2\cdot x_3 = c$
Όμοια αν έχουμε την εξίσωση : $x^4 - ax^3 + bx^2 - cx + d = 0$ με ρίζες τους x_1, x_2, x_3, x_4 τότε θα ισχύουν οι σχέσεις :
$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = a$, $x_1\cdot x_2 + x_2\cdot x_3 + x_3\cdot x_4 + x_4\cdot x_1 + x_1\cdot x_3 + x_2\cdot x_4 = b$,
$x_1\cdot x_2\cdot x_3 + x_1\cdot x_2\cdot x_4 + x_2\cdot x_3\cdot x_4 + x_1\cdot x_3\cdot x_4 = c$ και $x_1\cdot x_2\cdot x_3\cdot x_4 = d$

ο **Rene Descartes** (1596-1650) Γάλλος μαθηματικός και αυτός βαθύτατος γνώστης της Ευκλείδειας Γεωμετρίας εγκαταστάθηκε της Ολλανδία το 1628 όπου και εξέδωσε το σημαντικότερο έργο του «**Περί μεθόδου λόγος** » (1637) μαζί με τρία δοκίμια για την οπτική την μετεωρολογία και τη γεωμετρία. Το 1649 κλήθηκε να διδάξει την Βασίλισσα Χριστίνα της Σουηδίας και το 1650 ασθένησε και πέθανε. Το έργο του σημαντικό και στην επίλυση των εξισώσεων συγκεκριμένα με την βοήθεια ευθειών και κύκλων έλυσε μία σειρά από εξισώσεις δευτέρου βαθμού ας δούμε μερικές από τις κατασκευές αυτές.



1η λύση – κατασκευή

Να λυθεί η εξίσωση $x^2 = ax + b^2$

2η λύση – κατασκευή

Να λυθεί η εξίσωση $x^2 = -ax + b^2$

Οι δύο εξισώσεις λύνονται με τη βοήθεια του ορθογώνιου τριγώνου ΟΑΒ με ΟΑ=a/2 και ΑΒ=b

Αν σχεδιάσουμε τον κύκλο (Ο,a/2) και ονομάσουμε Δ και Γ τα σημεία τομής της ΒΟ με τον κύκλο τότε :

το τμήμα ΒΓ είναι λύση της 1ης εξίσωσης διότι

$$B\Delta \cdot B\Gamma = AB^2 \Leftrightarrow (x-a)\cdot x = b^2 \Leftrightarrow x^2 = ax + b^2$$

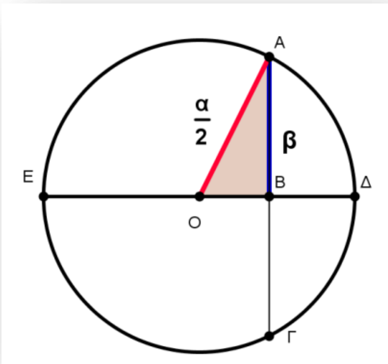
όπου με εφαρμογή Πυθαγόρειου στο ΟΑΒ έχουμε ότι $B\Gamma = x = \frac{a}{2} + \sqrt{\frac{a^2}{4} + b^2}$

ενώ το τμήμα ΔΒ είναι λύση της 2ης διότι

$$B\Delta \cdot B\Gamma = AB^2 \Leftrightarrow x\cdot(x+a) = b^2 \Leftrightarrow x^2 = -ax + b^2$$

όπου με εφαρμογή Πυθαγόρειου στο ΟΑΒ έχουμε ότι

$$B\Delta = \frac{a}{2} - \sqrt{\frac{a^2}{4} + b^2}$$



3η λύση – κατασκευή

Να λυθεί η εξίσωση $x^2 = ax - b^2$

Κατασκευάζουμε ορθογώνιο ΑΟΒ με ΟΑ=a/2 και ΑΒ=b , σχηματίζουμε τον κύκλο (Ο,a/2) ,Προεκτείνουμε τις κάθετες πλευρές του τριγώνου και ορίζουμε τα σημεία Ε,Δ και Γ. Τα τμήματα ΒΔ και ΒΕ είναι λύσεις της 3ης εξίσωσης διότι :

$$B\Delta \cdot BE = AB \cdot B\Gamma \Leftrightarrow B\Delta \cdot BE = AB^2$$

Οπότε το ΒΔ είναι λύση διότι $x\cdot(a-x)=b^2 \Leftrightarrow x^2=ax-b^2$ αλλά ως λύση είναι και το ΒΕ διότι αν ΒΕ=x έχουμε και πάλι $(a-x)\cdot x=b^2$.

Τα τμήματα αυτά με κατάλληλη εφαρμογή Πυθαγόρειου θεωρήματος έχουμε τελικά ότι : $B\Delta=\frac{a}{2}-\sqrt{\frac{a^2}{4}-b^2}$ και $BE=\frac{a}{2}+\sqrt{\frac{a^2}{4}-b^2}$

Χαρακτηριστικό της πρωτοτυπίας που διακρίνει τον Descartes ότι πρώτος αυτός χρησιμοποιεί :

1. <u>τον σύγχρονο εκθετικό συμβολισμό</u> δηλαδή b^2 , b^3 όπου <u>οι ποσότητες αυτές αναπαριστάνονται ως ευθύγραμμα τμήματα και όχι τετράγωνα ή κύβοι που συνηθίζονταν ως τότε</u>
2. <u>τα τελικά γράμματα του αλφαβήτου</u> x , y , z <u>για να παραστήσει άγνωστα μεγέθη</u>.

Την ίδια εποχή στην Γαλλία αναπτύσσει τις σκέψεις του ο **Albert Girard** (1595-1632)

Εκδίδεται το βιβλίο του «**Invention nouvelle en l'algebre** » (**Νέα ανακάλυψη στην άλγεβρα**)

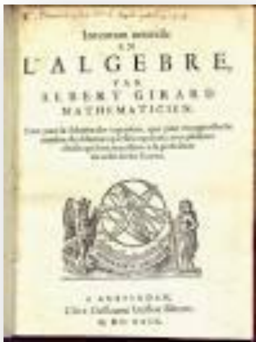
Μία πρόταση για πρώτη φορά διατυπώνεται :

« **Κάθε αλγεβρική εξίσωση … επιδέχεται τόσες λύσεις όσες δηλώνει η ονομασία της υψηλότερης ποσότητας …»**

Το **<u>θεμελιώδες θεώρημα της άλγεβρας</u>** βρίσκει την πρώτη του διατύπωση**.**

Επίσης στο έργο του

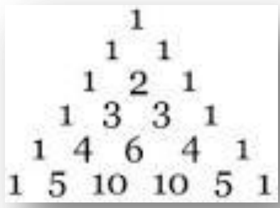
1. <u>Εισαγάγει την έννοια του κλασματικού εκθέτη</u>
2. <u>Χρησιμοποιεί για πρώτη φορά το σύγχρονο σύμβολο της ρίζας οποιασδήποτε τάξης</u>.
3. <u>Ερμηνεύει γεωμετρικά τις αρνητικές λύσεις μιας εξίσωσης</u> . Συγκεκριμένα σε ένα γεωμετρικό πρόβλημα με δύο θετικές και δύο αρνητικές λύσεις σημειώνει στο σχετικό σχήμα ότι οι αρνητικές λύσεις πρέπει να ερμηνευτούν ως εκτεινόμενες στην κατεύθυνση που είναι αντίθετη εκείνης των θετικών ριζών !.
4. Συναντάμε ξανά όπως και στο έργο του Viete τις **<u>στοιχειώδεις συμμετρικές σχέσεις</u>** μεταξύ των ριζών μιας πολυωνυμικής εξίσωσης .

   Για παράδειγμα την εξίσωση $x^4-4x^3-7x^2+34x-24=0$ όπου οι ρίζες της είναι οι αριθμοί 1,2,-3 και 4 την έγραψε $x^4-7x^2-24=4x^3-34x$ και ονόμασε :
   το άθροισμα των ριζών «**πρώτο συνδυασμό**» και παρατήρησε ότι 1+2+(-3)+4=4 τιμή ίση με τον συντελεστή του x^3

το άθροισμα των γινομένων των ριζών ανά δύο «**δεύτερο συνδυασμό**» και παρατήρησε ότι είναι ίσο με -7 όσο και ο συντελεστής του x^2, το άθροισμα των γινομένων ανά τρεις των ριζών « **τρίτο συνδυασμό**» ίσο με -34 όσο και ο συντελεστής του x και τέλος το γινόμενο και των τεσσάρων ριζών «**τέταρτο συνδυασμό**» και ίσο με -24 όσο και ο σταθερός όρος.

Συγχρόνως κάνει και μία ανακάλυψη συνδυάζοντας τις γραμμές του τριγώνου του **Pascal** με το πλήθος των όρων των διαφόρων «**συνδυασμών**».



Δηλαδή στην τριτοβάθμια εξίσωση ο 1^{ος} συνδυασμός θα αποτελείται από 3 στοιχεία $x_1+x_2+x_3$, ο δεύτερος συνδυασμός από 3 στοιχεία $x_1\cdot x_2+x_1\cdot x_3+x_2\cdot x_3$ και ο 4^{ος} συνδυασμός από 1 στοιχείο $x_1\cdot x_2\cdot x_3$.
Αντίστοιχα στην εξίσωση 4^{ου} βαθμού το πλήθος των προσθετέων στους διάφορους συνδυασμούς θα είναι :
4 προσθετέοι $x_1+x_2+x_3+x_4$, ο 1^{ος} συνδυασμός ,
6 προσθετέοι ο 2^{ος} συνδυασμός
$x_1\cdot x_2+x_1\cdot x_3+x_1\cdot x_4+x_2\cdot x_3+x_2\cdot x_4+x_3\cdot x_4$,
4 προσθετέοι ο 3^{ος} συνδυασμός $x_1\cdot x_2\cdot x_3+x_1\cdot x_3\cdot x_4+x_1\cdot x_2\cdot x_4+x_2\cdot x_3\cdot x_4$
και έναν όρο ο 4^{ος} συνδυασμός $x_1\cdot x_2\cdot x_3\cdot x_4$
κ.ο.κ. για οποιαδήποτε βαθμού πολυωνυμική εξίσωση.

Σε μία εξίσωση 4^{ου} βαθμού που λύνει, την $x^4+3=4x$ διατυπώνει τις απόψεις : οι τέσσερεις συνδυασμοί είναι 0, 0 , 4, και 3 συγχρόνως επειδή γνώριζε ότι η διαίρεση $(x^4-4x+3):(x-1)^2$ είναι τέλεια, άρα η εξίσωση έχει διπλή ρίζα το 1 οι διάφοροι συνδυασμοί του αποδίδουν τις εξισώσεις :

$$1+1+x_3+x_4=0$$

$$1+x_3+x_4+x_3+x_4+x_3\cdot x_4=0$$

$$x_3+x_4+x_3\cdot x_4+x_3\cdot x_4=4$$

$$x_3\cdot x_4=3$$

Εξισώσεις που ισοδύναμα καταλήγουν στο σύστημα $\begin{matrix} x_3+x_4=-2 \\ x_3\cdot x_4=3 \end{matrix}$ το οποία δίνει τις λύσεις $-1\pm\sqrt{-2}$. Ο **Girard** αντιμετωπίζει τις λύσεις αυτές ως «χρήσιμες» γιατί επιβεβαιώνουν τον γενικό κανόνα τόσο του θεμελιώδους θεωρήματος όσο και γιατί λύνει την εξίσωση χρησιμοποιώντας τις εξισώσεις των συνδυασμών του.

Η « ανακάλυψη» των στοιχειωδών συμμετρικών σχέσεων μεταξύ των ριζών μιας εξίσωσης σε συνδυασμό ότι πλέον είναι κοινό μυστικό ότι <u>οι εξισώσεις ν βαθμού προέρχονται από πολλαπλασιασμό παραστάσεων της μορφής</u> $x - r_i$ όπου r_i <u>οι ρίζες των εξισώσεων</u> όπου υπάρχει η δυνατότητα κάποιες φορές μερικές από αυτές να ταυτίζονται άνοιξε νέους δρόμους στις τεχνικές επίλυσης εξισώσεων.

Για παράδειγμα :

<u>Η δευτεροβάθμια εξίσωση</u> $x^2 + ax + b = 0$ μπορεί να λυθεί και ως εξής ¨

Αν x_1, x_2 οι λύσεις τότε $x_1 + x_2 = -a$ και $x_1 \cdot x_2 = b$.

Από την ταυτότητα $(x_1 - x_2)^2 = (x_1 + x_2)^2 - 4x_1 \cdot x_2$ έχουμε

$(x_1 - x_2)^2 = a^2 - 4b \Leftrightarrow x_1 - x_2 = \pm\sqrt{a^2 - 4b}$.

Η σχέση αυτή με την $x_1 + x_2 = -a$ δίνει τελικά $x_{1,2} = \dfrac{-a \pm \sqrt{a^2 - 4b}}{2}$

<u>Η 4^{ου} βαθμού εξίσωση</u> $x^4 + ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$ μπορεί να λυθεί και ως εξής.

(Ας σημειώσουμε ότι ο **Ludovico Ferrari** (1522-1565) κατόρθωσε να δώσει τη γενική λύση της την οποία και συμπεριέλαβε ο **Cardano** στην Ars Magna το 1545)

Με την αντικατάσταση $y = x - \dfrac{a}{4}$ παίρνει την μορφή $x^4 + kx^2 + mx + n = 0$

Ο **Descartes** το 1637 γράφει :

$x^4 + kx^2 + mx + n = (x^2 + \alpha x + \beta)(x^2 - \alpha x + \gamma)$

παρατηρήστε πως η γραφή αυτή δεν περιέχει τριτοβάθμιο όρο όπως και το 1^{ο} μέλος.

Από την ισότητα καταλήγουμε στο σύστημα :

$k = \gamma + \beta - \alpha^2$, $m = \alpha \cdot (\gamma - \beta)$, $n = \beta \cdot \gamma$

Απαλείφοντας τα β,γ καταλήγουμε στην εξίσωση

$\alpha^6 + 2k\alpha^4 + (k^2 - 4n)\alpha^2 - m^2 = 0$ η οποία είναι 3^{ου} βαθμού ως προς α^2 και λύνεται με τη βοήθεια του τύπου του Ferro-Cardano .

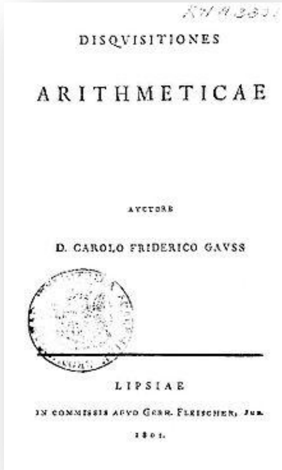
Στη συνέχεια υπολογίζουμε τους β,γ και τις λύσεις της αρχικής 4^{ου} βαθμού εξίσωσης με τη βοήθεια των δύο εξισώσεων 2^{ου} βαθμού.

Μετά την επίλυση των εξισώσεων 4^{ου} βαθμού **ο νέος στόχος πια ήταν η επίλυση της πεμπτοβάθμιας εξίσωσης**. Στους επόμενους τρεις αιώνες κορυφαίοι μαθηματικοί αγωνίστηκαν για την κατάκτηση του στόχου αυτού. Μερικοί ισχυρίστηκαν ότι απέδειξαν το αδύνατο της λύσης αλλά αλλοίμονο όλο και κάποιο μικρό λάθος υπήρχε στις προτεινόμενες λύσεις .

Νέες στιγμές από την ιστορία της επίλυσης των εξισώσεων ξετυλίγονται στις επόμενες παραγράφους …

8. Ο Πρίγκιπας των μαθηματικών και ο Joseph Louis Lagrange

Δεν υπάρχει τομέας των μαθηματικών όπου δεν θα συναντήσει κανείς έναν μεγάλο Γερμανό μαθηματικό τον **Johann Carl Friedrich Gauss**, **(1777-1855).**
Στην θεωρία των Αριθμών, στην Στατιστική, στην Μαθηματική Ανάλυση , στη Διαφορική Γεωμετρία, αλλά και στη Φυσική σε τομείς όπως Ηλεκτροστατική , Οπτική , Γεωμαγνητισμός, αλλά και στη Γεωδαισία και Αστρονομία. Η πολυσχιδής αυτή προσωπικότητα θεωρείται ένας από τους μεγαλύτερους επιστήμονες που υπήρξαν ποτέ.



DISQVISITIONES

ARITHMETICAE

AVCTORE

D. CAROLO FRIDERICO GAVSS

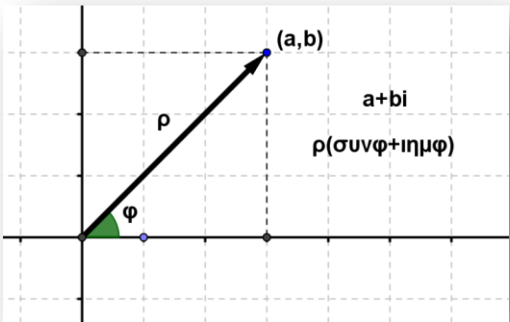
LIPSIAE

IN COMMISSIS APVD GERH. FLEISCHER, JUN.

1801.

Σε ηλικία 22 ετών στη διατριβή του με τίτλο «Μία νέα απόδειξη ότι κάθε ρητή συνάρτηση μιας μεταβλητής μπορεί να αναλυθεί σε πραγματικούς παράγοντες του πρώτου ή του δεύτερου βαθμού» το 1799 έδωσε μία απόδειξη του θεμελιώδους θεωρήματος της άλγεβρας. Απόδειξε δηλαδή ότι « **κάθε πολυωνυμική εξίσωση ν βαθμού έχει στο σύνολο των μιγαδικών ν ακριβώς ρίζες**» Ο Γκάους παρήγαγε τρεις ακόμα αποδείξεις την τελευταία, το 1849.

Για το θέμα που μας απασχολεί «*στιγμές από την ιστορία της επίλυσης των εξισώσεων*» κρίνεται απαραίτητο να κάνουμε μία σύντομη αναφορά στην επίλυση της εξίσωσης $z^n = 1$ με $z \in C$ και $n \in N$ καθώς και στη γεωμετρική ερμηνεία των λύσεων όπως καθιερώθηκε από τον μεγάλο Γερμανό Μαθηματικό.



Οι μιγαδικοί αριθμοί αποτελούν ένα σύνολο αριθμών της μορφής $a + bi$ με $a, b \in R$ και i η λεγόμενη **φανταστική μονάδα**, δηλαδή ένας αριθμός για τον οποίο ισχύει $i^2 = -1$. Στο σύνολο αυτό ορίζουμε τις πράξεις της πρόσθεσης και του πολλαπλασιασμού παίρνοντας απλά υπόψη μας την ιδιότητα του αριθμού i. Κάθε μιγαδικός μπορεί να παρασταθεί από ένα σημείο $A = (a, b)$ σε ένα σύστημα συντεταγμένων που ορίζει το λεγόμενο **μιγαδικό επίπεδο**. Επίσης λέμε ότι ο μιγαδικός αντιστοιχεί στο διάνυσμα $\overrightarrow{OA}$. Αν το σημείο Α το καθορίσουμε με τη βοήθεια πολικών συντεταγμένων δηλαδή της απόστασης ΟΑ και της γωνίας φ που σχηματίζει το διάνυσμα με τον άξονα χ'χ μπορούμε τον μιγαδικό να γράψουμε στην μορφή $z = \rho(\sigma\upsilon\nu\varphi + i\eta\mu\varphi)$ που λέγεται **τριγωνομετρική μορφή** του μιγαδικού.

Γράφοντας τον τυχαίο μιγαδικό με τη τριγωνομετρική μορφή μπορούμε εύκολα να καταλήξουμε στις παρακάτω ιδιότητες.

Αν $z_1 = \rho_1 \cdot (\sigma\upsilon\nu\varphi_1 + i\eta\mu\varphi_1)$ και $z_2 = \rho_2 \cdot (\sigma\upsilon\nu\varphi_2 + i\eta\mu\varphi_2)$ τότε

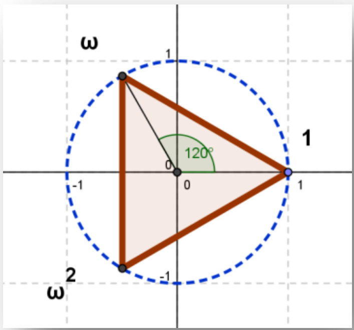
1. $z_1 = z_2 \Leftrightarrow \{\ \rho_1 = \rho_2 \ \ \kappa\alpha\iota \ \ \varphi_1 = 2\kappa\pi + \varphi_2 ,\ \kappa \in Z\ \}$
2. $z_1 \cdot z_2 = \rho_1 \cdot \rho_2 \cdot (\sigma\upsilon\nu(\varphi_1 + \varphi_2) + i\eta\mu(\varphi_1 + \varphi_2))$
3. $\dfrac{z_1}{z_2} = \dfrac{\rho_1}{\rho_2} \cdot (\sigma\upsilon\nu(\varphi_1 - \varphi_2) + i\eta\mu(\varphi_1 - \varphi_2))$
4. $z^n = \rho^n \cdot (\sigma\upsilon\nu(n\varphi) + i\eta\mu(n\varphi))$ με $n \in Z$

Επίσης αποδεικνύεται ότι η εξίσωση $z^\nu = 1$ έχει ν- διαφορετικές λύσεις που δίνονται από τον τύπο : $\zeta_\nu = \sigma\upsilon\nu\dfrac{2\kappa\pi}{\nu} + i\eta\mu\dfrac{2\kappa\pi}{\nu}$ με $\kappa \in \{0,1,2,\ldots,\nu-1\}$, συγχρόνως οι μιγαδικοί αυτοί αν παρασταθούν στο μιγαδικό επίπεδο είναι κορυφές κανονικού ν-γώνου.

Αν συμβολίσουμε με ω την ζ_1 τότε ισχύει ότι $\zeta_2 = \omega^2, \zeta_3 = \omega^3, \ldots, \zeta_{\nu-1} = \omega^{\nu-1}$ άρα οι λύσεις της εξίσωσης $z^\nu = 1$ είναι οι $1, \omega, \omega^2, \omega^3, \ldots, \omega^{\nu-1}$ με $\omega = \sigma\upsilon\nu\dfrac{2\pi}{\nu} + i\eta\mu\dfrac{2\pi}{\nu}$.

Για παράδειγμα η εξίσωση $z^3 = 1$ έχει λύσεις

τις $1, \omega, \omega^2$ με $\omega = \sigma\upsilon\nu\dfrac{2\pi}{3} + i\eta\mu\dfrac{2\pi}{3}$



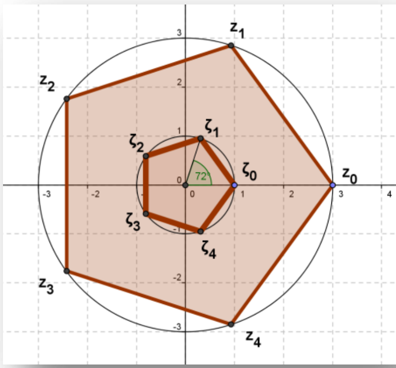
Οι εικόνες των μιγαδικών αυτών είναι κορυφές ισοπλεύρου τριγώνου εγγεγραμμένου σε κύκλο (Ο,1)

Σχεδόν παρόμοιος τύπος ισχύει και για την εξίσωση $z^n = \rho(\sigma\upsilon\nu\varphi + i\eta\mu\varphi)$ όπου $z = \rho \cdot (\sigma\upsilon\nu\varphi + i\eta\mu\varphi)$ ένας τυχαίος μιγαδικός.

Συγκεκριμένα οι λύσεις της εξίσωσης δίνονται από τον τύπο :

$$z_n = \sqrt[n]{\rho} \cdot [\sigma\upsilon\nu\frac{2\kappa\pi + \varphi}{n} + i\eta\mu\frac{2\kappa\pi + \varphi}{n}] \ \ \mu\varepsilon \ \ \kappa \in \{0,1,2,\ldots,n-1\}$$

Οι εικόνες των ριζών της εξίσωσης και εδώ είναι κορυφές κανονικού ν-γώνου.



Στην ειδική περίπτωση όπου έχουμε την εξίσωση $z^n = a > 0$ οι λύσεις της εξίσωσης δίνονται με την βοήθεια των αντίστοιχων λύσεων ζ_i της εξίσωσης $z^n = 1$, συγκεκριμένα ισχύει ότι $z_i = \sqrt[n]{a} \cdot \zeta_i$.

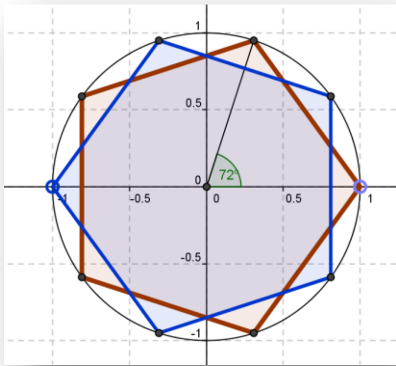
Για παράδειγμα το διπλανό σχήμα αποδίδει τη γεωμετρική απεικόνιση των λύσεων των εξισώσεων $z^5 = 1$ και $z^5 = 243 = 3^5$

<u>Παράδειγμα</u> : Να λυθεί η εξίσωση $x^4 + x^3 + x^2 + x + 1 = 0$
Η εξίσωση γράφεται

$$x^4 + x^3 + x^2 + x + 1 = 0 \overset{x \neq 1}{\Leftrightarrow} \frac{x^5 - 1}{x - 1} = 0 \Leftrightarrow$$

$$x = \sigma\upsilon\nu \frac{2\kappa\pi}{5} + i\eta\mu \frac{2\kappa\pi}{5}, \ \kappa \in \{1, 2, 3, 4\}$$

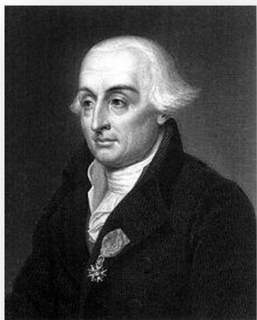
<u>Παράδειγμα</u> : Να λυθεί η εξίσωση $x^4 - x^3 + x^2 - x + 1 = 0$
Η εξίσωση γράφεται



$$x^4 - x^3 + x^2 - x + 1 = 0 \overset{x \neq -1}{\Leftrightarrow} \frac{x^5 + 1}{x + 1} = 0 \Leftrightarrow$$

$$x = \sigma\upsilon\nu \frac{2\kappa\pi + \pi}{5} + i\eta\mu \frac{2\kappa\pi + \pi}{5}, \kappa \in \{1, 2, 3, 4\}$$

Στο διπλανό σχήμα παρουσιάζονται στο μιγαδικό επίπεδο οι λύσεις των δύο εξισώσεων ως κορυφές δύο κανονικών πολυγώνων – εκτός από τα σημεία (1,0) και (-1,0).



Ο επόμενος μεγάλος μαθηματικός που συναντάμε στη προσπάθεια της επίλυσης των εξισώσεων βαθμού μεγαλύτερου ή ίσου του 5 με ριζικά είναι ο **Joseph-Louis Lagrange** (**1736 - 1813**). Ιταλός μαθηματικός, φυσικός και αστρονόμος που έζησε το μεγαλύτερο μέρος της ζωής του στην Πρωσία και τη Γαλλία. Το 1766, κατέλαβε τη θέση του διευθυντή Μαθηματικών στην Ακαδημία Επιστημών, στο Βερολίνο, θέση όπου παρέμεινε για είκοσι χρόνια, παράγοντας μεγάλο έργο και κερδίζοντας πολλά βραβεία.

Το 1787, στην ηλικία των 51, μετακόμισε στη Γαλλία και έγινε μέλος της Γαλλικής Ακαδημίας. Το 1794 έγινε ο πρώτος καθηγητής της ανάλυσης στην **École Polytechnique** . Η πραγματεία του Λαγκράνζ στην αναλυτική μηχανική ("**Traité de Mécanique Analytique**"), που γράφτηκε στο Βερολίνο και εκδόθηκε το 1788, αποτέλεσε τη βάση της μετέπειτα εξέλιξης της μαθηματικής φυσικής στον δέκατο ένατο αιώνα. Έκανε πολύ σημαντικές μελέτες συνεισφέροντας στα πεδία της μαθηματικής ανάλυσης, στην Άλγεβρα και στη θεωρία αριθμών. Είναι θαμμένος στο Πάνθεον και το όνομά του εμφανίζεται ανάμεσα στα 72 ονόματα που είναι χαραγμένα στον Πύργο του Άιφελ.

Ο Lagrange προσπάθησε να γενικεύσει τις μεθόδους των **Cardano** και **Ferrari** ώστε να πετύχει γενική μέθοδο επίλυσης εξισώσεων βαθμού μεγαλύτερου ή ίσου του πέντε. Στο έργο του ***Reflexions sur la theorie algebrique des equations*** (**Στοχασμοί για την αλγεβρική θεωρία των εξισώσεων**) προσπαθεί να εντοπίσει τους λόγους για τους οποίους οι μέθοδοι που ακολούθησαν οι προγενέστεροι μαθηματικοί στις εξισώσεις $3^{ου}$ και $4^{ου}$ βαθμού ήταν επιτυχείς. Μετά θα επιχειρούσε να γενίκευε τα όποια συμπεράσματά του.

Συγκεκριμένα για την εξίσωση της μορφής $x^3+ax+b=0$ θέτει καταρχήν , όπως και ο Cardano, $x=y-\dfrac{a}{3y}$ με τον τρόπο αυτό καταλήγει στην εξίσωση $y^6+by^3-\dfrac{a^3}{27}=0$ για την οποία αν θέσουμε $y^3=r$ καταλήγουμε στην εξίσωση $r^2+br-\dfrac{a^3}{27}=0$ η οποία δίνει δύο λύσεις , ας υποθέσουμε τις r_1 και $r_2=-\dfrac{a^3}{27\cdot r_1}$. Μετά από τις εξισώσεις $y^3=r_1$ και $y^3=r_2$ βρίσκουμε το y και άρα και την λύση x της εξίσωσής.

Ενώ ο Cardano βρίσκει $y=\sqrt[3]{r_1}$ και $y=\sqrt[3]{r_2}=-\sqrt[3]{\dfrac{a^3}{27\cdot r_1}}=-\dfrac{a}{3\cdot\sqrt[3]{r_1}}$ απ' όπου καταλήγει στην λύση $x=\sqrt[3]{r_1}-\dfrac{a}{3\sqrt[3]{r_1}}=\sqrt[3]{r_1}+\sqrt[3]{r_2}$,

ο Lagrange γνωρίζει ότι οι εξισώσεις $y^3=r_1$ και $y^3=r_2$ δίνουν έξι λύσεις τις :

$y=\sqrt[3]{r_1}$, $y=\omega\cdot\sqrt[3]{r_1}$, $y=\omega^2\cdot\sqrt[3]{r_1}$ και $y=\sqrt[3]{r_2}$, $y=\omega\cdot\sqrt[3]{r_2}$, $y=\omega^2\cdot\sqrt[3]{r_2}$ όπου ω κυβική ρίζα της μονάδας. Θέτοντας όπου y στον τύπο $x=y-\dfrac{a}{3y}$ οποιαδήποτε από τις παραπάνω έχουμε τελικά ότι οι λύσεις είναι οι :

$$x_1=\sqrt[3]{r_1}+\sqrt[3]{r_2} \quad , \quad x_2=\omega\cdot\sqrt[3]{r_1}+\omega^2\cdot\sqrt[3]{r_2} \quad , \quad x_3=\omega^2\cdot\sqrt[3]{r_1}+\omega\cdot\sqrt[3]{r_2}$$

Για παράδειγμα αν θέσουμε $y=\omega\cdot\sqrt[3]{r_2}$ θα έχουμε :

$$x=\omega\cdot\sqrt[3]{r_2}-\frac{a}{3\cdot\omega\cdot\sqrt[3]{r_2}}\overset{r_1=-\frac{a^3}{27\cdot r_2}}{=}\omega\cdot\sqrt[3]{r_2}+\frac{\sqrt[3]{r_1}}{\omega}=\omega\cdot\sqrt[3]{r_2}+\frac{\omega^2\cdot\sqrt[3]{r_1}}{\omega^3}\overset{\omega^3=1}{=}\omega\cdot\sqrt[3]{r_2}+\omega^2\cdot\sqrt[3]{r_1}$$

Ο Lagrange αναρωτήθηκε αν αντί να υπολογίζει το x συναρτήσει του y, μήπως μπορούσε να αντιστρέψει την διαδικασία και να υπολογίζει το y συναρτήσει του x. Αυτό μπορούσε να ισχύει διότι παρατήρησε ότι ισχύουν οι σχέσεις :

$$y_1=\frac{1}{3}(x_1+\omega x_2+\omega^2x_3)=\frac{1}{3}(\sqrt[3]{r_1}+\sqrt[3]{r_2}+\omega^2\sqrt[3]{r_1}+\sqrt[3]{r_2}+\omega\sqrt[3]{r_1}+\sqrt[3]{r_2})=\sqrt[3]{r_2}$$

$$y_2=\frac{1}{3}(x_2+\omega x_3+\omega^2x_1)=\ldots=\omega^2\sqrt[3]{r_2}$$

$$y_3=\frac{1}{3}(x_3+\omega x_1+\omega^2x_2)=\ldots=\omega\sqrt[3]{r_2}$$

$$y_4=\frac{1}{3}(x_1+\omega x_3+\omega^2x_2)=\ldots=\sqrt[3]{r_1}$$

$$y_5=\frac{1}{3}(x_3+\omega x_2+\omega^2x_1)=\ldots=\omega^2\sqrt[3]{r_1}$$

$$y_6=\frac{1}{3}(x_2+\omega x_1+\omega^2x_3)=\ldots=\omega\sqrt[3]{r_1}$$

Οι σχέσεις αυτοί προκύπτουν από τον **γενικό τύπο** $y=\frac{1}{3}(x'+\omega x''+\omega^2x''')$ όπου (x',x'',x''') μία από τις έξι δυνατές μεταθέσεις των ριζών x_1,x_2,x_3

Οι έξι αυτές σχέσεις αποδίδουν τις έξι τιμές της μεταβλητής y.

Συγχρόνως παρατήρησε ότι $y_1^3=y_2^3=y_3^3$ και $y_4^3=y_5^3=y_6^3$ δηλαδή υπάρχουν δύο δυνατές τιμές της μεταβλητής y^3, οπότε θα προκύψουν ως ρίζες μιας εξίσωσης 2^{ου} βαθμού.

Μπορεί να βρεθεί αυτή η εξίσωση συναρτήσει μόνο των συντελεστών a,b της αρχικής εξίσωσης;

Ο Lagrange γνώριζε τους τύπους του Vietta δηλαδή ότι :

$S_1 = x_1 + x_2 + x_3 = 0$, $S_2 = x_1 \cdot x_2 + x_2 \cdot x_3 + x_3 \cdot x_1 = -a$ και $S_3 = x_1 \cdot x_2 \cdot x_3 = b$

Οπότε χρησιμοποιώντας τους τύπους αυτούς υπολόγισε το άθροισμα $S = y_1^{\,3} + y_4^{\,3}$ και το γινόμενο $P = y_1^{\,3} \cdot y_4^{\,3}$

(οι πράξεις παραλείπονται διότι το μόνο που θα προσφέρουν είναι κούραση …)

και βρήκε $S = -b$ και $P = -\dfrac{a^3}{27}$.

Οπότε από την 2^{ου} βαθμού εξίσωση $r^2 - br - \dfrac{a^3}{27} = 0$ βρίσκουμε δύο ρίζες r_1, r_2 και μετά με τη βοήθεια των εξισώσεων :

$$\frac{1}{3}(x_1 + \omega x_2 + \omega^2 x_3) = \sqrt[3]{r_2} \quad , \quad \frac{1}{3}(x_1 + \omega x_3 + \omega^2 x_2) = \sqrt[3]{r_1} \quad , \quad x_1 + x_2 + x_3 = 0$$

μπορούμε να βρούμε τις λύσεις x_1, x_2, x_3 της αρχικής εξίσωσης.

Δουλεύοντας με παρόμοιο τρόπο (χρησιμοποιώντας ενδιάμεσες ανηγμένες συναρτήσεις) βρήκε έναν νέο τρόπο επίλυσης εξίσωσης 4^{ου} βαθμού, καταλήγοντας στον ίδιο τύπο που είχε καταλήξει πριν από αρκετούς αιώνες ο Ferrari.

Στο σημείο αυτό θέλησε να γενικεύσει τη μέθοδό του και για εξισώσεις 5^{ου} βαθμού και πάνω. Δυστυχώς δεν κατόρθωσε να βρει μία γενική μέθοδο προσδιορισμού των ενδιάμεσων «ανηγμένων» συναρτήσεων που ήταν απαραίτητες για να εφαρμοστεί η μέθοδός του. Παρά την αποτυχία του το σημαντικό είναι ότι για πρώτη φορά παρουσιάζεται μία μέθοδος που με ενιαίο τρόπο αντιμετωπίζει την επίλυση εξισώσεων 2^{ου} – 3^{ου} και 4^{ου} βαθμού.

Το πρόβλημα της επίλυσης της εξίσωσης 5^{ου} βαθμού με ριζικά ο Lagrange το θεωρούσε πρόκληση στην ανθρώπινη διάνοια, στα απομνημονεύματα του γράφει « *το πρόβλημα της επίλυσης εξισώσεων βαθμού μεγαλύτερου του τετάρτου ανήκει στα άλυτα προβλήματα,* ***αν και τίποτε δεν μπορεί να αποδείξει ότι οι εξισώσεις αυτές λύνονται.*** *Είναι αμφίβολο αν οι μέθοδοι που χρησιμοποιήθηκαν μέχρι σήμερα μπορούν να δώσουν πλήρη λύση των εξισώσεων πέμπτου βαθμού*» Παρατηρεί ακόμα ότι στην προσπάθεια αυτή μεγάλη σπουδαιότητα θα έχει η θεωρία των μεταθέσεων των ριζών της, παρατήρηση που τελικά δικαιώθηκε.

9. Θεωρία ομάδων – μία νέα ιδέα γεννιέται …

Ένας από τους μεγάλους μαθηματικούς που καταπιάστηκε με το αν λύνεται ή όχι με ριζικά η πεμπτοβάθμια εξίσωση είναι και ο **Paolo Ruffini** **(1765-1822)** .

Ο **Ruffini** σπούδασε στο πανεπιστήμιο της Μόντενα Ιατρική, Φιλοσοφία, Λογοτεχνία και Μαθηματικά. Από το 1798 εστίασε την προσοχή του στο επίμαχο ερώτημα της εξίσωσης 5^{ου} βαθμού. Ήταν πεπεισμένος ότι υπήρχε ένας βάσιμος λόγος που κανείς δεν είχε καταφέρει να βρει τη λύση, δεν υπήρχε λύση!


TEORIA GENERALE

DELLE

EQUAZIONI,

LA SOLUZIONE ALGEBRAICA DELLE

EQUAZIONI GENERALI DI GRADO

SUPERIORE AL QUARTO

DI

PAOLO RUFFINI.

PARTE PRIMA.

BOLOGNA MDCCXCVIII.

Το 1799 δημοσιεύει τη Γενική θεωρία των εξισώσεων όπου σε μία απόδειξη των 500 σελίδων !!! , ισχυριζόταν ότι είχε αποδείξει το αδύνατο του εγχειρήματος. Το 1801 στέλνει ένα αντίγραφο στον **Lagrange** αλλά απάντηση δεν πήρε. Την στέλνει ξανά το 1802 αλλά και πάλι σιωπή. Το 1803 στέλνει μία απόδειξη αυτή τη φορά πιο σύντομη, αλλά και αυτή τη φορά η προσπάθεια του δεν είχε καλύτερη τύχη. Φθάνουμε το 1821 ένα χρόνο πριν το θάνατό του όπου ο Γάλλος μαθηματικός – αυθεντία της εποχής – **Cauchy** έγραψε στον Ruffini .

« *Η πραγματεία σας για την γενική επίλυση εξισώσεων είναι μία εργασία που πάντα φαινόταν άξια της προσοχής των μαθηματικών και που, κατά την κρίση μου, αποδεικνύει πλήρως την αδυναμία της αλγεβρικής επίλυσης εξισώσεων με βαθμό μεγαλύτερου του τετάρτου*». Ο έπαινος ήρθε πολύ αργά…

Για την ιστορία μας στα μέσα του 1824 συμβαίνει κάτι ξεχωριστό ο Νορβηγός μαθηματικός **Niels HenriK Abel** **(1802-1829)** δημοσίευσε το έργο του «***Υπόμνημα επί των αλγεβρικών εξισώσεων***». Στην εργασία αυτή αποδεικνύεται το αδύνατο της επιλύσεως της γενικής εξισώσεως του πέμπτου βαθμού. Το έργο ήταν δυσνόητο και δυσανάγνωστο. Λεπτομερέστερη απόδειξη δημοσιεύθηκε το 1826 στον πρώτο τόμο του Περιοδικού ***Crelle's Journal.***

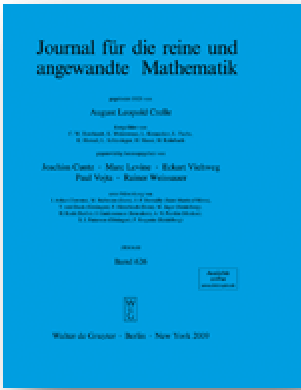
Ο Άμπελ γεννήθηκε στο Nedstrand. Το 1815 εισάχθηκε στο θρησκευτικό σχολείο της Χριστιανίας. Αρχικώς δεν έδειχνε ενδιαφέρον για το σχολείο, αλλά όλα άλλαξαν όταν, το 1817, ένας νέος καθηγητής των Μαθηματικών, ο **Bernt Michael Holmboe**, διέκρινε το ταλέντο του Άμπελ στα Μαθηματικά και τον ενθάρρυνε να τα σπουδάσει σε πανεπιστημιακό επίπεδο. Το 1820 πέθανε ο πατέρας του και η οικογένειά του έμεινε άπορη. Ο **Holmboe** τον υποστήριξε με υποτροφία και έπεισε τους φίλους του να δώσουν χρήματα για να μπορέσει να φοιτήσει στο πανεπιστήμιο. Πράγματι, μπήκε στο Πανεπιστήμιο του Όσλο το 1821 και πήρε πτυχίο το 1822.

Michael Holmboe

Ο Άμπελ έκανε αίτηση για οικονομική υποστήριξη ώστε να μπορέσει να επισκεφθεί κορυφαίους μαθηματικούς στη Γερμανία και στη Γαλλία. Αντί γι' αυτό, του δόθηκαν πόροι για να μείνει στην πρωτεύουσα της Νορβηγίας για δύο χρόνια, στα οποία έμαθε τη γερμανική και τη γαλλική γλώσσα. Το 1825 του δόθηκε κρατική υποτροφία που του επέτρεψε να ταξιδέψει στο εξωτερικό. Πήγε πρώτα στη Γερμανία, όπου γνωρίσθηκε με τον μαθηματικό **August Leopold Crelle** που τότε ετοιμαζόταν να ξεκινήσει να εκδίδει το ομώνυμο μαθηματικό περιοδικό του.

August Leopold Crelle

Κατόπιν πήγε στο Φράιμπουργκ, όπου πραγματοποίησε έρευνες στη θεωρία των συναρτήσεων. Το 1826 πήγε στο Παρίσι, όπου έμεινε δέκα μήνες και συνάντησε κορυφαίους Γάλλους μαθηματικούς. Στην Γαλλία δεν εκτιμήθηκε όσο του άξιζε καθώς το έργο του ήταν ελάχιστα γνωστό. Οι οικονομικές δυσκολίες, τον υποχρέωσαν να διακόψει τη διαμονή του στο εξωτερικό και να επιστρέψει στη Νορβηγία, όπου δίδαξε για λίγο στο Βασιλικό Πανεπιστήμιο του Φρειδερίκου.



Κατά τη διάρκεια της παραμονής του στο Παρίσι, κόλλησε φυματίωση. Συγχρόνως ο «μέντοράς» του **Crelle** αναζητούσε μια θέση εργασίας για τον Abel στο Βερολίνο. Κατάφερε να βρει μια θέση καθηγητή πανεπιστημίου και έγραψε ένα γράμμα στον Άμπελ στις 8 Απριλίου 1829 για να του πει τα καλά νέα. Ήταν πολύ αργά, ο Άμπελ είχε πεθάνει δύο ημέρες νωρίτερα.

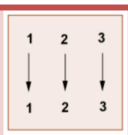
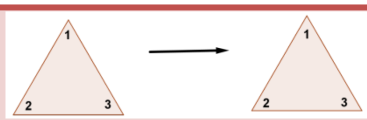
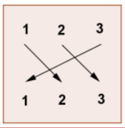
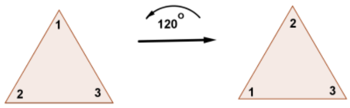
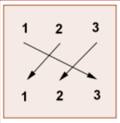
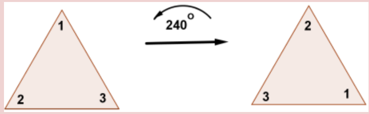
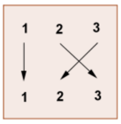
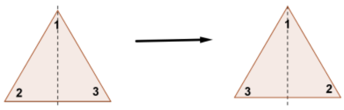
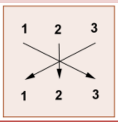
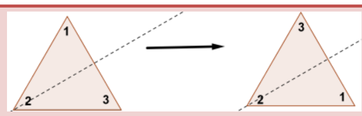
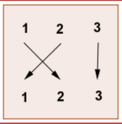
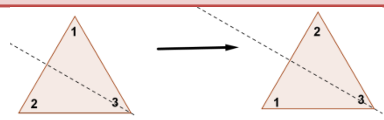
Τα έργα του πρωτοπαρουσιάστηκαν στο περιοδικό του Crelle αλλά με επιμέλεια του **Holmboe** το 1839 τα εξέδωσε και η νορβηγική κυβέρνηση. Ο όρος **αβελιανή ομάδα** που θα δούμε παρακάτω, είναι ο ελάχιστος φόρος τιμής προς τον μεγάλο νορβηγό μαθηματικό.

Η απόδειξη της μη επιλυσιμότητας από τον Abel βασιζόταν στην εφαρμογή αποτελεσμάτων που αφορούσαν τις μεταθέσεις του συνόλου των ριζών της εξίσωσης.

Αλλά τι είναι μετάθεση;

Ο μαθηματικός που ασχολήθηκε πρώτος συστηματικά με την έννοια αυτή είναι ο **Augustin Louis Cauchy** **(1789 - 1857)** Γάλλος μαθηματικός από τους πρωτοπόρους της ανάλυσης. Πρώτος αυτός ξεκίνησε να διατυπώνει και να αποδεικνύει τα θεωρήματα του απειροστικού λογισμού με αυστηρό τρόπο. Όρισε τη συνέχεια με απειροστικούς όρους, έδωσε αρκετά σημαντικά θεωρήματα στην μιγαδική ανάλυση και ξεκίνησε τη μελέτη των αντιμεταθετικών ομάδων στην αφηρημένη άλγεβρα. Τα έγγραφά του καλύπτουν ολόκληρο το φάσμα των μαθηματικών και της μαθηματικής φυσικής. Έγραψε περίπου οκτακόσια ερευνητικά άρθρα και πέντε ολοκληρωμένα εγχειρίδια.

Ας υποθέσουμε ότι έχουμε το σύνολο $\mathrm{T} = \{1, 2, 3\}$, τότε **κάθε διάταξη των** τριών **στοιχείων του συνόλου σε διατεταγμένες** τριάδες λέγεται **μετάθεση**. Μπορούμε να φτιάξουμε $1 \cdot 2 \cdot 3 = 6 = 3!$ τέτοιες διαφορετικές τριάδες. Υπάρχουν αρκετοί τρόποι για να παρασταθούν αυτές οι διατάξεις, παρακάτω δίνουμε τρεις διαφορετικούς .

	Με τη βοήθεια αντιστοίχησης	**Με τη βοήθεια πινάκων**	**Με τη βοήθεια σχημάτων**
σ_0		$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$	
σ_1		$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$	
σ_2		$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$	
σ_3		$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$	
σ_4		$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$	
σ_5		$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$	

Παρατηρήστε ότι ο γεωμετρικός τρόπος **συνδέει τις 6 διαφορετικές συμμετρίες ενός τριγώνου με τις αντίστοιχες 6 διαφορετικές μεταθέσεις του συνόλου Τ.**

Το σύνολο όλων των δυνατών διατάξεων το συμβολίζουμε : $\mathrm{S}_3 = \{\sigma_0, \sigma_1, \sigma_2, \sigma_3, \sigma_4, \sigma_5\}$

Στο σύνολο αυτό ορίζουμε την πράξη «ο – σύνθεση» με την οποία ουσιαστικά συνθέτουμε διαδοχικά δύο μεταθέσεις.
Για παράδειγμα

$$\sigma_2 \circ \sigma_4 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix} = \sigma_5$$

είναι εύκολο να συμπληρώσουμε τον διπλανό πίνακα όπου γίνεται φανερό ότι **το σύνολο** S_3 **ως προς την πράξη** $\circ$ **είναι κλειστό**, δηλαδή η σύνθεση δύο οποιονδήποτε στοιχείων του S_3 είναι στοιχείο του S_3.

$\circ$	σ_0	σ_1	σ_2	σ_3	σ_4	σ_5
σ_0	σ_0	σ_1	σ_2	σ_3	σ_4	σ_5
σ_1	σ_1	σ_2	σ_0	σ_4	σ_5	σ_3
σ_2	σ_2	σ_0	σ_1	σ_5	σ_3	σ_4
σ_3	σ_3	σ_5	σ_4	σ_0	σ_2	σ_1
σ_4	σ_4	σ_3	σ_5	σ_1	σ_0	σ_2
σ_5	σ_5	σ_4	σ_3	σ_2	σ_1	σ_0

Το στοιχείο σ_0 που έχει την ιδιότητα $\sigma_0 \circ \sigma = \sigma \circ \sigma_0 = \sigma$ για κάθε στοιχείο $\sigma \in S_3$, λέγεται **ουδέτερο στοιχείο** ή **ταυτοτική μετάθεση**

Για κάθε $\sigma \in S_3$ υπάρχει $\sigma^{-1} \in S_3$ ώστε $\sigma \circ \sigma^{-1} = \sigma^{-1} \circ \sigma = \sigma_0$. Το στοιχείο αυτό λέγεται **συμμετρικό στοιχείο**. Για παράδειγμα το συμμετρικό του σ_2 είναι το σ_2. Το συμμετρικό του σ_5 είναι το σ_4 κ.τ.λ.

Η πράξη $\circ$ είναι **προσεταιριστική**, δηλαδή για οποιαδήποτε τριάδα μεταθέσεων ισχύει $\sigma' \circ \sigma'' \circ \sigma''' = \sigma' \circ (\sigma'' \circ \sigma''') = (\sigma' \circ \sigma'') \circ \sigma'''$.

Το $(S_3, \circ)$, δηλαδή του σύνολο S_3 εφοδιασμένο με την πράξη $\circ$ λέγεται **ομάδα**.

Στην περίπτωση όπου ισχύει και η αντιμεταθετική ιδιότητα τότε η ομάδα θα λέγεται **Αβελιανή ή αντιμεταθετική ομάδα**. Η ομάδα $(S_3, \circ)$ δεν είναι αντιμεταθετική.

Αν παρατηρήσουμε τον πίνακα 3Χ3 που σχηματίζουν οι μεταθέσεις σ_0, σ_1, σ_2, θα δούμε ότι το σύνολο $A_3 = \{\sigma_0, \sigma_1, \sigma_2\}$ εφοδιασμένο με την πράξη $\circ$ είναι ομάδα και μάλιστα αντιμεταθετική.

$\circ$	σ_0	σ_1	σ_2
σ_0	σ_0	σ_1	σ_2
σ_1	σ_1	σ_2	σ_0
σ_2	σ_2	σ_0	σ_1

Επειδή $A_3 \subset S_3$ λέμε ότι η ομάδα $(A_3, \circ)$ είναι **υποομάδα** της $(S_3, \circ)$.

Υποομάδα είναι και η $I = (\{\sigma_o\}, \circ)$ και λέγεται **ταυτοτική** υποομάδα της $(S_3, \circ)$.

$\circ$	σ_0
σ_0	σ_0

Το πλήθος των στοιχείων μίας ομάδας λέγεται **τάξη της ομάδας** και γράφουμε Π.χ. $|S_3| = 6$, $|A_3| = 3$, $|I| = 1$.

Ο λόγος $\dfrac{|S_3|}{|A_3|} = \dfrac{6}{3} = 2$ λέγεται **δείκτης** της A_3 στην S_3, όμοια $\dfrac{|A_3|}{|I|} = \dfrac{3}{1} = 3$.

Αν Η μία υποομάδα της S_3 και $\sigma \in S_3$ τότε το σύνολο των στοιχείων της μορφής $\sigma \circ \eta \circ \sigma^{-1}$ για κάθε $\eta \in H$ αποδεικνύεται ότι αποτελεί υποομάδα της S_3, συμβολίζεται με $\sigma^{-1} \cdot H \cdot \sigma$ και λέγεται **συζυγής υποομάδα** της Η.

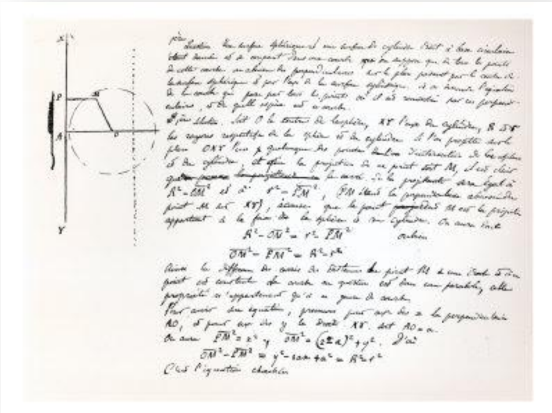
Στην περίπτωση όπου ισχύει $\sigma^{-1} \cdot H \cdot \sigma = H$ για κάθε $\sigma \in S_3$ τότε η Η λέγεται **κανονική υποομάδα** της S_3 και συμβολίζουμε $H \lhd S_3$.

Αποδεικνύεται ότι ισχύει : $I \lhd A_3 \lhd S_3$.

10. Όταν η επανάσταση συνάντησε την ευφυΐα …

Ο Abel μετά την απόδειξη της μη επιλυσιμότητας – με ριζικά – της εξίσωσης 5ου βαθμού προσπάθησε να απαντήσει και στο ερώτημα « ποιες εξισώσεις μπορούν να επιλυθούν με ριζικά και ποιες όχι» Σίγουρα είχε αρχίσει να σκέφτεται πάνω στο πρόβλημα αυτό αλλά δυστυχώς δεν πρόλαβε να δώσει απαντήσεις.

Αυτός που έμελε να δώσει απαντήσεις ήταν ο Γάλλος μαθηματικός **Évariste Galois** (**1811 - 1832**).
Ο Évariste γεννήθηκε στην κωμόπολη Bourg-la-Reine κοντά στο Παρίσι και το 1825 εισέρχεται ως υπότροφος στο Βασιλικό Κολέγιο Louis-Grand. Τα πρώτα τρία χρόνια θεωρήθηκε ένας από τους καλύτερους σπουδαστές και τον Οκτώβριο του 1825 άρχισε να παρακολουθεί την τάξη ρητορικής. Αλλά οι επιδόσεις του έπεσαν και γι' αυτό ο διευθυντής τον κάλεσε, τον Ιανουάριο του 1827 να επαναλάβει το μάθημα. Ο Évariste έγινε ξανά ένας από τους καλύτερους σπουδαστές και βραβεύθηκε για τις μεταφράσεις του σε αρχαία ελληνικά κείμενα. Τότε εγγράφεται στην τάξη των μαθηματικών με καθηγητή τον **M. Vernier**. Όλα τα υπόλοιπα μαθήματα παύουν να τον ενδιαφέρουν και αφιερώνεται αποκλειστικά στη μελέτη των έργων των μαθηματικών **Legendre** , **Lagrange** , **Abel** και **Gauss.**



Το 1828 δίνει εξετάσεις για την **École Polytechnique** αλλά απορρίπτεται. Επιστρέφει στο Κολέγιο και παρακολουθεί μόνο την τάξη των εξειδικευμένων μαθηματικών με δάσκαλο τον **Louis-Paul Richard**. Τον Απρίλιο του 1829 δημοσιεύει την πρώτη του εργασία για τα συνεχή κλάσματα και αρχίζει να μελετά για πρώτη φορά το πρόβλημα της επίλυσης των αλγεβρικών εξισώσεων με ριζικά. Τα αποτελέσματα της έρευνας τα στέλνει στην Ακαδημία των Επιστημών. Η εργασία του θα εξεταζόταν από τον **Cauchy** ο οποίος όμως την έχασε!

Τον Ιούλιο του 1829 ο πατέρας του αυτοκτόνησε κυνηγημένος από τον τοπικό κλήρο . Μερικές μέρες μετά δίνει ξανά εξετάσεις για την École Polytechnique για δεύτερη φορά και αποτυγχάνει. Ακολουθώντας τη συμβουλή του Richard παρακολουθεί την προπαρασκευαστική σχολή, μετεξέλιξη της **Ecole Normale**. Εκεί γνωρίζεται με τον **Auguste Chevalier** και γράφει τρεις εργασίες τις οποίες υποβάλει στην Ακαδημία Επιστημών για να συμμετάσχει σε ένα διαγωνισμό. Το χειρόγραφο θα το έκρινε ο διακεκριμένος μαθηματικός **Fourier**, που δυστυχώς πεθαίνει μετά από λίγο. Τα χειρόγραφα του Galois δεν βρέθηκαν στο σπίτι του Fourier, ευτυχώς δημοσίευσε τις εργασίες του στο **Bulletin de Férussac**.

Μετά από όλες αυτές τις ατυχίες του έγινε πεποίθηση ότι κάποιος ή κάποιοι τον κυνηγούσαν. Κατέληξε στο συμπέρασμα ότι ως αποτέλεσμα της κακής οργάνωσης της κοινωνίας, καταδικαζόταν το ταλέντο ενώ η μετριότητα ευημερούσε. Έπρεπε λοιπόν να αναμορφωθεί πολιτικά η κοινωνία.

Το φθινόπωρο του 1830 αποβάλλεται από τη σχολή επειδή σε άρθρο του κατηγόρησε τον διευθυντή της για αντιδημοκρατική συμπεριφορά. Κατατάσσεται στο πυροβολικό της εθνοφρουράς, έναν ιδιότυπο στρατό της επανάστασης κατά της κυβέρνησης των μοναρχικών του βασιλιά Λουδοβίκου – Φιλίππου. Τα μόνο έσοδα του εκείνη την εποχή είναι όσα έβγαζε από κάποια ιδιαίτερα μαθήματα. Στέλνει για μία ακόμα φορά το χειρόγραφο που είχε χαθεί πέρυσι από τον Fourier στην Ακαδημία με τίτλο « ***Περί των συνθηκών επιλυσιμότητας εξισώσεων με ριζικά***». Αυτή τη φορά κριτές ήταν οι **Lacroix** και **Poisson**, η απάντηση από τον Poisson έλεγε «*Η απόδειξη δεν είναι ούτε αρκετά καθαρή ούτε αρκετά αναπτυγμένη ώστε να μας επιτρέψει να κρίνουμε την ακρίβειά της*» .

Τον Ιούνιο του 1831 δικάστηκε με την κατηγορία της απόπειρας κατά της ζωής του βασιλέα της Γαλλίας. Το δικαστήριο τον αθωώνει αλλά η μυστική αστυνομία αρχίζει να τον παρακολουθεί. Στις 14 Ιουλίου συλλαμβάνεται σε πορεία και οδηγείται στην φυλακή. Στο νοσοκομείο της φυλακής γνωρίζεται με την κόρη του γιατρού της φυλακής και την ερωτεύεται. Ο έρωτας αυτός ήταν η αιτία της διαμάχης με τον φίλο της κοπέλας που οδήγησε σε μονομαχία. Το πρωί της 30 Μαρτίου ο Galois βρίσκεται βαριά πληγωμένος από έναν περαστικό. Πεθαίνει την επομένη, θάβεται στο κοιμητήριο του Μονπαρνάς σε τάφο που ακόμα και σήμερα δεν είναι γνωστός.

Το βράδυ πριν την μονομαχία γράφει στον **Auguste Chevalier** όλες του τις ανακαλύψεις. Του ζητά να δείξει το χειρόγραφο στους **Jacobi** και **Gauss**. Γύρω από τα τελευταία γραπτά του Galois έχει αναπτυχθεί ένας μύθος. Σε περιθώριο του χειρογράφου διαβάζεται το αγωνιώδες σχόλιο « *δεν έχω χρόνο*» . Το κείμενο αυτό δημοσιεύθηκε δεκατέσσερα χρόνια αργότερα , όμως οι ιδέες του γίνονται αποδεκτές από την μαθηματική κοινότητα την δεκαετία του 1870, αφού είχε προηγηθεί η έκδοση του βιβλίου « ***Οι αλγεβρικές εξισώσεις και η θεωρία των αντικαταστάσεων***» του **Camille Jordan** .

Για να καταλάβουμε τον τρόπο με τον οποίο ο Galois απάντησε στο πρόβλημα που εξετάζουμε πρέπει καταρχήν να δώσουμε κάποιους ορισμούς και μερικά θεωρήματα χωρίς να τα αποδείξουμε.

<u>1^{ος} ορισμός</u> : Στοιχειώδεις συμμετρικές συναρτήσεις

Ουσιαστικά πρόκειται για τις σχέσεις που ανακάλυψε ο Vietta ότι ισχύουν ανάμεσα στις ρίζες μιας πολυωνυμικής εξίσωσης και τους συντελεστές της.
Θυμίζουμε ότι :
Σε μία εξίσωση 2^{ου} βαθμού με ρίζες τους αριθμούς x_1, x_2 τότε οι παραστάσεις (συναρτήσεις) $A = x_1 + x_2$, $B = x_1 \cdot x_2$ εκφράζονται συναρτήσει των συντελεστών της εξίσωσης και δεν μεταβάλλονται αν οι ρίζες μετατεθούν.

Σε μία εξίσωση 3^{ου} βαθμού με ρίζες τους αριθμούς x_1, x_2, x_3 τότε οι παραστάσεις (συναρτήσεις) $A = x_1 + x_2 + x_3$, $B = x_1 \cdot x_2 + x_2 \cdot x_3 + x_3 \cdot x_1$, $G = x_1 \cdot x_2 \cdot x_3$ εκφράζονται συναρτήσει των συντελεστών της εξίσωσης και δεν μεταβάλλονται αν οι ρίζες μετατεθούν.

Παρόμοιες συμμετρικές συναρτήσεις υπάρχουν για οποιαδήποτε βαθμού πολυωνυμικές εξισώσεις.

<u>2^{ος} Ορισμός</u> : Συμμετρική συνάρτηση σε ένα σύνολο μεταθέσεων των ριζών μιας εξίσωσης (Παρακάτω θα ασχοληθούμε με τις ρίζες x_1, x_2, x_3 της κυβικής εξίσωσης και με τα σύνολα S_3 (ομάδα μεταθέσεων των ριζών) και A_3 (η γνωστή υποομάδα της S_3 - *δες « 9^{ο} μέρος »*)

Ορισμός : Έστω $f(x_1, x_2, x_3)$ μία παράσταση των ριζών x_1, x_2, x_3 μιας κυβικής εξίσωσης και $\sigma \in S_3$ δηλαδή μία οποιαδήποτε (από τις 6 δυνατές) μετάθεση των ριζών. Αν ισχύει $\sigma \cdot f(x_1, x_2, x_3) = f(\sigma(x_1), \sigma(x_2), \sigma(x_3)) = f(x_1, x_2, x_3)$ για κάθε $\sigma \in S_3$ τότε η f λέγεται συμμετρική στο S_3.

<u>Παράδειγμα 1^{ο}</u> : Η συνάρτηση $f(x_1, x_2, x_3) = (x_1 - x_2) \cdot (x_2 - x_3) \cdot (x_3 - x_1)$ δεν είναι συμμετρική στο S_3 διότι εύκολα μπορούμε να δείξουμε ότι :

$\sigma_0 \cdot f = f$, $\sigma_1 \cdot f = f$, $\sigma_2 \cdot f = f$ αλλά $\sigma_3 \cdot f \neq f$, $\sigma_4 \cdot f \neq f$, $\sigma_5 \cdot f \neq f$ μπορούμε όμως να θεωρήσουμε την f ως συμμετρική συνάρτηση στο $A_3 = \{\sigma_0, \sigma_1, \sigma_2\}$.

<u>Παράδειγμα 2^{ο}</u> : Η συνάρτηση
$D(x_1, x_2, x_3) = (x_1 - x_2)^2 \cdot (x_2 - x_3)^2 \cdot (x_3 - x_1)^2 = [f(x_1, x_2 x_3)]^2$ είναι συμμετρική στο S_3 άρα και στο A_3.

1ο Θεώρημα : Κάθε ρητή συμμετρική συνάρτηση ενός συνόλου μπορεί να γραφεί ως ρητή συνάρτηση των στοιχειωδών συναρτήσεων .

Παράδειγμα : είναι γνωστές οι ασκήσεις όπου ζητούν να εκφράσουμε παραστάσεις όπως η $K=(x_1-x_2)^2$ ως συνάρτηση των συμμετρικών στοιχειωδών συναρτήσεων $A=x_1+x_2$ και $B=x_1\cdot x_2$ των ριζών μιας δευτεροβάθμιας εξίσωσης. Εύκολα μπορούμε να δείξουμε ότι : $K=A^2-4B$

2ο Θεώρημα : Έστω G μία ομάδα και H μία κανονική υποομάδα της G με δείκτη πρώτο αριθμό p, τότε κάθε συμμετρική συνάρτηση της H μπορεί να εκφραστεί συναρτήσει συμμετρικών συναρτήσεων της G με εξαγωγή ρίζας τάξεως p.

Παράδειγμα : Προηγουμένως είπαμε ότι η συνάρτηση $f(x_1,x_2,x_3)=(x_1-x_2)\cdot(x_2-x_3)\cdot(x_3-x_1)$ είναι συμμετρική στο A_3 ενώ η $D(x_1,x_2,x_3)=(x_1-x_2)^2\cdot(x_2-x_3)^2\cdot(x_3-x_1)^2=[f(x_1,x_2x_3)]^2$ είναι συμμετρική στο S_3, επίσης ισχύει ότι : $\frac{|S_3|}{|A_3|}=\frac{6}{3}=2$ δηλαδή ο δείκτης της A_3 είναι 2 πρώτος αριθμός. Άρα οποιαδήποτε συμμετρική συνάρτηση της A_3 άρα και η f εκφράζεται από την D με εξαγωγή τετραγωνικής ρίζας, πράγματι ισχύει ότι $f=\sqrt{D}=\sqrt{f^2}$.

3ος Ορισμός : Μία ομάδα G είναι επιλύσιμη αν υπάρχει ακολουθία υποομάδων της $I \triangleleft G_1 \triangleleft G_2 \triangleleft \ldots \triangleleft G$, όπου η κάθε μία είναι κανονική υποομάδα της επόμενης με δείκτη πρώτο αριθμό και με την I την ταυτοτική υποομάδα.

Μέχρι το σημείο αυτό μπορούμε να διαπιστώσουμε την συγγένεια της θεωρίας του Galois με την αντίστοιχη προσπάθεια του Lagrange. Για παράδειγμα ας δούμε τι συμβαίνει στην **τριτοβάθμια εξίσωση** , ισχύουν :

$$I \triangleleft A_3 \triangleleft S_3 \text{ με } \frac{|A_3|}{|I|}=\frac{3}{1}=3 \text{ και } \frac{|S_3|}{|A_3|}=\frac{6}{3}=2 .$$

Συγχρόνως οι ρίζες x_1, x_2, x_3 που μπορούν να θεωρηθούν ως συμμετρικές συναρτήσεις που ανήκουν στην I (ισχύει ότι $\sigma_0\cdot x_1=x_1$, $\sigma_0\cdot x_2=x_2$, $\sigma_0\cdot x_3=x_3$)

Εκφράζονται μέσω συμμετρικών συναρτήσεων που ανήκουν στην A_3 με εξαγωγή κάποιας κυβικής ρίζας, ο οποίες με την σειρά του εκφράζονται με τη βοήθεια των στοιχειωδών συμμετρικών συναρτήσεων $A=x_1+x_2+x_3$, $B=x_1\cdot x_2+x_2\cdot x_3+x_3\cdot x_1$ και $G=x_1\cdot x_2\cdot x_3$) με εξαγωγή τετραγωνικής ρίζας. Άρα τελικά οι ρίζες x_1, x_2, x_3 μπορούν να βρεθούν με χρήση κυβικών και τετραγωνικών ριζών. Άρα η κυβική εξίσωση επιλύεται με ριζικά.

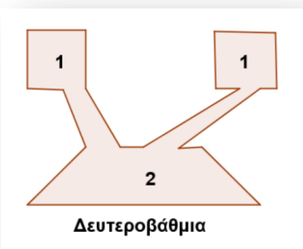
Παρόμοια διαδικασία ισχύει και σε μία **δευτεροβάθμια εξίσωση** αφού ισχύει ότι η ομάδα $(S_2, \circ)$ των μεταθέσεων των δύο ριζών της έχει κανονική υποομάδα την I, δηλαδή $I \triangleleft S_2$ με $\frac{|S_2|}{|I|} = 2$, άρα οι ρίζες x_1, x_2 της εξίσωσης (συμμετρικές συναρτήσεις της I) εκφράζονται με εξαγωγή τετραγωνικής ρίζας των στοιχειωδών συμμετρικών συναρτήσεων $A = x_1 + x_2$ και $B = x_1 \cdot x_2$. Άρα η δευτεροβάθμια εξίσωση επιλύεται με ριζικά.

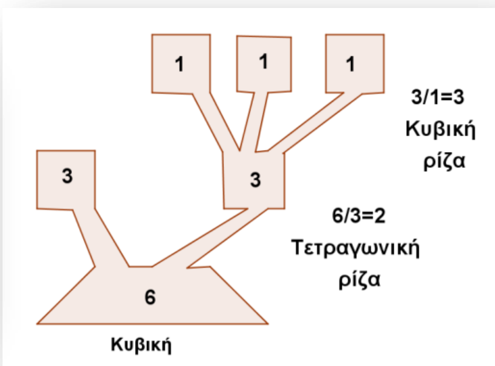
Σε μία **εξίσωση 4ου βαθμού** έχουμε ότι η ομάδα S_4 των μεταθέσεων των τεσσάρων ριζών x_1, x_2, x_3, x_4 αποτελείται από $4! = 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 24$ στοιχεία. Αποδεικνύεται ότι υπάρχει μία αλυσίδα κανονικών υποομάδων της μορφής $I \triangleleft H \triangleleft K \triangleleft L \triangleleft S_4$ με $\frac{|H|}{|I|} = \frac{2}{1} = 2$, $\frac{|K|}{|H|} = \frac{4}{2} = 2$, $\frac{|L|}{|K|} = \frac{12}{4} = 3$ και $\frac{|S_4|}{|L|} = \frac{24}{12} = 2$. Εργαζόμενοι παρόμοια με πριν καταλήγουμε ότι η εξίσωση τετάρτου βαθμού επιλύεται με ριζικά με εξαγωγή τετραγωνικής – τετραγωνικής – κυβικής και τετραγωνικής ρίζας.

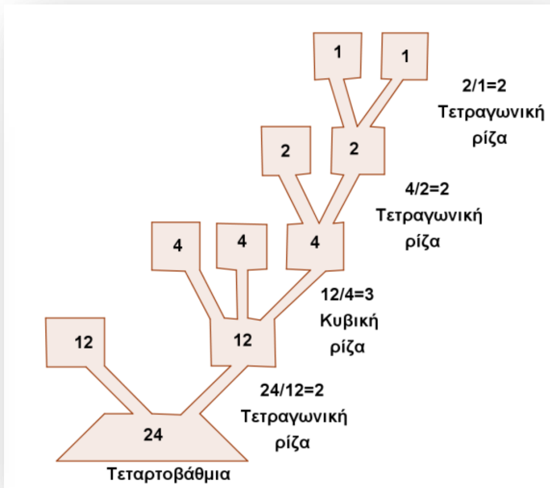
Στην **εξίσωση 5ου βαθμού** όμως η ομάδα $(S_5, \circ)$ με την S_5 να είναι το σύνολο των $5! = 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 120$ δυνατών μεταθέσεων των πέντε ριζών x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 έχει μία κανονική υποομάδα A (εναλλάσσουσα υποομάδα) με $\frac{|S_5|}{|A|} = \frac{120}{60} = 2$ η οποία όμως δεν έχει άλλες κανονικές υποομάδες άρα η S_5 δεν είναι επιλύσιμη.

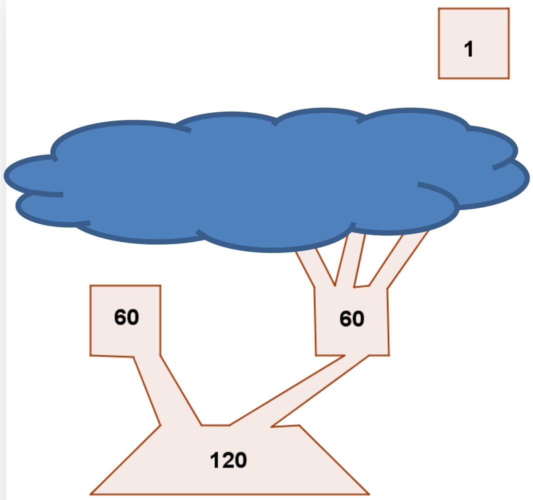
Άρα γενικά μία εξίσωση 5ου βαθμού δεν επιλύεται με χρήση ριζικών.

Την διαδικασία αυτή την παρουσιάζει ο **Ian Stewart** στο βιβλίο– αφορμή της παρούσας εργασίας – « Ο Γκαλουά και το κλειδί της συμμετρίας » στις σελίδες 182 και 183 χρησιμοποιώντας τα παρακάτω σχήματα :









Πεμπτοβάθμια εξίσωση

Όσο όμορφη κι αν είναι η θεωρία που αναπτύχθηκε πιο πάνω έχει ένα σοβαρό μειονέκτημα. Δεν εξηγεί γιατί κάποιες εξισώσεις 5ου βαθμού μπορούν να επιλυθούν με ριζικά, όπως π.χ. η εξίσωση
$(x-1)\cdot(x-\sqrt{2})\cdot(x+\sqrt{2})\cdot(x-\sqrt{3})\cdot(x+\sqrt{3})=0$
και πολλές άλλες που μπορούμε εύκολα να κατασκευάσουμε.

« Η τρομερή αλήθεια είναι ότι με τις μεθόδους που διέθετε ο Galois δεν υπήρχε τρόπος να απαντήσουμε στο ερώτημα αυτό - Ian Stewart »

Υπάρχει όμως πάντα μία ομάδα που σχετίζεται με την αντίστοιχη αλγεβρική εξίσωση. Η ομάδα συμμετρίας της, που ονομάζεται και ομάδα Galois προς τιμή του επινοητή της. Αν η ομάδα Galois – που είναι πάντα υποομάδα της ομάδας των μεταθέσεων των ριζών της - είναι επιλύσιμη τότε η εξίσωση επιλύεται ειδάλλως όχι. Η μεγάλη πρόοδος μετά τον Galois με τις εργασίες των **Richard Dedekind (1831-1916) , Leopold Kronecker (1823-1891)** και **Emil Artin (1898-1962)** ήταν η επινόηση του τρόπου υπολογισμού της ομάδας Galois οποιασδήποτε εξίσωσης. Ο Galois δεν κατείχε μία τέτοια τεχνική.

Σήμερα μπορούμε να πάμε σε μία κατάλληλη μαθηματική ιστοσελίδα, να εισάγουμε την εξίσωσή μας και να υπολογίσουμε την ομάδα Galois της.

Σήμερα είναι εύκολο να διακρίνουμε ποια από τις εξισώσεις $x^5-6x+3=0$ και $x^5+15x+12=0$ μπορεί να επιλυθεί με ριζικά.

Ή μήπως όχι ;

Βιβλιογραφία – αρθρογραφία

1. Ο Γκαλουά και το κλειδί της συμμετρίας **Ian Stewart** Εκδόσεις : Τραυλός.
2. Οι μαθηματικοί **E.T.Bell** Πανεπιστημιακές εκδόσεις Κρήτης.
3. Η Ιστορία των Μαθηματικών **R. Mankiewicz** Εκδόσεις : Αλεξάνδρεια
4. Οι ιστορικές ρίζες των στοιχειωδών μαθηματικών **L.Bunt – P.Jones – J. Bedient** Επιστημονικές και τεχνικές εκδόσεις Γ.Α. Πνευματικός
5. Τα περίφημα άλυτα προβλήματα της αρχαιότητος **Μ.Α. Μπρίκας** Εκδόσεις Παπασπύρου
6. Ιστορία των Ελληνικών μαθηματικών **Ε. Σταμάτη** Εκδόσεις αφοί- Ρόδη
7. Η Γεωμετρία και οι εργάτες της στην Αρχαία Ελλάδα **Δ. Τσιμπουράκης**
8. Στοιχεία Ευκλείδη Επιμέλεια : **Ε. Σταμάτη** Ο.Ε.Δ.Β.
9. Απολλώνιου Κωνικά Επιμέλεια : **Ε. Σταμάτη** Ο.Ε.Δ.Β.
10. Διόφαντου Αριθμητικά Επιμέλεια : **Ε. Σταμάτη** Ο.Ε.Δ.Β.
11. Wikipedia – για τα βιογραφικά στοιχεία των πρωταγωνιστών.
12. Περιοδικό Quantum Ιούλιος – Αύγουστος 1996 άρθρο « Οι εκπλήξεις της τριτοβάθμιας» των **Dmitry Fuchs και Irene Klumova**
13. Περιοδικό Quantum Ιούλιος – Αύγουστος 1996 άρθρο « Η πολυτάραχη ζωή του Evariste Galois » του **Y.P. Soloyov**
14. Άρθρο « Εισαγωγή στη θεωρία Galois » του **Κασαπίδη Γιώργου**
15. Περιοδικό Ευκλείδης Γ τεύχος 1ο – 1983 άρθρο « Πολυωνυμικές εξισώσεις» των **Σ. Γιωτόπουλος – Θ. Εξαρχάκος – Μ. Λάμπρου**
16. Περιοδικό Μαθηματική επιθεώρηση τεύχος 20 άρθρο « Πολυωνυμικές εξισώσεις και θεωρία του Galois » του **Θ. Εξαρχάκου**.
17. Διπλωματική εργασία « Μία μελέτη της ιστορικής εξέλιξης της θεωρίας του Galois » του **Παναγιώτη Μαραγκού** 2012- Εθνικό Καποδιστριακό Πανεπιστήμιο Αθηνών και Πανεπιστήμιο Κύπρου
18. Διπλωματική εργασία « Από την εφαρμογή των χωρίων στη σύγχρονη επίλυση εξισώσεων » της **Ιφιγένειας Συνοδινού** 2010- Εθνικό Καποδιστριακό Πανεπιστήμιο Αθηνών και Πανεπιστήμιο Κύπρου
19. Τριγωνομετρικά λουκούμια **Eli Maor** Εκδόσεις : Κάτοπτρο
20. Ιστορία των μαθηματικών **Victor katz** Πανεπιστημιακές εκδόσεις Κρήτης.
21. Το θεώρημα του παπαγάλου **Ντένι Γκετζ** εκδόσεις : Πόλις

Περιεχόμενα :