ΤΡΑΠΕΖΑ ΘΕΜΑΤΩΝ ΜΑΘ. ΚΑΤ/ΝΣΗ Β ΛΥΚΕΙΟΥ

ΔΙΑΝΥΣΜΑΤΑ

ΘΕΜΑ 2

1^{o} ΘΕΜΑ

Δίνονται τα διανύσματα $\vec{a}$ και $\vec{\beta}$ με $\left(\widehat{\vec{a},\vec{\beta}}\right)=\frac{\pi}{3}$ και $|\vec{a}|=\sqrt{2}$, $|\vec{\beta}|=2\sqrt{2}$.

α) Να βρείτε το εσωτερικό γινόμενο $\vec{a}\,\vec{\beta}$.

(Μονάδες 8)

β) Αν τα διανύσματα $2\vec{a}+\vec{\beta}$ και $\kappa\vec{a}+\vec{\beta}$ είναι κάθετα να βρείτε την τιμή του κ.

(Μονάδες 10)

γ) Να βρείτε το μέτρο του διανύσματος $2\vec{a}+\vec{\beta}$.

(Μονάδες 7)

2^{o} ΘΕΜΑ

Σε τρίγωνο ΑΒΓ είναι: $\overrightarrow{AB}=(-4,-6)$, $\overrightarrow{A\Gamma}=(2,-8)$.

α) Να βρείτε τις συντεταγμένες του διανύσματος $\overrightarrow{AM}$, όπου ΑΜ είναι η διάμεσος του τριγώνου ΑΒΓ.

(Μονάδες 7)

β) Να αποδείξετε ότι η γωνία $\hat{A}$ είναι οξεία.

(Μονάδες 10)

γ) Αν στο τρίγωνο ΑΒΓ επιπλέον ισχύει Α(3,1), να βρείτε τις συντεταγμένες των κορυφών του Β και Γ.

(Μονάδες 8)

3^{o} ΘΕΜΑ

Έστω τα διανύσματα $\vec{\alpha}$ και $\vec{\beta}$ για τα οποία : $2|\vec{\alpha}| = |\vec{\beta}| = 2\sqrt{2}$ και $(\widehat{\vec{\alpha},\vec{\beta}}) = 60^{\circ}$

α) Να αποδείξετε ότι $\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta} = 2$

(Μονάδες 10)

β) Να υπολογίσετε τα μέτρα των διανυσμάτων $\vec{\alpha} + \vec{\beta}$ και $\vec{\alpha} - \vec{\beta}$

(Μονάδες 15)

4^{o} ΘΕΜΑ

Δίνονται τα διανύσματα $\overrightarrow{AB} = (\kappa^2 - 6\kappa + 9, \kappa - 3)$ και $\overrightarrow{A\Gamma} = (1,6)$, όπου $\kappa \in \mathbb{R}$

α) Να βρείτε το εσωτερικό γινόμενο $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{A\Gamma}$

(Μονάδες 8)

β) Να βρείτε τις τιμές του κ, ώστε τα διανύσματα $\overrightarrow{AB}$ και $\overrightarrow{A\Gamma}$ να είναι κάθετα.

(Μονάδες 9)

γ) Για $\kappa = 1$ να βρείτε το διάνυσμα $\overrightarrow{B\Gamma}$.

(Μονάδες 8)

5^{o} ΘΕΜΑ

Δίνεται τρίγωνο $AB\Gamma$ και σημεία Δ και E του επιπέδου τέτοια, ώστε $\overrightarrow{A\Delta} = 2\overrightarrow{AB} + 5\overrightarrow{A\Gamma}$ και $\overrightarrow{AE} = 5\overrightarrow{AB} + 2\overrightarrow{A\Gamma}$

α) Να γράψετε το διάνυσμα $\overrightarrow{\Delta E}$ ως γραμμικό συνδυασμό των $\overrightarrow{AB}$ και $\overrightarrow{A\Gamma}$.

(Μονάδες 13)

β) Να δείξετε ότι τα διανύσματα $\overrightarrow{\Delta E}$ και $\overrightarrow{B\Gamma}$ είναι παράλληλα.

(Μονάδες 12)

6^{o} ΘΕΜΑ

Δίνεται παραλληλόγραμμο $ΑΒΓΔ$ και $Ε$, $Ζ$ σημεία τέτοια ώστε: $\overrightarrow{ΑΕ}=\frac{2}{5}\overrightarrow{ΑΔ}$, $\overrightarrow{ΑΖ}=\frac{2}{7}\overrightarrow{ΑΓ}$.

α) Να γράψετε τα διανύσματα $\overrightarrow{ΕΖ}$ και $\overrightarrow{ΖΒ}$ ως γραμμικό συνδυασμό των $\overrightarrow{ΑΒ}$ και $\overrightarrow{ΑΔ}$.

(Μονάδες 13)

β) Να αποδείξτε ότι τα σημεία $Β$, $Ζ$ και $Ε$ είναι συνευθειακά.

(Μονάδες 12)

7^{o} ΘΕΜΑ

Δίνονται τα διανύσματα $\overrightarrow{ΟΑ}=2\vec{i}+4\vec{j}$, $\overrightarrow{ΟΒ}=3\vec{i}+\vec{j}$ και $\overrightarrow{ΟΓ}=5\vec{i}-5\vec{j}$, όπου $\vec{i}$ και $\vec{j}$ είναι τα μοναδιαία διανύσματα των αξόνων $x'x$ και $y'y$ αντίστοιχα.

α) Να βρείτε τις συντεταγμένες των $\overrightarrow{ΑΒ}$ και $\overrightarrow{ΒΓ}$.

(Μονάδες 12)

β) Να εξετάσετε αν τα σημεία $Α$, $Β$ και $Γ$ μπορεί να είναι κορυφές τριγώνου.

(Μονάδες 13)

ΘΕΜΑ 4

8^{ο} ΘΕΜΑ

Δίνονται τα διανύσματα $\overrightarrow{OA}=(4,-2)$ και $\overrightarrow{OB}=(1,2)$, όπου O είναι η αρχή των αξόνων.

α) Να αποδείξετε ότι τα διανύσματα $\overrightarrow{OA}$ και $\overrightarrow{OB}$ είναι κάθετα.

(Μονάδες 4)

β) Αν $\Gamma(\alpha,\beta)$ είναι σημείο της ευθείας που διέρχεται από τα σημεία A και B, τότε:

i) να αποδείξετε ότι: $\overrightarrow{AB}=(-3,4)$ και $\overrightarrow{A\Gamma}=(\alpha-4,\beta+2)$

(Μονάδες 5)

ii) να αποδείξετε ότι: $4\alpha+3\beta=10$

(Μονάδες 6)

iii) αν επιπλέον τα διανύσματα $\overrightarrow{O\Gamma}$ και $\overrightarrow{AB}$ είναι κάθετα, να βρείτε τις συντεταγμένες του σημείου Γ.

(Μονάδες 10)

9^{ο} ΘΕΜΑ

Σε τρίγωνο $AB\Gamma$ είναι $\overrightarrow{AB}=(\lambda,\lambda+1)$, $\overrightarrow{A\Gamma}=(3\lambda,\lambda-1)$, όπου $\lambda\neq 0$ και $\lambda\neq -2$, και M είναι το μέσο της πλευράς $B\Gamma$

α) Να αποδείξετε ότι $\overrightarrow{AM}=(2\lambda,\lambda)$

(Μονάδες 7)

β) Να βρείτε την τιμή του λ για την οποία το διάνυσμα $\overrightarrow{AM}$ είναι κάθετο στο διάνυσμα $\vec{\alpha}=\left(\frac{2}{\lambda},-\lambda\right)$

(Μονάδες 8)

γ) Για την τιμή του λ που βρήκατε στο ερώτημα β), να υπολογίσετε το εμβαδόν του τριγώνου $AB\Gamma$

(Μονάδες 10)

10^{o} ΘΕΜΑ

Δίνονται τα διανύσματα $\vec{\alpha}$, $\vec{\beta}$ και $\vec{\gamma}$ για τα οποία ισχύουν:

$|\vec{\alpha}|=2$, $|\vec{\beta}|=1$, $(\widehat{\vec{\alpha},\vec{\beta}})=60^{\circ}$ και $\vec{\gamma}=\frac{\kappa}{2}\cdot\vec{\alpha}-\vec{\beta}$, όπου $\kappa\in\mathbb{R}$

α) Να υπολογίσετε το εσωτερικό γινόμενο $\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}$

(Μονάδες 3)

β) Αν ισχύει $\vec{\beta}\cdot\vec{\gamma}=\kappa$, τότε:

i) να αποδείξετε ότι: $\kappa=-2$

(Μονάδες 6)

ii) να υπολογίσετε το μέτρο του διανύσματος $\vec{\gamma}$

(Μονάδες 8)

iii) να αποδείξετε ότι τα διανύσματα $3\vec{\alpha}+2\vec{\gamma}$ και $\vec{\beta}-\vec{\gamma}$ είναι κάθετα.

(Μονάδες 8)

11^{o} ΘΕΜΑ

α) Να εξετάσετε πότε ισχύει καθεμιά από τις ισότητες: $|\vec{u}+\vec{v}|=|\vec{u}|+|\vec{v}|$ και $|\vec{u}+\vec{v}|=\left||\vec{u}|-|\vec{v}|\right|$

(Μονάδες 10)

β) Δίνονται τα διανύσματα $\vec{\alpha},\vec{\beta},\vec{\gamma}$ για τα οποία ισχύουν: $\vec{\alpha}+\vec{\beta}+\vec{\gamma}=\vec{0}$ και $\frac{|\vec{\alpha}|}{3}=\frac{|\vec{\beta}|}{4}=\frac{|\vec{\gamma}|}{7}$.

i) Να αποδείξετε ότι: $\vec{\alpha}\uparrow\uparrow\vec{\beta}$ και $\vec{\beta}\uparrow\downarrow\vec{\gamma}$

(Μονάδες 8)

ii) Να αποδείξετε ότι: $7\vec{\alpha}+3\vec{\gamma}=\vec{0}$

(Μονάδες 7)

12^{o} ΘΕΜΑ

Δίνονται τα σημεία $A\left(1,\frac{-3}{2}\right)$, $B(2,-1)$ και $\Gamma\left(\mu,\frac{\mu-4}{2}\right)$, όπου $\mu\in\mathbb{R}$

α) Να βρείτε τις συντεταγμένες των διανυσμάτων $\overline{AB}$ και $\overline{B\Gamma}$

(Μονάδες 8)

β) Να αποδείξετε ότι για κάθε $\mu\in\mathbb{R}$ το σημείο Γ ανήκει στην ευθεία που διέρχεται από τα σημεία A και B

(Μονάδες 8)

γ) Να βρείτε την τιμή του μ έτσι, ώστε $\mu\cdot\overline{B\Gamma}=-\overline{AB}$

(Μονάδες 6)

δ) Για την τιμή του μ που βρήκατε στο ερώτημα γ), να αποδείξετε ότι $(OB\Gamma)=1$, όπου O είναι η αρχή των αξόνων.

(Μονάδες 3)

13^{o} ΘΕΜΑ

Δίνονται τα σημεία $A(3,4)$, $B(5,7)$ και $\Gamma(2\mu+1,3\mu-2)$, όπου $\mu\in\mathbb{R}$

α) Να βρείτε τις συντεταγμένες των διανυσμάτων $\overline{AB}$ και $\overline{A\Gamma}$ και, στη συνέχεια, να αποδείξετε ότι τα σημεία A, B και Γ δεν είναι συνευθειακά για κάθε τιμή του μ.

(Μονάδες 8)

β) Να αποδείξετε ότι:

i) το εμβαδόν του τριγώνου $AB\Gamma$ δεν εξαρτάται από το μ.

(Μονάδες 5)

ii) για κάθε τιμή του μ το σημείο Γ ανήκει σε ευθεία ε, της οποίας να βρείτε την εξίσωση.

(Μονάδες 7)

γ) Να ερμηνεύσετε γεωμετρικά γιατί το εμβαδόν του τριγώνου $AB\Gamma$ παραμένει σταθερό, ανεξάρτητα από την τιμή του μ;

(Μονάδες 5)