ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΑ Α.Β.

ΣΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ Γ ΚΑΤ/ΝΣΗΣ (Μιγαδικοί Αριθμοί)

Διάρκεια: 2 ώρες

Θέμα 1 1. Να αποδείξετε ότι $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$, τότε: $\overline{z_1 + z_2} = \overline{z_1} + \overline{z_2}$.

Μονάδες 10

2. Να ορίσετε το μέτρο ενός μιγαδικού αριθμού z.

Μονάδες 5

3. Να χαρακτηρίσετε τις παρακάτω προτάσεις ως Σώστες (Σ) ή Λάθος (Λ).

(α') Η απόσταση των εικόνων των μιγαδικών z και $\overline{z}$ είναι $2\left|\Im m(z)\right|$.

(β') Αν $z \in \mathbb{C}$ και $z^2 < 0$, τότε z φανταστικός.

(γ') Οι εικόνες των μιγαδικών z και $i \cdot \overline{z}$ είναι συμμετρικές ως προς τη διχοτόμο του πρώτου τεταρτημορίου του μιγαδικού επιπέδου.

(δ') Ο γεωμετρικός τόπος των εικόνων των μιγαδικών z που ικανοποιούν τη σχέση $(z-1)^3 = (i-z)^3$ είναι η μεσοκάθετος του τμήματος AB όπου $A(1,0)$, $B(0,1)$.

(ε') Αν $z,\ w \in \mathbb{C}$ τότε $|z + w \cdot i| = \sqrt{z^2 + w^2}$.

Μονάδες $2 \times 5 = 10$

Θέμα 2 Έστω οι μιγαδικοί z για τους οποίους $(z+8)^3 - (4z+2)^3 = 0$. Να αποδείξετε ότι:

1. $|z| = 2$
2. ο μιγαδικός $w = \left(z - \dfrac{4}{z}\right)^{2014}$ είναι πραγματικός,
3. $|w| \leq 2^{4028}$
4. $\Big|z+8\Big| + \Big|z^2 - 4z + 3\Big| \geq 1$

Μονάδες $8 + 7 + 6 + 4 = 25$

Θέμα 3 Θεωρούμε τους μιγαδικούς z και $w = \dfrac{2iz + 9 - 12i}{z - 2i}$, με $z \neq 2i$ και τους μιγαδικούς $u_1 = z - 2i$ και $u_2 = w - 2i$. Τότε:

1. Να υπολογισθεί ο z αν $w = 2 - 2i$
2. (α') Να αποδείξετε ότι: $u_1 \cdot u_2 = 5 - 12i$

   (β') Να υπολογισθεί ο u_1 αν ισχύει $u_1 = u_2$
3. Να βρεθεί ο γεωμετρικός τόπος των εικόνων των μιγαδικών z αν $w \in \mathbb{R}$.

Μονάδες $5 + 6 + 6 + 8 = 25$

Θέμα 4 Δίνοται οι μιγαδικοί z και $w = \dfrac{2 - iz}{1 - z}$ και $z \neq 1$.

1. Αν M η εικόνα του z στο μιγαδικό επίπεδο και M' η εικόνα του w, να δείξετε ότι:

$$\left|\overrightarrow{OM}\right| = \frac{|\overrightarrow{M'A}|}{|\overrightarrow{M'B}|}$$

   όπου A και B τα σταθερά σημεία του μιγαδικού επιπέδου $(2, 0)$ και $(0, 1)$, αντίστοιχα.
2. Να βρεθεί ο γεωμετρικός τόπος $\mathcal{C}_1$ των σημείων M' όταν ο z κινείται σε κύκλο κέντρου $(0, 0)$ και ακτίνα 1 με $z \neq 1$.
3. Να βρεθεί ο γεωμετρικός τόπος $\mathcal{C}_2$ των σημείων M' όταν ο z ανήκει σε κύκλο κέντρου $(0, 0)$ και ακτίνα 2.
4. Να βρεθεί η ελαχίστη και η μεγίστη απόσταση της εικόνας του μιγαδικού $w_2 \in \mathcal{C}_2$ από τον γ.τ. $\mathcal{C}_1$.

Μονάδες $6 + 6 + 7 + 6 = 25$