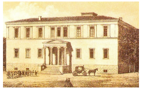

ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΑ ΣΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ Α-Β ΛΥΚΕΙΟΥ

20 Σεπτεμβρίου 2014

Τμήματα Τεχνολογικής Κατ/νσης Γ Λυκείου: Ζ4 - 2h

1. Αν $\alpha,\ \beta,\ \gamma$ είναι ρητοί αριθμοί με λ επίσης ρητός αρθμός, αλλά όχι τέλειος κύβος (δηλ. δεν υπάρχει d ρητός έτσι ώστε $\lambda = d^3$). Τότε:
$$\alpha\sqrt[3]{\lambda^2} + \beta\sqrt[3]{\lambda} + \gamma = 0 \Rightarrow \alpha = \beta = \gamma = 0$$
Μονάδες 25

2. Δίνονται τα ακέραια πολυώνυμα $p(x)$ και $q(x)$. Έστω $\pi_1(x)$ το πηλίκο της διαίρεσης $p(x) \div (x-\alpha)$, $\alpha \in \mathbb{R}$ και $\pi_2(x)$ το πηλίκο της διαίρεσης $q(x) \div (x-\beta)$, $\beta \in \mathbb{R}$, $\alpha \neq \beta$. Να αποδείξετε ότι το υπόλοιπο $v(x)$ της διαίρεσης $p(x)\cdot q(x) \div (x-\alpha)\cdot(x-\beta)$ είναι:
$$v(x) \equiv \pi_1(\beta)q(\beta)(x-\alpha) + \pi_2(\alpha)p(\alpha)(x-\beta) + p(\alpha)q(\beta)$$
Μονάδες 25

3. Δίδεται η συνάρτηση $f(x) = \ln\left(x^3 - 10x^2 + 33x - 36\right)$.
   (α') Να βρεθεί το πεδίο ορισμού της f.
   (β') Δείξτε ότι η f είναι γνησίως αύξουσα στο Πεδίο Ορισμού της.
   (γ') Να λυθεί η εξίσωση:
$$\ln\left(x^3 - 10x^2 + 33x - 36\right) = \ln(x^2-9) + \ln\frac{x-1}{x+3}$$

(δ') Να λυθεί η ανίσωση:

$$e^{f(7)-3f(5)} - e^{x} > e^{x^2} + e^{x+1} - \ln e^{\frac{1}{4}}$$

Μονάδες 25

4. Έστω f μια συνάρτηση η οποία ικανοποιεί τη σχέση

$$f(10-x) = f(10+x),\ \forall x \in \mathbb{R}$$

Αν η $f(x) = 0$ έχει 3 διακεκριμμένες ρίζες $\rho_1,\ \rho_2,\ \rho_3$, τότε:

(α') να υπολογισθεί το $\rho_1 + \rho_2 + \rho_3$.

(β') Αν επιπλέον η $f(x)$ είναι ένα πολυώνυμο, να δοθεί μια πιθανή μορφή του.

Μονάδες 25

ΛΥΣΗ ΤΟΥ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΑΤΟΣ

1.
$$\beta\left(\alpha\sqrt[3]{\lambda^2}+\beta\sqrt[3]{\lambda}+\gamma\right)=0\Rightarrow\alpha\beta\sqrt[3]{\lambda^2}+\beta^2\sqrt[3]{\lambda}+\beta\gamma=0 \tag{1}$$

$$\sqrt[3]{\lambda}\left(\alpha\sqrt[3]{\lambda^2}+\beta\sqrt[3]{\lambda}+\gamma\right)=0\Rightarrow\alpha\lambda+\beta\sqrt[3]{\lambda^2}+\gamma\sqrt[3]{\lambda}=0 \tag{2}$$

$$-\alpha\left(\alpha\lambda+\beta\sqrt[3]{\lambda^2}+\gamma\sqrt[3]{\lambda}\right)=0\Rightarrow-\alpha^2\lambda-\alpha\beta\sqrt[3]{\lambda^2}-\alpha\gamma\sqrt[3]{\lambda}=0 \tag{3}$$

$$(1)-(3)\to(\beta^2-\alpha\gamma)\sqrt[3]{\lambda}=\alpha^2\lambda-\beta\gamma \tag{4}$$

Αν $\beta^2-\alpha\gamma\neq 0$ το πρώτο μέλος της (4) είναι άρρητος και το δεύτερο ρητός, άτοπο. Άρα, $\beta^2-\alpha\gamma=0$ και $\alpha^2\lambda-\beta\gamma=0$.

Αν $\alpha\neq 0$ τότε $\gamma=\dfrac{\beta^2}{\alpha}$. Τότε:

$$\alpha^2\lambda-\beta\gamma=0\Rightarrow\alpha^2\lambda-\beta\cdot\frac{\beta^2}{\alpha}=0\Rightarrow\cdots\Rightarrow\lambda=\left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^3$$

Αδύνατο από υπόθεση. Άρα $\alpha=0$ και συνεπώς $\beta=\gamma=0$ ■

2. (Πολυτεχνείο Εισαγωγικές 1963) Έστω $\pi(x)$ το πηλίκο της διαίρεσης $p(x)q(x)\div(x-\alpha)(x-\beta)$.

$$p(x)q(x)\equiv(x-\alpha)(x-\beta)\pi(x)+kx+\lambda \tag{5}$$

Για $x=\alpha$ και $x=\beta$ η 5 γίνεται αντίστοιχα:

$$\begin{cases} x=\alpha & \to & p(\alpha)q(\alpha)=k\alpha+\lambda \\ x=\beta & \to & p(\beta)q(\beta)=k\beta+\lambda \end{cases} \tag{6}$$

Επίσης:

$$p(x)\equiv\pi_1(x)(x-\alpha)+p(\alpha) \tag{7}$$

$$q(x)\equiv\pi_2(x)(x-\beta)+q(\beta) \tag{8}$$

Επομένως, λύνοντας το σύστημα (6), ως προς k και λ, λαμβάνοντας υπόψη τις (7) και (8), θα πάρουμε την σχέση που ζητάμε. ■

3. (α') Πρέπει

$$x^3-10x^2+33x-36>0\Rightarrow\text{ Horner }\Rightarrow(x-3)^2(x-4)>0$$

Άρα, $D_f=(4,+\infty)$.

(β') Έστω $x_1>x_2>4$. Τότε:

$$(x_1-3)^2(x_1-4)>(x_2-3)^2(x_2-4)\Rightarrow f\ \uparrow$$

(γ')
$$\begin{aligned}\ln\left((x-3)^2(x-4)\right)=\ln\left((x-3)(x-1)\right)\quad\Rightarrow\quad &(x-3)^2(x-4)=(x-3)(x-1)\\ &x=3\vee x=4\pm\sqrt{3}\end{aligned}$$

(δ') $f(7)-3f(5)=\cdots=\ln\dfrac{3}{4}$. Άρα:

$$e^{f(7)-3f(5)}-e^x>e^{x^2}+e^{x+1}-\ln e^{\frac{1}{4}}\Rightarrow\cdots\Rightarrow e^{x^2}+e^{x+1}+e^x<1$$

Η τελευταία σχέση είναι αδύνατη, γιατί:

Αν $x\geq 0$, $e^x>1$, $e^{x+1}\geq e$, $e^{x^2}>0$ ή

$$e^{x^2}+e^{x+1}+e^x>e+1>1$$

Αν $x<0$, $e^x>0$, $e^{x+1}>0$, $e^{x^2}>1$ ή

$$e^{x^2}+e^{x+1}+e^x>1$$

Επομένως, η ανισότητα είναι αδύνατη.

■

4. (Δ. Ντρίζος, 2011)

(α') Η ευθεία $x = 10$ είναι άξονας συμμετρίας. Αν ρ_1 και ρ_2 δύο ρίζες του πρέπει $\dfrac{\rho_1 + \rho_2}{2} = 10$. Η τρίτη ρίζα ρ_3 πρέπει να είναι η $\rho_3 = 10$ και μάλιστα διπλή γιατί κάθε σημείο του άξονα έχει συμμετρικό ως προς $x = 10$. Επομένως $\rho_1 + \rho_2 + \rho_3 = 20 + 10 = 30$.

(β') Το $f(x)$ διαιρείται με το $x - 10$ και μάλιστα όπως εξηγήσαμε το $x - 10$ είναι διπλός παράγοντας. Αν η μία ρίζα του είναι η ρ_1 τότε η συμμετρική είναι η $\rho_2 = \rho_1 + (10 - \rho_1) + (10 - \rho_1) = 20 - \rho_1$. Άρα, μια πιθανή μορφή του $f(x)$ είναι η

$$f(x) = a(x-10)^2(x-\rho_1)(x-20+\rho_1)$$

■