# Προτεινόμενες Λύσεις των θεμάτων Μαθηματικών Κατ/νσης 2014

Λυγάτσικας Ζήνων
**Π.Π. ΓΕΛ Βαρβακείου Σχολής** *

27 Ἰουνίου 2014

## Θέμα Α

**A1** Αρκεί να αποδείξουμε ότι $\forall\, x_1,\ x_2 \in \Delta$ ισχύει $f(x_1) = f(x_2)$.

1. Αν $x_1 = x_2$, τότε προφανώς $f(x_1) = f(x_2)$.
2. Αν $x_1 < x_2$, τότε στο διάστημα $[x_1, x_2]$ η $f$ ικανοποιεί τις υποθέσεις του θεωρήματος μέσης τιμής. Επομένως, υπάρχει $\xi \in (x_1, x_2)$ τέτοιο ώστε

$$f'(\xi) = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} \tag{1}$$

Επειδή το $\xi$ είναι εσωτερικό σημείο του $\Delta$, ισχύει $f'(\xi) = 0$, οπότε λόγω (1) είναι $f(x_1) = f(x_2)$. Αν $x_2 < x_1$, τότε ομοίως αποδεικνύεται ότι $f(x_1) = f(x_2)$. Σε όλες τις περιπτώσεις $f(x_1) = f(x_2)$.

□

**A2** Έστω μια συνάρτηση $f$ συνεχής σε ένα διάστημα $\Delta$ και παραγωγίσιμη στο εσωτερικό του $\Delta$. Θα λέμε ότι η συνάρτηση $f$ στρέφει τα κοίλα προς τα άνω ή είναι κοίλη στο $\Delta$, αν η $f'$ είναι γνησίως φθίνουσα στο εσωτερικό του $\Delta$.

**A3** Μία συνάρτηση $f$ με πεδίο ορισμού $A$ θα λέμε ότι παρουσιάζει ολικό μέγιστο το $f(x_0)$, όταν $f(x) \leq f(x_0)$ για κάθε $x$ στο $A$.

**A4**

Λ Σ Σ Σ Λ

■

## Θέμα Β

**B1** Έστω $z = x + iy$ η κανονική μορφή του μιγαδικού. Τότε,

$$\begin{aligned}
&2|z|^2 + (z + \overline{z})i - 4 - 2i = 0\\
&\Rightarrow 2\left(\sqrt{x^2+y^2}\right)^2 - 4 + 2i(x-1) = 0\\
&\Rightarrow \begin{cases} x^2+y^2 &= 2\\ x-1 &= 0\end{cases}\\
&\Rightarrow \begin{cases} x &= 1\\ y &= \pm 1\end{cases}
\end{aligned}$$

Άρα: $\boxed{z_1 = 1 - i \text{ και } z_2 = 1 + i}$.

□

**B2**

$$\begin{aligned}
w &= 3\left(\frac{z_1}{z_2}\right)^{39}\\
&= \left(\frac{(1+i)^2}{2}\right)^{39}\\
&= 3i^{39}
\end{aligned}$$

Επίσης, $w = 3i^{39} = 3i^{4\cdot 9+3} = -3i$

□

**B3** Επειδή $|4z_1 - z_2 - i| = |3 + 4i| = \sqrt{3^2+4^2} = 5$,

$$|u + w| = 5 \Rightarrow \boxed{|u - 3i| = 5}$$

Άρα, ο γεωμετρικός τόπος είναι κύκλος με $\boxed{\text{κέντρο } K(0,3) \text{ και ακτίνα } \rho = 5}$.

□

■

*c:\education\ C_lycee \module\ themata\ ... \solutions2014.tex

## Θέμα Γ

**Γ1** $h'(x) = \dfrac{1}{e^x+1}$ και $h''(x) = -\dfrac{e^x}{(e^x+1)^2}$. Άρα, $h''(x) < 0, \quad \forall x \in \mathbb{R}$. Συνεπώς, ή $h$ είναι $\boxed{\text{κοίλη}}$ στο $\mathbb{R}$.

□

**Γ2**

$$\begin{aligned}
e^{h(2h'(x))} < \frac{e}{e+1} &\Rightarrow \ln\left(h(2h'(x))\right) < 1 - \ln(e-1) \\
&\Rightarrow \ln\left(h(2h'(x))\right) < h(1) \\
&\overset{h\uparrow}{\Rightarrow} 2h'(x) < 1 \\
&\Rightarrow h'(x) < \frac{1}{2} \\
&\Rightarrow h'(x) < h'(0) \\
&\overset{h'\downarrow}{\Rightarrow} \boxed{x > 0}
\end{aligned}$$

□

**Γ3**

1. Εύρεση της οριζόντιας ασύμπτωτης:

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to+\infty} h(x) &= \lim_{x\to+\infty} \left(\ln(e^x) - \ln(e^x+1)\right) \\
\text{αλλά} & \\
\lim_{x\to+\infty} \ln\frac{e^x}{e^x+1} &\overset{\text{DLH}}{=} \lim_{x\to+\infty} \ln\frac{(e^x)'}{(e^x+1)'} \\
&= \lim_{x\to+\infty} \ln\frac{e^x}{e^x} \\
&= 1 \\
\text{άρα} & \\
\lim_{x\to+\infty} h(x) &= \lim_{x\to+\infty} \ln 1 \\
&= 0
\end{aligned}$$

Συνεπώς, η οριζόντια ασύμπτωτος είναι η $\boxed{y=0}$.

2. Εύρεση της πλάγιας ασύμπτωτης:

Έστω $y = \lambda x + \beta$ η ασύμπτωτος:

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to-\infty} \frac{h(x)}{x} &= \lim_{x\to-\infty} \frac{x - \ln(e^x+1)}{x} \\
&= \lim_{x\to-\infty} \left(1 - \frac{\ln(e^x+1)}{x}\right) \\
\text{αλλά} & \\
\lim_{x\to-\infty} (e^x+1) &= 0 \\
\text{και} & \\
\lim_{x\to-\infty} \frac{1}{x} &= 0 \\
\text{άρα} & \\
\lim_{x\to-\infty} \frac{x-\ln(e^x+1)}{x} &= 1 = \lambda
\end{aligned}$$

Επίσης, $h(x) - \lambda \cdot x = \ln(e^x+1)$ ή $\lim\limits_{x\to-\infty} = 0$.

Επομένως, η πλάγια ασύμπτωτος είναι $\boxed{y=x}$.

□

**Γ4** Θα βρώ το σημείο τομής του γραφήματος της $\phi$ με τον άξονα $x'x$ και θα δείξουμε ότι η $\phi(x)$ είναι θετική στο διάστημα των ορίων του ολοκληρώματος.

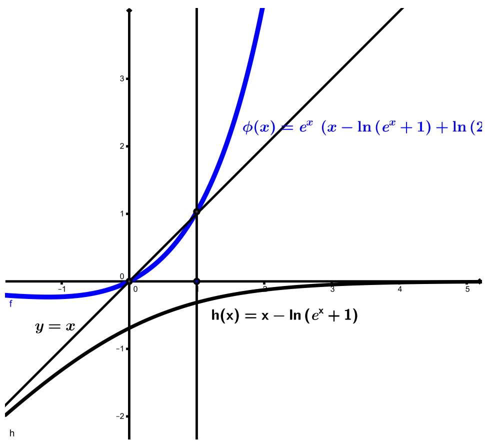
$$\begin{aligned}
\phi(x) = 0 &\Leftrightarrow e^x(h(x) + \ln 2) = 0 \\
&\Leftrightarrow h(x) = -\ln 2 \\
&\Leftrightarrow h(x) = h(0) \\
&\overset{h\uparrow}{\Leftrightarrow} x = 0
\end{aligned}$$

Επίσης:

$$\phi(x) > 0 \Leftrightarrow h(x) > -\ln 2 = h(0) \overset{h\uparrow}{\Leftrightarrow} x > 0$$

άρα:

$$\begin{aligned}
\int_0^1 \phi(x)dx &= \int_0^1 e^x\Big(x - \ln(e^x+1) + \ln 2\Big)dx \\
&= \int_0^1 e^x \ln\left(\frac{2e^x}{e^x+1}\right)dx \\
&= e^x \ln\left(\frac{2e^x}{e^x+1}\right)\Bigg|_0^1 - \\
&\quad - \int_0^1 e^x \frac{e^x+1}{2e^x} \cdot \frac{2e^x(e^x+1) - 2e^x \cdot e^x}{(e^x+1)^2}dx \\
&= e \cdot \ln\left(\frac{2e}{e+1}\right) - e \cdot \ln 1 - \int_0^1 \frac{e^x}{e^x+1}dx \\
&= e \cdot \ln\left(\frac{2e}{e+1}\right) - \ln(e^x+1)\big|_0^1 \\
&= (e+1)\ln\left(\frac{2e}{e+1}\right) + e
\end{aligned}$$




Σχήμα 1: Θέμα Γ

■

## Θέμα Δ

**Δ1** 1. Επειδή

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{x} \overset{DLH}{=} \lim_{x\to 0}\frac{e^x}{1} = 1 = f(0)$$

η συνάρτηση είναι συνεχής.

2. Για $x \neq 0$ είναι $f'(x) = \dfrac{xe^x - e^x + 1}{x^2} = \dfrac{h(x)}{x^2}$. Αν $h(x) = xe^x - e^x + 1$ τότε $h'(x) = xe^x$:

$$\begin{aligned} h'(x) < 0 &\Leftrightarrow x < 0 \\ h'(x) > 0 &\Leftrightarrow x > 0 \\ h'(x) = 0 &\Leftrightarrow x = 0 \end{aligned}$$

| $x$ | $-\infty$ | $0$ | $+\infty$ |
|---|---|---|---|
| $h'(x)$ | $-$ | $0$ | $+$ |
| $h(x)$ | $\searrow$ | $0$ | $\nearrow$ |

Επομένως $f'(x) > 0$ για κάθε $x$. Άρα, η $f$ είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$.

□

**Δ2 α)** Υπάρχουν πολλές λύσεις:

1. Μπορείτε να δείξετε ότι η μοναδικότητα της ρίζας $x = 0$ της εξίσωσης

$$\int_1^{2f'(x)} f(u)du = 0$$

συνάγεται από την μοναδικότητα της ρίζς της εξίσωσης $2f'(x) = 1$, η οποία όμως είναι προφανής αφού η $f'$ είναι $1-1$ ($f$ κυρτή+παραγωγίσιμη).

2. Διαφορετικά, παρατηρείστε ότι:

$$\begin{aligned} \lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0} &= \lim_{x\to 0}\frac{e^x - x - 1}{x^2} \\ &\overset{DLH}{=} \lim_{x\to 0}\frac{e^x - 1}{2x} \\ &\overset{DLH}{=} \lim_{x\to 0}\frac{e^x}{2} \\ &= \frac{1}{2} \end{aligned}$$

Τότε για:

$$\begin{aligned} x = 0 \quad \Leftrightarrow \quad & \int_1^{2f'(x)} f(u)du \\ = \ & \int_1^{1} f(u)du = 0 \end{aligned}$$

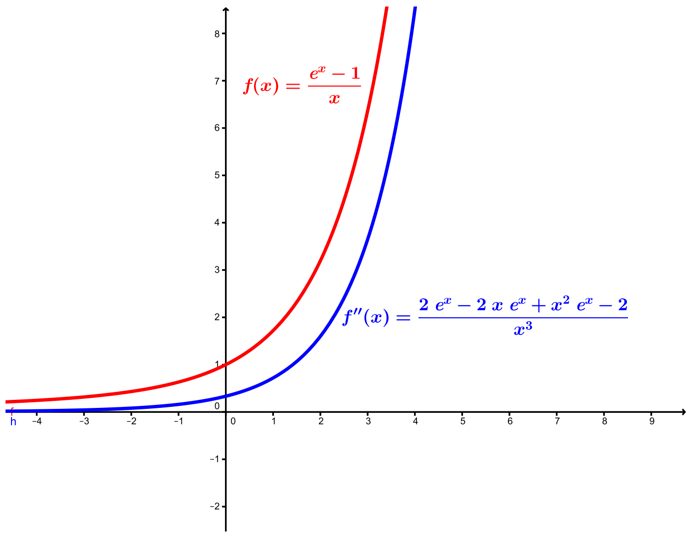
Επομένως το 0 είναι μια ρίζα της εξίσωσης. Θα αποδείξουμε ότι η ρίζα αυτή είναι μοναδική. Έστω $F(x) = \displaystyle\int_1^{2f'(x)} f(u)du$.

Τότε,

$$F'(x) = \left(\int_1^{2f'(x)} f(u)du\right)' = 2f''(x)f(2f'(x))$$

$$f''(x) = \begin{cases} \dfrac{e^x\cdot x^2 - 2e^x\cdot x + 2e^x - 2}{x^3} &, \quad x \neq 0 \\ \dfrac{1}{3} &, \quad x = 0 \end{cases}$$

με $f''(x) > 0$, $\forall x \in \mathbb{R}$.




Άρα, $F'(x) > 0$, $\forall x \in \mathbb{R}$, αφού

(α') $f''(x) > 0$, $x \in \mathbb{R}$ και

(β') $f \uparrow$ με συνέπεια ότι

$$2f'(x) > 0 \Rightarrow f(2f'(x)) > f(0) = 1 > 0$$

Συνεπώς, η συνάρτηση $F(x)$ είναι γνησίως μονοτονή με μοναδική ρίζα την $x = 0$.

**Δ2 β)** Από τα δεδομένα, $y'(t) = \dfrac{x'(t)}{2}$. Διαφορετικά:

$$\begin{aligned} y'(t) = \frac{x'(t)}{2} \quad &\Rightarrow \quad \big(f(x(t))\big)' = \frac{x'(t)}{2} \\ &\Rightarrow \quad f'(x(t))x'(t) = \frac{x'(t)}{2} \\ &\Rightarrow \quad f'(x(t)) = \frac{1}{2} = f'(0) \\ &\overset{f'\ 1-1}{\Rightarrow} \quad x(t) = 0 \end{aligned}$$

□

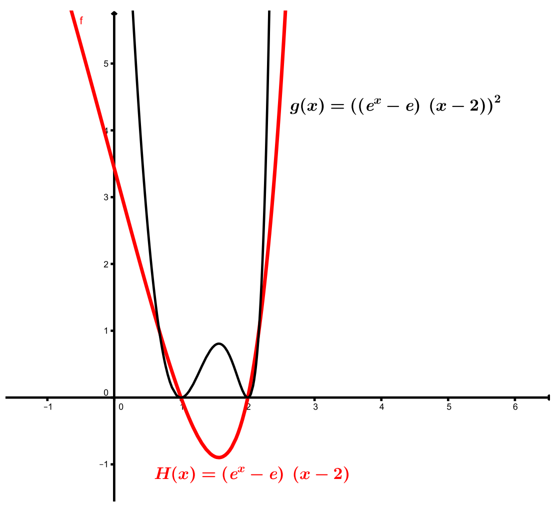
**Δ3** 1. Μια πρώτη λύση είναι η εξής:

$$g'(x) = 2(e^x - e)(x-2)\Big((x-1)e^x - e\Big)$$

Αν $h(x) = (x-1)e^x - e$ τότε $h'(x) = xe^x > 0$, $\forall x > 0$. Επίσης, $h(1) = -e < 0$ και $h(2) = e^2 - e > 0$, άρα από το θεώρημα Bolzano υπάρχει μια ρίζα $\xi$ στο $(1,2)$ της $h(x) = 0$.

| $x$ | $0$ | | $1$ | | $\xi$ | | $2$ | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $g'(x)$ | | $-$ | $0$ | $+$ | $0$ | $-$ | $0$ | $+$ |
| $g(x)$ | | $\searrow$ | $TE$ | $\nearrow$ | $TM$ | $\searrow$ | $TE$ | $\nearrow$ |

2. Μια δεύτερη απόδειξη άξια προσοχής είναι η εξής. Σκεφτείτε τις αλληλοεξαρτήσεις των διαγραμμάτων της $F(x) = x$ και της $G(x) = x^2$. Εκεί που η $F(x) = x$ τέμνει τον οριζόντιο άξονα, η $G(x)$ παρουσιάζει ελάχιστο. Πρόκειται για την μορφολογία μιας καμπύλης που προκύπτει grosso-modo από την αναδίπλωση της $F(x)$ γύρω από τον άξονα $x'x$. Το είδος των κρίσιμων σημείων της $G(x)$ δεν είναι το αντίστοιχο της $|F(x)|$, αλλά από τοπολογικής απόψεως τίποτα δεν αλλάζει. Έτσι, τα τοπικά ή τα ολικά ακρότατα παραμένουν τα ίδια. Το αυτό μπορείτε να φανταστείτε ότι συμβαίνει και εδώ.




Ας μελετήσουμε λοιπόν την

$$H(x) = \Big(xf(x) + 1 - e\Big)(x-2)$$

Η εξίσωση $H(x) = 0$ έχει δύο προφανείς ρίζες στα $x = 1$ και $x = 2$. Η πρώτη παράγωγος, $H'(x) = e^x(x-2) + e^x - e = 0$, έχει στο διάστημα $[1,2]$ από θ. Bolzano κάποια ρίζα $\xi$, αφού η συνάρτηση $H'(x)$ αλλάζει πρόσημο για $x = 1$ και $x = 2$. Στο σημείο αυτό η συνάρτηση $g(x)$ παρουσιάζει τοπικό ελάχιστο. Ο πίνακας μεταβολής την συνάρτησης $H(x)$ είναι:

| $x$ | $1$ | | $\xi$ | | $2$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $H'(x)$ | | $-$ | $0$ | $+$ | |
| $H(x)$ | $0$ | $\searrow$ | $TE$ | $\nearrow$ | $0$ |

Έτσι, η $g(x)$ έχει δύο τοπικά ελάχιστα, τις ρίζες 1 και 2 της $H(x) = 0$ και ένα τοπικό μέγιστο το αρνητικό τοπικό ελάχιστο της $H(x)$.

□

■