Λύσεις θεμάτων επαναληπτικών πανελληνίων εξετάσεων 2014
Στο μάθημα: « Μαθηματικά και Στοιχεία Στατιστικής» Γενικής Παιδείας
ΗΜΕΡΗΣΙΑ ΓΕ.Λ.
Γ΄Λυκείου,

Παρασκευή , 20 Ιουνίου 2014

ΘΕΜΑ Α

Α1. Θεωρία -απόδειξη σελίδα 151 σχολικό βιβλίο.

Α2. Θεωρία-ορισμός σελίδα 14 σχολικό βιβλίο.

Α3. Θεωρία-ορισμός σελίδα 65 σχολικό βιβλίο.

Α4. **α) Λάθος[1] , β) Λάθος[2], γ) Σωστό, δ) Σωστό, ε) Λάθος[3]**

ΘΕΜΑ Β

Β1.

Κλάσεις	Κεντρικές τιμές x_i	Συχνότητα v_i	Σχετική Συχνότητα $f_i\%$	Αθροιστική Συχνότητα N_i	Αθροιστική Σχετική Συχνότητα $F_i\%$
[10,12)	11	6	10	6	10
[12,14)	13	12	20	18	30
[14,16)	15	24	40	42	70
[16,18)	17	12	20	54	90
[18, 20)	19	6	10	60	100
ΣΥΝΟΛΟ		60	100		

Η 1η στήλη των κλάσεων: Επειδή οι 5 κλάσεις είναι ισοπλατείς θα έχουμε ότι η κάθε μία θα έχει εύρος $\frac{20-10}{5}=2$, και άρα θα είναι κάθε φορά με προσθεση στο αριστερό άκρο κατά 2.

Η 2η στήλη : συμπληρώνεται από την περιγραφή των δεδομένων (η 1η κλάση και η 5η κλάση περιγράφονται άμεσα, ενώ η 2η και η 4η κλάση συμπεραίνονται με αφαίρεση της

---

[1] Βρίσκεται στο $(\bar{x}-3s, \bar{x}-3s)$

[2] **...**είναι πάντοτε ίσο με το άθροισμα των συχνοτήτων δηλαδή το μέγεθοςτου δείγματος ν.

[3] Είναι μέτρο θέσης.

προηγούμενης και της επόμενης αντίστοιχα, από αυτά που περιγράφονται 18-6=12).Η κλάση [14,16) είναι το υπόλοιπο της αφαίρεσης 60-18-18=24)

Η 3η στήλη: $f_i\% = \frac{\nu_i}{\nu}\cdot 100,\ i = 1,2,3,4,5$

Η 4η και 5η στήλη: από τον ορισμό της Αθροιστικής Συχνότητας και της Αθροιστικής Σχετικής Συχνότητας.

Β2.

Η μέση βαθμολογία των μαθητών είναι: $\bar{x} = \frac{\sum x_i \cdot \nu_i}{\nu} = \frac{900}{60} = 15$ (ή $\bar{x} = \sum x_i f_i = 15$)

Για την διάμεσο[4]: Η διάμεσος δ έχει την ιδιότητα: να έχει το 50% των παρατηρήσεων με τιμές μεγαλύτερη ή ίσες από αυτήν και το άλλο 50% των παρατηρήσεων να έχει τιμές μικρότερες ή ίσες από αυτήν. Άρα, από την στήλη των $f_i\%$ (και επειδή οι τιμές των κλάσεων είναι ομοιόμορφα κατανεμημενές), προκύπτει ότι $\delta = 15$ δηλαδή το μέσο της 3ης κλάσης [14,16).

Β3. Αφού οι παρατηρήσεις κάθε κλάσης θεωρούνται ομοιόμορφα κατανεμημένες, θα έχουμε ότι στην τελευταία κλάση [18,20) που περιέχει το 10% θα είναι 5% στο [18,19) και 5% στο[19,20)[5]. Άρα θα δοθεί έπαινος σε αυτούς που είχαν βαθμολογία ≥ 19.

ΘΕΜΑ Γ

Γ1. Έχουμε**:**

$\Omega = \{-1, 0, 1, 2\}$

$P(\kappa) = \frac{\alpha}{\kappa^2 + 1}, \kappa \in \Omega,$ με $a > 0$

Άρα:

[4] Μπορεί να γίνει και με την κατασκευή του πολυγώνου σχετικών συχνοτήτων, σε συνδυασμό με την χρήση της ομοιότητας των τριγώνων.

[5] Κανονικά συμπεριλαμβάνεται και η βαθμολογία 20

$P(-1)=\frac{a}{2}$

$P(0)=a$

$P(1)=\frac{a}{2}$

$P(2)=\frac{a}{5}$

Πρέπει να ισχύει: $P(\Omega)=1 \Leftrightarrow P(-1)+P(0)+P(1)+P(2)=1 \Leftrightarrow \frac{22\alpha}{10}=1 \Leftrightarrow \alpha=\frac{5}{11}$

Και έτσι οι ζητούμενες πιθανότητες είναι:

$P(-1)=\frac{5}{22}$

$P(0)=\frac{5}{11}$

$P(1)=\frac{5}{22}$

$P(2)=\frac{1}{11}$

Γ2[6]**.**

Το ενδεχόμενο A είναι : $A=\{2\}$ διότι:

$\kappa^2-1>0 \Leftrightarrow \kappa>1 \text{ ή } \kappa<-1$

$\kappa \in \Omega \Rightarrow \kappa=2$

Άρα: $P(A)=P(2)=\frac{1}{11}$

Το ενδεχόμενο B είναι : $B=\{-1,1,2\}$ διότι

$\kappa^2-1=0 \Leftrightarrow \kappa=1 \text{ ή } \kappa=-1$

$\kappa^2-4=0 \Leftrightarrow \kappa=2 \text{ ή } \kappa=-2$

$\kappa \in \Omega \Rightarrow \kappa=-1 \text{ ή } \kappa=-1 \text{ ή } \kappa=2$

Άρα: $P(B)=P(-1)+P(1)+P(2)=\frac{5}{22}+\frac{5}{22}+\frac{1}{11}=\frac{12}{22}=\frac{6}{11}$

Για τα ενδεχόμενα Γ και Δ, όπως περιγράφονται στην εκφώνηση της άσκησης, έχουμε:

[6] Η εύρεση τωνπιθανοτήτων σε αυτό το ερώτημα μπορεί να γίνει και με την εύρεση των αντίστοιχων ενδεχομένων με αναγραφή.

$\Gamma = A - B$

$\Delta = A' \cup B' = (A \cap B)'$ με $A \cap B = \{2\}$

Άρα: $P(A \cap B) = P(2) = \frac{1}{11}$ και έτσι έχουμε: $P(\Gamma) = P(B - A) = P(B) - P(A \cap B) = \frac{6}{11} - \frac{1}{11} = \frac{5}{11}$

και $P(\Delta) = P((A \cap B)' = 1 - P(A \cap B) = 1 - \frac{1}{11} = \frac{10}{11}$

Γ3.

$$f(x) = \frac{1}{3}x^2 + \kappa x + \frac{9}{4},\ x \in \mathbb{R},\ \kappa \in \Omega$$

Η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ (ως πολυωνυμική) με παράγωγο:

$$f'(x) = x^2 + \kappa x + \frac{9}{4}, x \in \mathbb{R},\ \kappa \in \Omega$$

Για να πραγματοποιείται το ενδεχόμενο Ε θα πρέπει:

$$f'(x) > 0 \Leftrightarrow x^2 + \kappa x + \frac{9}{4} > 0,\ x \in \mathbb{R},\ \kappa \in \Omega \text{ και } \Delta = \kappa^2 - 9 < 0,\ \text{με } \kappa = -1, 0, 1, 2$$

και άρα $f'(x) > 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$ δηλαδή για $\kappa \in \Omega$ η $f(x)$ είναι
γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$
και έτσι το ενδεχόμενο Ε πραγματοποιείται πάντα, άρα είναι βέβαιο ενδεχόμενο

ΘΕΜΑ Δ

Δ1.

i) Το ζητούμενο εμβαδόν είναι : $E(x) = E_{A\Gamma\Delta Z} + E_{\Gamma B\Theta H} = x^2 + (100 - x)^2 = x^2 + 10000 - 200x + x^2$

Άρα $E(x) = 2x^2 - 200x + 10000,\ x \in (0, 100)$.

ii) Η συνάρτηση $E(x) = 2x^2 - 200x + 10000,\ x \in (0, 100)$ είναι παραγωγίσιμη (ως πολυωνυμική) με παράγωγο:

$$E'(x) = 4x - 200,\ x \in (0, 100)$$
$$E'(x) = 0 \Leftrightarrow 4x - 200 = 0 \Leftrightarrow x = 50$$

Έχουμε:

- $0 < x < 50 \Rightarrow E'(x) < 0 \Rightarrow E(x)$ *γνησίως* φθίνουσα *στο* $(0, 50]$
- $50 < x < 100 \Rightarrow E'(x) > 0 \Rightarrow E(x)$ *γνησίως αύξουσα στο* $[50, 100)$

Άρα η συνάρτηση $E(x)$ έχει ελάχιστο στο $x = 50$

Δ2.

$$\overline{x}=2 \Rightarrow \frac{\sum_{i=1}^{\nu} x_i}{\nu}=2 \Rightarrow \frac{50}{\nu}=2 \Rightarrow \nu=25 \ (\sum_{i=1}^{\nu} x_i = x = 50)$$

Δ3.

Τα εμβαδά των τετραγώνων που κατασκευάζονται με πλευρές τα διαδοχικά τμήματα l_i με αντίστοιχα μήκη x_i $(i=1,2,\ldots 25)$, είναι αντίστοιχα $E_i = x_i^2$, $i=1,2,\ldots 25$.

Η μέση τιμή $\overline{z}$ των E_i , $i=1,2,\ldots 25$ είναι : $\overline{z}=\frac{\sum_{i=1}^{\nu} x_i^2}{\nu}=\frac{\sum_{i=1}^{\nu} \mathrm{E}_i}{\nu}$.

Τώρα έχουμε: $s^2=\frac{\sum_{i=1}^{\nu} x_i^2}{\nu}-(\overline{x})^2 \Rightarrow s^2=\overline{z}-(\overline{x})^2 \Rightarrow (0,2)^2=\overline{z}-4 \Rightarrow \overline{z}=4,04\ m^2$

Δ4.

Έχουμε : $N(\Omega)=25$

Για το ενδεχόμενο Λ έχουμε: $\Lambda=\{l_i, i=3,4,6,8,9,12,15,16,18,20,21,24\}$ και έτσι $\mathrm{N}(\Lambda)=12$.

Άρα, αφού η επιλογή είναι τυχαία (δηλαδή τα l_i $i=1,2,\ldots 25$ είναι ισοπίθανα), θα έχουμε:

$$P(\Lambda)=\frac{\mathrm{N}(\Lambda)}{N(\Omega)}=\frac{12}{25}$$

Επιμέλεια λύσεων:
Καραγιάννης Ιωάννης

Σχολικός Σύμβουλος Μαθηματικών