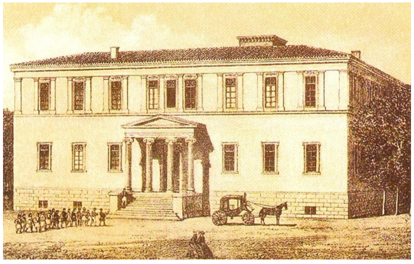


Π.Π. ΓΕΛ Βαρβακείου Σχολής

ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΑ ΠΡΟΣΟΜΟΙΩΣΗΣ

ΣΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ Γ ΚΑΤ/ΝΣΗΣ

20 Φεβρουαρίου 2014

Τμήματα Τεχνολογικής: Ζ4,Ζ5,Ζ6

Διάρκεια: 3 ώρες

1. (α') i. Πότε δύο συναρτήσεις λέγονται ίσες;
   ii. Τι ονομάζουμε σύνθεση $g \circ f$ δύο συναρτήσεων f και g με πεδία ορισμού A και B αντίστοιχα;
   iii. Πότε μια συνάρτηση $f: \ A \to \mathbb{R}$ λέγεται $1-1$;
   iv. Πότε μια συνάρτηση f με πεδίο ορισμού το A λέμε ότι παρουσιάζει ολικό ελάχιστο στο $x_0 \in A$ το $f(x_0)$;
   v. Να διατυπώσετε το κριτήριο παρεμβολής.
   vi. Πότε λέμε ότι μια συνάρτηση f είναι συνεχής σε ένα κλειστό διάστημα $[\alpha, \beta]$;
   vii. Πότε μία συνάρτηση $f(x)$ είναι παραγωγίσιμη σε ένα κλειστό διάστημα $[\alpha, \beta]$ του πεδίου ορισμου της.
   viii. Να διατυπώσετε το θεώρημα Rolle.

Μονάδες $8 \times 1,5 = 12$

(β') Να διατυπώσετε και να αποδείξετε το θεώρημα των ενδιαμέσων τιμών.

Μονάδες 13

2. Υποθέτουμε ότι η συνάρτηση $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ είναι συνεχής και ικανοποιεί τη σχέση:

$$\Big|\text{ημ}(x) - 2xf(x)\Big| \leq 2x^2, \qquad \forall x \in \mathbb{R}$$

(α') Να δείξετε ότι $f(0) = \dfrac{1}{2}$.

Μονάδες 7

(β') Αν $h(x) = xf(x)$, $x \in \mathbb{R}$, να δείξετε ότι η συνάρτηση h είναι παραγωγίσιμη στο 0 και να βρείτε την $h'(0)$.

Μονάδες 6

(γ') Ορίζουμε $g(x) = 2f(x) - f^2(x)$, $x \in \mathbb{R}$. Να δείξετε ότι η γραφική παράσταση της συνάρτησης g τέμνει την ευθεία $y = 2x$ σε ένα τουλάχιστον σημείο με τετμημένη $x_0 \in [0, 1]$.

Μονάδες 7

(δ') Υποθέτουμε ότι $\alpha < \beta$ και ότι $f(x) \neq 0$ για κάθε $x \in [\alpha, \beta]$. Να βρείτε το:

$$\lim_{x \to -\infty} \frac{f(\alpha)x^7 + f(2)x^3 - f(1)}{f(\beta)x^2 - f(4)x + f(10)}$$

Μονάδες 5

3. Δίνεται η παράσταση

$$f(z) = \frac{\left(\sqrt{2} - i\sqrt{3}\right) z}{|z+4i| - |z-4i|}$$

(α') Δείξτε ότι η παράσταση ορίζεται για τους μιγαδικούς z για τους οποίους $\Im m(z) \neq 0$.

Μονάδες 7

(β') Δείξτε ότι $\Big| |z+4i| - |z-4i| \Big| \leq 2|z|$.

Μονάδες 7

(γ') Δείξτε ότι $|f(z)| \geq \dfrac{\sqrt{5}}{2}$.

Μονάδες 4

(δ') Δείξτε ότι ο γεωμετρικός τόπος των εικόνων των μιγαδικών z που ικανοποιούν την $\dfrac{|f(z)|}{|z|} = \dfrac{\sqrt{5}}{2}$ είναι υπερβολή της οποίας να βρείτε τις εστίες και την εξίσωση.

Μονάδες 7

4. (α') Δίνεται συνάρτηση $f : [0,3] \to \mathbb{R}$ με συνεχή παράγωγο και με $f(0) = 0,\ f(3) = 6$.

   i. Να δείξετε ότι υπάρχουν $\xi_1, \xi_2 \in (0,3)$ με $\xi_1 < \xi_2$ τέτοιοι ώστε:

   $$2f'(\xi_1) + f'(\xi_2) = 6.$$

   Μονάδες 7

   ii. Αν $\xi_1, \xi_2 \in (0,3)$ είναι οι αριθμοί που εμφανίζονται στο προηγούμενο ερώτημα, να δείξετε ότι υπάρχει $\zeta \in [\xi_1, \xi_2]$ με $f'(\zeta) = 2$.

   Μονάδες 5

   (β') Δίνεται συνάρτηση $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ δυο φορές παραγωγίσιμη με $g''(x) > 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Να δείξετε ότι:

   $$g'(x+1) > g(x+1) - g(x) > g'(x), \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

   Μονάδες 6

   (γ') Δίνεται παραγωγίσιμη συνάρτηση $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ που ικανοποιεί τις σχέσεις $h(0) = 0$ και $h'(x) > h(x)$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Να δείξετε ότι $h(x) > 0$ για κάθε $x > 0$.

   Μονάδες 7

ΛΥΣΗ ΤΟΥ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΑΤΟΣ

1. (α΄) i. (σελ. 141) Δύο συναρτήσεις f και g λέμε ότι είναι ίσες όταν:

   Α΄. έχουν το ίδιο πεδίο ορισμού A

   Β΄. $\forall x \in A$, $f(x) = g(x)$

   ii. (σελ. 143) Αν f και g 2 συναρτήσεις με πεδίο ορισμού A και B αντίστοιχα. Ονομάζουμε σύνθεση της f με την g (συμβ. $g \circ f$) την συνάρτηση

   $$(g \circ f) = g\Big(f(x)\Big)$$

   το δε πεδίο ορισμού είναι το $\{x/x \in A$ με $f(x) \in B\}$.

   iii. (σελ. 151) Μια συνάρτηση $f : A \to \mathbb{R}$ λέγεται $1-1$ όταν για κάθε $x_1,\ x_2 \in A$ ισχύει:

   $$x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$$

   iv. (σελ. 150) Μία συνάρτηση $f : A \to \mathbb{R}$ θα λέμε ότι παρουσιάζει στο $x_0 \in A$ ολικό ελάχιστο αν $f(x) \geq f(x_0)$, $\forall x \in A$.

   v. (σελ. 169) Έστω $f,\ g,\ h$ συναρτήσεις. Αν $h(x) \leq f(x) \leq g(x)$ κοντά στο x_0 και $\lim\limits_{x\to x_0} h(x) = \lim\limits_{x\to x_0} g(x) = \lambda,\ \lambda \in \mathbb{R}$, τότε $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = \lambda$.

   vi. (σελ. 191) Μια συνάρτηση f λέμε ότι είναι συνεχής σε ένα κλειστό διάστημα $[a, b]$, όταν είναι συνεχής σε κάθε σημείο του (a, b), και

   $$\lim_{x\to a^+} = f(a), \text{ και } \lim_{x\to b^-} = f(b)$$

   vii. (σελ. 222) Μια συνάρτηση f λέμε ότι είναι παραγωγίσιμη σε ένα κλειστό διάστημα $[a, b]$, όταν είναι παραγωγίσιμη σε κάθε σημείο του (a, b), και

   $$\lim_{x\to a^-} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} \in \mathbb{R} \text{ και } \lim_{x\to b^+} \frac{f(x) - f(b)}{x - b} \in \mathbb{R}$$

   (β΄) Αν μια συνάρτηση f η οποία είναι ορισμένη σε ένα κλειστό διάστημα $[a, b]$ ικανοποιεί τις συνθήκες:

   i. f είναι συνεχής στο $[a, b]$

   ii. $f(a) \neq f(b)$

   τότε, για κάθε η μεταξύ των $f(a)$ και $f(b)$ υπάρχει ένας τουλάχιστον $x_0 \in (a, b)$ τέτοιος ώστε $f(x_0) = \eta$.

   <u>Απόδειξη</u>
   Έστω $f(a) < f(b)$ τότε $f(a) < \eta < f(b)$. Αν η συνάρτηση $g(x) = f(x) - \eta$ είναι

   i. g συνεχής στο $[a, b]$

   ii. $g(a) = f(a) - \eta > 0$

   iii. $g(b) = f(b) - \eta > 0$

   Άρα, από το θεώρημα του Bolzano, $\exists x_0$ έτσι ώστε $g(x_0) = f(x_0) - \eta = 0$ Άρα, $f(x_0) = \eta$

   ■

2. (α') Αδού f συνεχής συνάρτηση, $f(0) = \lim_{x\to 0} f(x)$. Άρα,

$$\frac{\left|\etaμ(x) - 2xf(x)\right|}{|x|} \leq 2|x| \Leftrightarrow -2|x| \leq \frac{\left|\etaμ(x) - 2xf(x)\right|}{|x|} \leq 2|x|$$

Αλλά, $\lim_{x\to 0} \frac{\etaμ(x)}{x} = 1$ και $1 - \lim_{x\to 0} 2f(x) = 0$, άρα, $\lim_{x\to 0} 2f(x) = f(0) = \frac{1}{2}$.

(β') $h'(x) = \lim_{x\to 0} \frac{xf(x)}{x} = \lim_{x\to 0} f(x) = \frac{1}{2}$.

(γ') Αρκεί να δείξουμε ότι η εξίσωση: $2f(x) - f^2(x) - 2x = 0$. Έστω, $d(x) = 2f(x) - f^2(x) - 2x$. Τότε, $d(0) = 2f(0) - f^2(0) - 2 = \frac{3}{4} > 0$ έχει τουλάχιστον μία ρίζα στο $[0, 1]$. Επίσης, $d(1) = 2f(1) - f^2(1) - 2$. Αλλά το τριώνυμο $-x^2 + 2x - 2$, δεν έχει πραγματικές ρίζες και είναι ομόσημο του μεγιστοβαθμίου συντελεστή, δηλαδή είναι πάντα < 0 για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Δείξαμε λοιπόν ότι η συνεχής συνάρτηση στο $[0, 1]$ αλλάζει πρόσημο και από το θεώρημα Bolzano έχει τουλάχιστον μία ρίζα.

(δ') Αφού f δεν έχει ρίζα στο $[\alpha, \beta]$, οι αριθμοί $f(\alpha)$ και $f(\beta)$ είναι ομόσημοι. Άρα,

$$\lim_{x\to -\infty} \frac{f(\alpha)x^7 + f(2)x^3 - f(1)}{f(\beta)x^2 - f(4)x + f(10)} = \lim_{x\to -\infty} \frac{f(\alpha)x^7}{f(\beta)x^2} = \lim_{x\to -\infty} x^5 = -\infty$$

■

3. (α') Πρέπει $|z + 4i| \neq |z - 4i|$ Θέτω $z = x + iy$ άρα:

$$|z + 4i| = |z - 4i| \Rightarrow 8y = -8y \Rightarrow y = 0$$

Άρα, οι εικόνες των z που ικανοποιούν την $|z + 4i| = |z - 4i|$ ανήκουν στον πραγματικό άξονα όπου $\Im m(z) = 0$. Δηλαδή, η αλγ. παράσταση ορίζεται για τους μιγαδικούς που $\Im m(z) \neq 0$.

(β') Από την ανισότητα $||z_1| - |z_2|| \leq |z_1 + z_2|$ για $z_1 = z + 4i$ και $z_2 = z - 4i$ έχω:

$$||z + 4i| - |z - 4i|| \leq |2z|$$

(γ')

$$||z + 4i| - |z - 4i|| \leq |2z| \Leftrightarrow \frac{1}{||z + 4i| - |z - 4i||} \geq \frac{1}{|2z|}$$

$$\begin{aligned} |f(z)| &= \frac{\left|\sqrt{2} - i\sqrt{3}\right| |z|}{||z + 4i| - |z - 4i||} \\ &= \frac{|z|\sqrt{5}}{||z + 4i| - |z - 4i||} \\ &\geq \frac{|z|\sqrt{5}}{2|z|} = \frac{\sqrt{5}}{2} \end{aligned}$$

(δʹ)

$$\begin{aligned} |f(z)| = \frac{\sqrt{5}}{2}|z| &\Leftrightarrow \left|\frac{\left(\sqrt{2}-i\sqrt{3}\right)z}{|z+4i|-|z-4i|}\right| = \frac{\sqrt{5}}{2}|z| \\ &\Leftrightarrow \frac{|z|\sqrt{5}}{||z+4i|-|z-4i||} = \frac{\sqrt{5}}{2}|z| \\ &\Leftrightarrow ||z+4i|-|z-4i|| = 2 \end{aligned}$$

Αν M η εικόνα του $|z|$, και $E' = (0,-4)$ και $E = (0,4)$ οι εικόνες των $-4i$ και $4i$ αντίστοιχα, τότε $|ME' - ME| = 2$ και το M ανήκει πάνω σε υπερβολή με εστίες τα E' και E και $\gamma = 4$, $\alpha = 1$ και $\beta^2 = \gamma^2 - \alpha^2 = 16 - 1 = 15$. Άρα, η εξίσωση της υπερβολής είναι

$$\frac{y^2}{1} - \frac{x^2}{15} = 1$$

■

4. (αʹ) Εφαρμόζουμε το Θεώρημα Μέσης Τιμής για την f στα διαστήματα $[0,2]$ και $[2,3]$. Παίρνουμε $\xi_1 \in (0,2)$ και $\xi_2 \in (2,3)$ με $f'(\xi_1) = \frac{f(2)-f(0)}{2}$ και $f'(\xi_2) = \frac{f(3)-f(2)}{1}$. Έπεται ότι

$$2f'(\xi_1) + f'(\xi_2) = f(3) - f(0) = 6.$$

(βʹ) Αν $f'(\xi_1) = f'(\xi_2)$, τότε $f'(\xi_1) = 2$, και παίρνουμε $\zeta = \xi_1$.
Αν $f'(\xi_1) < f'(\xi_2)$, τότε

$$f'(\xi_1) < \frac{2}{3}f'(\xi_1) + \frac{1}{3}f'(\xi_2) < f'(\xi_2),$$

δηλαδή $f'(\xi_1) < 2 < f'(\xi_2)$. Αφού η f' είναι συνεχής, από το Θεώρημα Ενδιάμεσων Τιμών παίρνουμε ότι υπάρχει $\zeta \in (\xi_1, \xi_2)$ με $f'(\zeta) = 2$.
Ανάλογα, αν $f'(\xi_1) > f'(\xi_2)$.

(γʹ) Αφού $g''(x) > 0$ η $g'(x) \uparrow$ και συνεχής. Επειδή $g(x+1) \neq g(x)$, $x > 0$, από ΘΜΤ υπάρχει $\eta \in (x, x+1)$ έτσι ώστε:

$$g'(\eta) = \frac{g(x+1) - g(x)}{(x+1) - x} = g(x+1) - g(x)$$

Αλλά $g'(x) \uparrow$, άρα: $x < \eta < x+1 \Rightarrow g'(x) < g'(\eta) < g'(x+1)$ ή
$g'(x) < g(x+1) - g(x) < g'(x+1)$

(δʹ) Έστω $h'(x) > h(x) \Rightarrow e^{-x}h'(x) > e^{-x}h(x) \Rightarrow (e^{-x}h(x))' = 0$. Άρα η $g(x) = e^{-x}h(x)$ είναι αύξουσα.
$\forall x > 0 \Leftrightarrow g(x) > g(0) \Rightarrow e^{-x}h(x) > e^{-0}h(0) \Rightarrow e^{-x}h(x) > 0 \Rightarrow h(x) > 0$, $x > 0$. ■

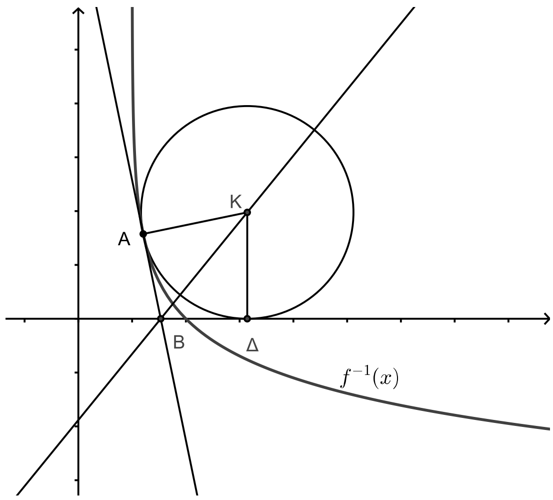
ΔΙΑΦΟΡΕΣ ΠΡΟΤΑΣΕΙΣ ΓΙΑ ΑΝΑΠΤΥΞΗ

1. (Εύρεση αντιστρόφου, Αναλυτική γεωμετρία, ρυθμός μεταβολής) Δίνεται συνάρτηση $f(x) = e^{-x}$

   (α') i. Να δείξετε ότι η συνάρτηση είναι $1-1$.

   ii. Να βρείτε την αντίστροφη συνάρτηση $f^{-1}(x)$.

   (β') Σημείο A κινείται στο γράφημα $\mathcal{G}_{f^{-1}}$ της $f^{-1}(x)$, όπως φαίνεται στο σχήμα.



   i. Να βρείτε το κοινό σημείο B της εφαπτομένης της $\mathcal{G}_{f^{-1}}$ στο σημείο A με τον οριζόντιο άξονα.

   ii. Σημείο A, με $x_A > 1$, κινείται πάνω στο γράφημα $\mathcal{G}_{f^{-1}}$. Σχηματίζουμε τον κύκλο $\mathcal{C}$ ο οποίος διέχεται από το σημείο A και είναι εφαπτόμενος στο $\mathcal{G}_{f^{-1}}$ και στον οριζόντιο άξονα. Να βρείτε την εξίσωσή του.

   iii. Να βρείτε τον ρυθμό μεταβολής της ακτίνας του κύκλου $\mathcal{C}$ στο σημείο A με τετμημένη e.

Υπόδειξη: Για να βρείτε το κέντρο του κύκλου και την ακτίνα του, πρέπει να δουλέψετε με γεωμετρικές κατασκευές. Το κέντρο του κύκλου ανήκει στην μεσοκάθετο του ευθ. τμήματος $A\Delta$ και της καθέτου $K\Delta$. Το Δ είναι το σημείο του οριζοντίου άξονα το οποίο απέχει από το B απόσταση BA.

---

2. (Βασικά συναρτήσεων) Έστω οι συναρτήσεις $f(x) = e^{x^2-1}$ και $g(x) = f(x)^{f(x)}$

   (α') Να βρείτε τα πεδία ορισμού των $f(x)$ και $g(x)$.

   (β') Να εξετάσετε αν οι δύο συναρτήσεις είναι άρτιες ή περιττές.

   (γ') Η συνάρτηση $f(x)$ αντιστρέφεται;

   (δ') Να υπολογίσετε την $g'(x)$ ως προς την μεταβλητή x.

   (ε') Να βρείτε τα κοινά σημεία των γραφημάτων των συναρτήσεων $f(x)$ και $g(x)$.

   (ϛ') Υπάρχει σημείο $A = (x_A, y_A)$ του γραφήματος της $f(x)$ έτσι ώστε ο ρυθμός μεταβολής στην τετμηνένη x_A του σημείου να είναι ίση με την τεταγμένη y_A του σημείου A;

3. (Όριο εκθετικής στο $\pm\infty$, εύρεση Συνόλου τιμών) Έστω η συνάρτηση $f(x) = \dfrac{6x^{24} + 4x^{20} + 5x^2}{3x^4 + 3x^2 + 1}$.

   (α΄) Δείξτε ότι $e^{f(x)} - \text{συν}(x) \geq 0$, $\forall x \in \mathbb{R}$.

   (β΄) Να βρεθεί το πεδίο ορισμού της $g(x) = \dfrac{1}{e^{f(x)} - \text{συν}(x)}$.

   (γ΄) Να βρείτε το σύνολο τιμών της συνάρτησης $g(x)$.

---

4. (Όριο στο $\pm\infty$, Ανισοτικές σχέσεις, Θεώρημα Μέσης Τιμής) Έστω η δύο φορές παραγωγίσιμη συνάρτηση $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ με $f'(2) = 2$ και $f''(2) = 3$. Θεωρώ την συνάρτηση $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ με $g(x) = f(3x^2 - x)$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

   (α΄) i. Να βρεθεί η $g''(1)$.

   ii. Αν -1 και 5 είναι δύο διαδοχικές ρίζες της $g''(x) = 0$, να βρείτε το όριο

$$\lim_{x \to -\infty} \frac{x^5 g''(4) + 2}{x^2 - 2014}$$

   (β΄) i. Αν $f'(x) > f(x)$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$ και $f(0) = 0$, δείξτε ότι $f(x) > 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}^+$.

   ii. Αν η f' είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}^+$, να δείξετε ότι:

$$f'(x+1) > f(x+1) - f(x) > f'(x), \quad \forall x \in \mathbb{R}^+$$

---

5. Έστω συνάρτηση $f : (0, +\infty) \to \mathbb{R}$, η οποία ικανοποιεί την: $e^{3f(x)} + e^{f(x)} = x^3$ για κάθε $x > 0$.

   (α΄) Να αποδειχθεί ότι $e^{f(x)} > 0$, $\forall x > 0$.

   (β΄) Δείξτε ότι για $x > 1$ τότε $0 < \dfrac{e^{f(x)}}{x^3} < \dfrac{e^{f(x)}}{x} < 1$.

   (γ΄) Να υπολογισθούν τα όρια $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{e^{f(x)}}{x^3}$ και $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{e^{f(x)}}{x}$.

---

6. Δίνεται η συνεχή συνάρτηση $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ που ικανοποιεί την σχέση

$$f\Big(f(x)\Big) - 2f(x) = -6 - f^2(x), \ \forall x \in \mathbb{R}$$

και $f(1) = 2$.

   (α΄) Να υπολογίσετε το όριο $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{f(1)x^7 + f(10)x^5 - 3x^2 + 1}{f(2)x^2 + f(-3)x + 2}$.

   (β΄) Αν $\lim\limits_{x \to 2} f(x) = 32$, δείξτε ότι το γράφημα της $f(x)$ διέρχεται από σημείο με τεταγμένη 6.

(γ΄) Έστω $g(x) = 3xf(x) - 60\text{συν}(x^2\pi)$. Δείξτε ότι το γράφημα της $g(x)$ τέμνει τον οριζόντιο άξονα τουλάχιστον μία φορά.

(δ΄) Αποδείξτε ότι υπάρχει $\xi \in [-6, 2]$ έτσι ώστε

$$f(\xi) = \frac{f(-3) + 2f(-2) + f(0) + 3f(1)}{7}$$

(ε΄) Έστω $h(x) = (x-1)f(x)$. Δείξτε ότι η $h(x)$ παραγωγίζεται στο 1 και ότι $h'(1) = 2$.

---

7. Έστω η παραγωγίσιμη πραγματική συνάρτηση $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ η οποία ικανοποιεί τις σχέσεις:

$$f\Big(f(x)\Big) = \frac{1}{3}x + \frac{1}{4}f(x), \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

και, $f'(x) \neq 0$ και συνεχής για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

(α΄) Δείξτε ότι η f είναι γνησίως μονότονη στο πεδίο ορισμού της.

(β΄) Δείξτε ότι η f έχει σταθερό σημείο, δηλαδή ότι υπάρχει $\xi \in \mathbb{R}$ έτσι ώστε $f(\xi) = \xi$.

(γ΄) Υπολογείστε το $f(0)$.

(δ΄) Αν $f'(x) > f(x)$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$, δείξτε ότι $f(x) > 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}^+$.

Παρατήρηση: Αν έχουμε διδάξει το ότι μια συνεχή και 1-1 συνάρτηση είναι μονότονη, τότε θα ήταν προτιμότερο να διατυπωθεί η άσκηση ως εξής:

Έστω η παραγωγίσιμη πραγματική συνάρτηση $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ η οποία ικανοποιεί τις σχέσεις:

$$f\Big(f(x)\Big) = \frac{1}{3}x + \frac{1}{4}f(x), \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

και, $f'(x) \neq 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

(α΄) Δείξτε ότι η f έχει σταθερό σημείο, δηλαδή ότι υπάρχει $\xi \in \mathbb{R}$ έτσι ώστε $f(\xi) = \xi$.

(β΄) Υπολογείστε το $f(0)$.

(γ΄) Αν $f'(x) > f(x)$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$, δείξτε ότι $f(x) > 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}^+$.

Τις συναρτήσεις αυτές, $f\Big(f(x)\Big) + \alpha x + \beta f(x)$ ή όπως η προηγούμενη, τις πρόσεξα για πρώτη φορά το 1983 όταν ήταν ένα από τα θέματα του Concours Général στην Γαλλία και ταυτόχρονα το 1ο θέμα της IMO του ιδίου έτους.
Είναι μια γενίκευση του εξής ενδιαφέροντος προβλήματος (σε άλλο επίπεδο φυσικά): Να βρεθούν οι ικανές και αναγκαίες συνθήκες για να είναι μια bijection f ενός πεπερασμένου συνόλου E στο E, τετράγωνο. Με άλλα λόγια, για να υπάρχει bijection g τέτοια ώστε $f = g \circ g$.
Το πρόβλημα απασχόλησε συστηματικά και για πρώτη φορά (από όσα γνωρίζω πάντα) τον Babbage το 1820, δες στο βιβλίο του Examples of the Solutions of Functional Equations 1820. Παρόμοια προβλήματα με αυτά του Babbage λύθηκαν και από τον Ruffus Isaacs, ο δε C. Berge στο Graphes et Hypergraphes Dunod, 1985, p. 37/8 τα χρησιμοποίησε στην θεωρία των γράφων, Αναφορά επίσης γίνεται στα:

American Mathematical Monthly Volume 88, Number 10, 1981 page 771
και στο
Revue de Mathematiques specials no 2 1982 page 120.

Επίσης, υπάρχει μια σειρά άλλων εξ ίσου ενδιαφερόντων συνορτήσεων σε άρθρα του M. Kuczma και ιδιαίτερα στο βιβλίο του Marec Kuczma, Bogdan Choczewski, Roman Ger : Iterative Functional Equations, Cambridge University Press, 1990.

Απόδειξη

(α') Επειδή $f'(x) \neq 0$ και συνεχής, η f' δεν θα αλλάζει πρόσημο, άρα η f θα είναι μονότονη.

(β') Ας υποθέσουμε ότι $f(x) \neq x$, $\forall x \in \mathbb{R}$. Τότε, είτε $f(x) > x$ ή $f(x) < x$, $\forall x \in \mathbb{R}$.

- Ας υποθέσουμε ότι $f(x) > x$, $\forall x \in \mathbb{R}$. Επειδή $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) > \lim\limits_{x\to+\infty} x \Rightarrow \lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$, η μονότονη συνάρτηση $f(x)$ είναι αύξουσα.
  Άρα, $f(f(x)) > f(x) \Leftrightarrow \frac{1}{3}x + \frac{1}{4}f(x) > f(x) \Leftrightarrow f(x) < \frac{4}{9}x$. Για $x = 1$ έχω: $f(1) < \frac{4}{9} < 1$ άτοπο από την υπόθεση $f(x) > x$, $\forall x \in \mathbb{R}$.
- Ας υποθέσουμε ότι $f(x) < x$, $\forall x \in \mathbb{R}$. Επειδή $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) < \lim\limits_{x\to+\infty} x \Rightarrow \lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$, η μονότονη συνάρτηση $f(x)$ είναι αύξουσα.
  Άρα, $f(f(x)) < f(x) \Leftrightarrow \frac{1}{3}x + \frac{1}{4}f(x) > f(x) \Leftrightarrow f(x) > \frac{4}{9}x$. Για $x = -1$ έχω: $f(-1) > -\frac{4}{9} > -1$ άτοπο από την υπόθεση $f(x) < x$, $\forall x \in \mathbb{R}$.

Άρα, υποχρεωτικά λοιπόν υπάρχει a τέτοιο ώστε $f(a) = a$.

(γ') Από την αρχική σχέση $f(f(a)) = \frac{1}{3}a + \frac{1}{4}f(a) \Rightarrow a = \frac{1}{3}a + \frac{1}{4}a \Rightarrow a = 0$. Συμπέρασμα: $f(0) = 0$.

(δ') Έστω $f'(x) > f(x) \Rightarrow e^{-x}f'(x) > e^{-x}f(x) \Rightarrow (e^{-x}f(x))' = 0$. Άρα η $g(x) = e^{-x}f(x)$ είναι αύξουσα.
$\forall x > 0 \Leftrightarrow g(x) > g(0) \Rightarrow e^{-x}f(x) > e^{-0}f(0) \Rightarrow e^{-x}f(x) > 0 \Rightarrow f(x) > 0$, $x > 0$. ■