Μια πρόταση διδακτικής αξιοποίησης διερευνητικών ερωτημάτων και ανάπτυξης μαθηματικού προβλήματος στο πλαίσιο της επαγωγικής συλλογιστικής

Δημήτρης Ντρίζος[1], **Γιώργος Ρίζος**[2]
drizosdim@yahoo.gr, rizosgeo@sch.gr

ΠΕΡΙΛΗΨΗ

Η εργασία αυτή διαπραγματεύεται μια σειρά από ερευνητικές δραστηριότητες οι οποίες μπορούν να αναπτυχθούν στο πλαίσιο της διδασκαλίας των μαθηματικών σε τμήματα της Β΄ τάξης Γενικού Λυκείου, με τη συμβολή και ενός δυναμικού μαθηματικού λογισμικού. Οι εν λόγω δραστηριότητες εστιάζονται στη διδακτική αξιοποίηση *διερευνητικών ερωτημάτων* και την επίλυση *μαθηματικών προβλημάτων* με διαδικασίες επαγωγικής συλλογιστικής: αντιμετωπίζονται δηλαδή πρώτα διάφορες ειδικές περιπτώσεις και έπειτα αναζητούνται επεκτάσεις και γενικεύσεις του προβλήματος. Έχουμε τη γνώμη ότι η ανάπτυξη τέτοιου τύπου δραστηριοτήτων καλλιεργεί και βελτιώνει βαθμιαία τη γόνιμη μαθηματική παρατηρητικότητα και τη δημιουργική σκέψη των μαθητών.

ABSTRACT

This paper deals with a series of research activities that can be developed within mathematics teaching in the second grade of Lyceum classrooms, using the contribution of a dynamic mathematical software. These activities focus on utilizing fact finding questions and solving mathematical problems, using inductive reasoning procedures, treating initially several special cases and then searching for extensions and generalizations of the problem. We believe that the development of such type of activity improves and gradually cultivates the fruitful mathematical observation and the creative thinking of students.

[1] Σχολικός Σύμβουλος Μαθηματικών στους νομούς Καρδίτσας και Τρικάλων
[2] Καθηγητής Μαθηματικών στο 7^{ο} Γυμνάσιο Κέρκυρας

ΕΙΣΑΓΩΓΗ – ΘΕΩΡΗΤΙΚΟ ΠΛΑΙΣΙΟ

Ξεκινώντας από την κοινά αποδεκτή θέση ότι κάθε διδασκαλία πρέπει να στοχεύει στην ουσιαστική κατάκτηση των γνώσεων από τους μαθητές μας, κρίνουμε σκόπιμο στο σημείο αυτό να αναφερθούμε σε ορισμένες προϋποθέσεις που πιστεύουμε ότι ευνοούν μια διδασκαλία των μαθηματικών με έμφαση στην ανάπτυξη ερευνητικών δραστηριοτήτων. Και ως πρώτη προϋπόθεση θεωρούμε *την ενσυνείδητη και δημιουργική εμπλοκή του μαθητή στις διαδικασίες της μάθησης*: Είναι απαραίτητο, καταρχήν, να πεισθεί ο μαθητής ότι η εν λόγω γνώση τον ενδιαφέρει και η προσωπική του συμμετοχή σ’ αυτή τη διαδικασία μετράει και έχει νόημα. Ότι έτσι συμβάλλει κι αυτός στην "κατασκευή" και διαμόρφωση της νέας γνώσης και δεν είναι απλά ένας παθητικός δέκτης ασύνδετων, κατά κανόνα, πληροφοριών. Με αυτές τις προϋποθέσεις δημιουργείται μια τάξη στην οποία οι μαθητές συμμετέχουν δημιουργικά στην πορεία αναζήτησης και επινόησης της γνώσης, και ο ρόλος του διδάσκοντα είναι, κυρίως, αυτός του εμπνευστή, του καθοδηγητή και του καλού συντονιστή, που υποβάλλει στην κατάλληλη στιγμή εύστοχες ερωτήσεις που προωθούν διαδικασίες έρευνας και γόνιμου προβληματισμού. Μια τέτοια τάξη όπου ο διδάσκων θέτει προβλήματα προς λύση και συγχρόνως λειτουργεί διευκολυντικά στην διαπραγμάτευσή τους, δημιουργεί μια *διερευνητική τάξη μαθηματικών* (όπως αυτή περιγράφεται από τους Cobb, Wood, Yackel και McNeal, 1992).

Σε τέτοιες τάξεις μαθηματικών, οι μαθητές στην πορεία διαπραγμάτευσης διερευνητικού ερωτήματος ή μη τετριμμένου προβλήματος οδηγούνται σταδιακά –υπό την καθοδήγηση του διδάσκοντα και τη συμβολή ενός δυναμικού μαθηματικού λογισμικού– από τη μελέτη ειδικών περιπτώσεων στη διατύπωση επεκτάσεων και γενικεύσεων: μια ικανότητα η οποία σχετίζεται με τη *μαθηματική ανακάλυψη*, την επινόηση δηλαδή των κρίσιμων και κομβικών ιδεών που μάς δείχνουν το δρόμο για τη λύση. Σ΄ αυτή τη δημιουργική πορεία, καθώς ο μαθητής αναζητεί επίμονα τη λύση κάποιου προβλήματος, σημαντικό ρόλο παίζει και η *διαίσθηση* που βασίζεται κυρίως στην εποπτεία (κατά τον Richard Courant, η έλλειψη της εξάρτησης των αποδείξεων από τη διαίσθηση οδηγεί σε "μαθηματική ατροφία").

Με την παρούσα διδακτική πρόταση επιχειρούμε να διευρύνουμε και να εμπλουτίσουμε τις παιδευτικές προθέσεις μιας διερευνητικής τάξης μαθηματικών, και, παράλληλα, να αναπτύξουμε περαιτέρω τις απόψεις του G. Polya για ένα περιβάλλον καθοδηγούμενης-διερευνητικής διδασκαλίας, όπου οι μαθητές για την επίλυση ενός προβλήματος:

(α) πειραματίζονται και παρατηρούν με τη συμβολή δυναμικού μαθηματικού λογισμικού στο πλαίσιο της επαγωγικής συλλογιστικής: αντιμετωπίζουν δηλαδή πρώτα επιμέρους περιπτώσεις του προβλήματος (ειδικεύσεις),

(β) εντοπίζουν μια ιδιότητα ή μια κατάσταση που εμφανίζεται σε όλες τις ειδικεύσεις που εξέτασαν,

(γ) διατυπώνουν εικασίες,

(δ) επινοούν σχέδιο για τη μαθηματική απόδειξη των εικασιών, το οποίο στη συνέχεια τροποποιούν όσες φορές απαιτηθεί, έως ότου οδηγηθούν στο επιθυμητό αποτέλεσμα,
(ε) ελέγχουν αν τα αποδεικτικά βήματα που ακολούθησαν, καθώς και το συμπέρασμα στο οποίο κατέληξαν, είναι απολύτως συνεπή προς όλες τις άμεσες ή έμμεσες υποθέσεις του προβλήματος και
(στ) προσπαθούν να δούν το υπό μελέτη πρόβλημα ως ειδίκευση ενός γενικού προβλήματος, και ακολούθως να μελετήσουν αυτό το γενικό πρόβλημα.

ΔΙΔΑΚΤΙΚΗ ΠΡΟΤΑΣΗ – ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ

Στην ενότητα αυτή ασχολούμαστε με ορισμένα αξιοπρόσεκτα *παραδείγματα* που διευκρινίζουν τον εφαρμοσμένο χαρακτήρα της διαχείρισης διερευνητικών ερωτημάτων και της επίλυσης προβλήματος υπό το πρίσμα της επαγωγικής συλλογιστικής. Βέβαια, είναι σκόπιμο να σημειώσουμε ότι οι απαιτήσεις της οργάνωσης, της καθοδήγησης και του συντονισμού μιας διερευνητικής τάξης μαθηματικών προϋποθέτουν και ανάλογη εμπειρία των διδασκόντων σε διαδικασίες επίλυσης μη τετριμμένων μαθηματικών προβλημάτων, και, γενικότερα, σε διδασκαλίες προσανατολισμένες στην ανάπτυξη ερευνητικών δραστηριοτήτων. Έχουμε τη γνώμη ότι ο δημιουργικός διάλογος που θα αναπτυχθεί στην τάξη με έναυσμα την αναζήτηση απαντήσεων σε ερωτήματα ανάλογων δραστηριοτήτων, θα συμβάλλει, ώστε να αναδειχθούν και να εμπεδωθούν μεθοδολογικές ιδέες και πρακτικές που βελτιώνουν βαθμιαία τη μαθηματική ικανότητα –που είναι, τελικά, και το ποιοτικό ζητούμενο της μαθηματικής εκπαίδευσης.

ΔΡΑΣΤΗΡΙΟΤΗΤΕΣ

1ο ΠΡΟΒΛΗΜΑ Ο "εξισωτής" τριγώνου

Ένα ενδιαφέρον γεωμετρικό πρόβλημα που δίνει αρκετές δυνατότητες στον διδάσκοντα για προεκτάσεις και γενικεύσεις είναι το πρόβλημα του «εξισωτή» (equalizer) τριγώνου, όπως το ονομάζει ο George Berzsenyi στο [2]. Πρόκειται για μια ευθεία η οποία χωρίζει ένα τρίγωνο σε δύο ισεμβαδικά και ισοπεριμετρικά σχήματα.

Για να εργαστεί ερευνητικά η τάξη, ξεκινάμε παρουσιάζοντας ένα πρόβλημα, βασισμένο σε ένα αληθοφανές και απλό σενάριο από τον «πραγματικό» κόσμο.

> *Έχουμε ένα αγρόκτημα με σχήμα τριγωνικό που πρέπει να χωριστεί με μια ευθεία σε δύο ίσα μέρη. Για να μην υπάρχουν παράπονα, θέλουμε τα μέρη, εκτός από ίσα εμβαδά, να έχουν και ίσο κόστος περίφραξης, δηλαδή να είναι και ισοπεριμετρικά.*

Τίθεται εδώ το διπλό ερώτημα: Είναι δυνατός ένας τέτοιος χωρισμός; Κι αν ναι, πόσες διαφορετικές λύσεις υπάρχουν;

Εφόσον υποθέσαμε ότι το πρόβλημα είναι «πραγματικό», γνωρίζουμε τις διαστάσεις του αγροκτήματος. Ξεκινάμε, λοιπόν, με ένα συγκεκριμένο παράδειγμα. Έστω ότι το αγρόκτημα είναι ορθογώνιο τρίγωνο με κάθετες πλευρές 30 m και 40 m. Ζητάμε από τους μαθητές να σχεδιάσουν σε κάτοψη με κλίμακα 1:1000 μια ευθεία που να το χωρίζει σε δύο ισεμβαδικά και ισοπεριμετρικά σχήματα. Την ευθεία αυτή θα τη λέμε «εξισωτή». Έτσι οδηγούμαστε στη μελέτη της περίπτωσης τριγώνου ΑΒΓ με $\alpha = 5$, $\beta = 3$, $\gamma = 4$

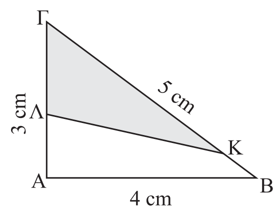
Ανάλογα, τώρα, με το επίπεδο της τάξης, κατευθύνουμε τη συζήτηση σε επιμέρους ερωτήματα, όπως π.χ.: *Από πού μπορεί να διέρχεται ο εξισωτής;* Προφανώς, πρέπει να εξετάσουμε δύο περιπτώσεις:

1η περίπτωση

Αν ο εξισωτής διέρχεται από μία κορυφή του, τότε είναι ο φορέας της αντίστοιχης διαμέσου του, αφού πρέπει να το χωρίζει σε δύο ισεμβαδικά τρίγωνα. Απαιτώντας αυτά να είναι και ισοπεριμετρικά, καταλήγουμε ότι το ΑΒΓ πρέπει να είναι και ισοσκελές (που δεν ισχύει). Οπότε για το παραπάνω τρίγωνο ΑΒΓ δεν υπάρχει εξισωτής που να διέρχεται από κορυφή του.

2η περίπτωση

Έστω ότι ο εξισωτής διέρχεται από εσωτερικά σημεία Κ, Λ των πλευρών ΑΒ, ΑΓ ή ΒΓ, ΑΓ ή ΒΓ, ΑΒ αντίστοιχα.



Διερευνώντας τις δυνατές περιπτώσεις, εύκολα καταλήγουμε ότι έχουμε έναν μόνο εξισωτή, τον ΚΛ, για τον οποίο είναι $\Gamma K = \dfrac{6+\sqrt{6}}{2}$, $\Gamma\Lambda = \dfrac{6-\sqrt{6}}{2}$

Άρα, τ**ο παραπάνω αγρόκτημα χωρίζεται σε ισεμβαδικά και ισοπεριμετρικά σχήματα με έναν και μοναδικό τρόπο.**

Κατόπιν, μεταβαίνουμε από το ειδικό (το συγκεκριμένο πρόβλημα χωρισμού του αγροκτήματος) στο γενικό:

> *Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ. Να προσδιοριστούν, αν υπάρχουν, ευθείες που χωρίζουν την επιφάνεια του τριγώνου σε δύο σχήματα ισεμβαδικά και ισοπεριμετρικά.*

Λύση:

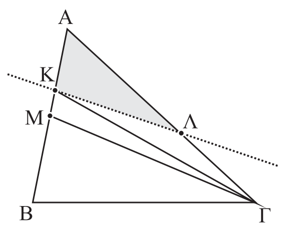
Περίπτωση 1η

Έστω ότι υπάρχει εξισωτής του ΑΒΓ που διέρχεται από μία κορυφή του, έστω την Α. Τέμνει την απέναντι πλευρά στο Δ, χωρίζοντάς το σε δύο ισεμβαδικά τρίγωνα ΑΒΔ και ΑΓΔ. Οπότε το Δ είναι μέσο της ΒΓ (βλέπε σχολική εφαρμογή).

Πρέπει και $AB + B\Delta + A\Delta = A\Gamma + \Gamma\Delta + A\Delta \Leftrightarrow AB = A\Gamma$, οπότε η κατασκευή του εξισωτή είναι δυνατή μόνο όταν το ΑΒΓ είναι ισοσκελές. Τότε ο εξισωτής είναι ο άξονας συμμετρίας του τριγώνου.

Περίπτωση 2η

Έστω ότι ο εξισωτής τέμνει δύο πλευρές του σε εσωτερικά τους σημεία, π.χ. τις ΑΒ, ΑΓ στα Κ, Λ αντίστοιχα. Έστω ΑΒ = γ, ΑΓ = β, ΒΓ = α. Θα υπάρχουν κ, λ, με 0 < κ < γ και 0 < λ < β, ώστε ΑΚ = κ, ΑΛ = λ.



Αν υποθέσουμε ότι το Κ είναι μεταξύ των Α, Μ (Μ μέσο της ΑΒ) ή το Κ ταυτίζεται με το Μ, τότε για οποιαδήποτε θέση του Λ στην ΑΓ θα έχουμε $\left(\mathrm{AK\Lambda}\right)<\left(\mathrm{AK\Gamma}\right)\le\left(\mathrm{AM\Gamma}\right)=\frac{1}{2}\left(\mathrm{AB\Gamma}\right)$ που είναι άτοπο. Ομοίως για το Λ. Οπότε $\frac{\gamma}{2}<\kappa<\gamma,\ \frac{\beta}{2}<\lambda<\beta$

Ακόμα είναι ΑΚ + ΚΛ + ΑΛ = ΚΒ + ΒΓ + ΓΛ + ΚΛ $\Leftrightarrow$

$$\kappa+\lambda=(\gamma-\kappa)+(\beta-\lambda)+\alpha\Leftrightarrow\boldsymbol{\kappa+\lambda=\frac{\alpha+\beta+\gamma}{2}}$$

Είναι $\left(\mathrm{AK\Lambda}\right)=\left(\mathrm{KB\Gamma\Lambda}\right)\Leftrightarrow\frac{\left(\mathrm{AK\Lambda}\right)}{\left(\mathrm{AB\Gamma}\right)}=\frac{1}{2}$

Τα ΑΒΓ, ΑΚΛ έχουν τη γωνία $\widehat{\mathrm{A}}$ κοινή, οπότε

$$\frac{\left(\mathrm{AK\Lambda}\right)}{\left(\mathrm{AB\Gamma}\right)}=\frac{1}{2}\Leftrightarrow\frac{\kappa\cdot\lambda}{\beta\cdot\gamma}=\frac{1}{2}\Leftrightarrow\boldsymbol{\kappa\cdot\lambda=\frac{\beta\cdot\gamma}{2}}$$

Τα κ, λ είναι ρίζες της εξίσωσης $\mathbf{2x^2-(\boldsymbol{\alpha+\beta+\gamma})\cdot x+\boldsymbol{\beta\cdot\gamma}=0}$, (Ε)

με $|\beta-\gamma|<\alpha<\beta+\gamma$ και α, β, γ > 0

Θέλουμε η εξίσωση (Ε) να έχει μία πραγματική ρίζα στο διάστημα $\left(\frac{\beta}{2},\beta\right)$ και μία στο $\left(\frac{\gamma}{2},\gamma\right)$. Η (Ε) έχει διακρίνουσα $\Delta=(\alpha+\beta+\gamma)^2-8\beta\cdot\gamma$

Πρέπει $\Delta\ge0\Leftrightarrow(\alpha+\beta+\gamma)^2\ge8\beta\cdot\gamma$ Τότε $x_{1,2}=\frac{\alpha+\beta+\gamma\pm\sqrt{\Delta}}{4}$

Εδώ, μπορούμε να ζητήσουμε από την τάξη να μελετήσει ξεχωριστά τις περιπτώσεις το τρίγωνο να είναι *ισόπλευρο*, *ισοσκελές* ή *σκαληνό*.

- Μπορούμε εύκολα να δείξουμε ότι αν το τρίγωνο είναι ισόπλευρο, δεν μπορεί να έχει εξισωτή που να τέμνει τις δύο πλευρές του σε εσωτερικά τους σημεία.

Πράγματι, με α = β = γ, η εξίσωση (Ε) γράφεται $2x^2-3\alpha\cdot x+\alpha^2=0,\alpha>0$, που έχει λύσεις $x = \alpha$ ή $x = \frac{\alpha}{2}$, που απορρίπτονται, εφόσον $x \in \left(\frac{\alpha}{2}, \alpha\right)$.

(Οι λύσεις "οδηγούν" στους άξονες συμμετρίας του ισοπλεύρου τριγώνου).

- Αν είναι ισοσκελές με β = γ, η εξίσωση (Ε) γράφεται

$$2x^2 - (\alpha + 2\beta)\cdot x + \beta^2 = 0,\ \ \alpha, \beta > 0,$$

που έχει διακρίνουσα $\Delta = (\alpha + 2\beta)^2 - 8\beta^2$

Για να έχει λύση πρέπει $\Delta \geq 0 \Leftrightarrow (\alpha + 2\beta)^2 - 8\beta^2 \geq 0 \Leftrightarrow \alpha \geq 2\left(\sqrt{2}-1\right)\beta$

και λόγω της τριγωνικής ανισότητας θα πρέπει α < 2β

Άρα $\mathbf{2\left(\sqrt{2}-1\right)\beta \leq \alpha < 2\beta}$

- Αν είναι ισοσκελές με α = β, η εξίσωση (Ε) γράφεται

$$2x^2 - (2\alpha + \gamma)\cdot x + \alpha\cdot\gamma = 0,\ \ \alpha, \gamma > 0,$$

που έχει διακρίνουσα $\Delta = (2\alpha + \gamma)^2 - 8\alpha\gamma = (2\alpha - \gamma)^2 \geq 0$

Τότε, $x_1 = \alpha$, $x_2 = \frac{\gamma}{2}$, που απορρίπτονται. Ομοίως, αν α = γ

- Αν είναι σκαληνό, ας υποθέσουμε ότι γ < β

Έστω ότι $\frac{\beta}{2} < x_1 < \beta \Leftrightarrow \frac{\beta}{2} < \frac{\alpha + \beta + \gamma + \sqrt{\Delta}}{4} < \beta \Leftrightarrow \beta < \alpha + \gamma + \sqrt{\Delta} < 3\beta$ (1)

και $\frac{\gamma}{2} < x_2 < \gamma \Leftrightarrow \frac{\gamma}{2} < \frac{\alpha + \beta + \gamma - \sqrt{\Delta}}{4} < \gamma \Leftrightarrow \gamma < \alpha + \beta - \sqrt{\Delta} < 3\gamma$ (2)

Από τις (1), (2) αντίστοιχα παίρνουμε $\boldsymbol{\alpha < \beta}$ και $\boldsymbol{\sqrt{\Delta} < 3\beta - \alpha - \gamma}$

Ακόμα, οι περιπτώσεις $\frac{\beta}{2} < x_2 < \beta$ και $\frac{\gamma}{2} < x_1 < \gamma$ μάς οδηγούν στις συνθήκες $\boldsymbol{\alpha < \beta}$ και $\boldsymbol{\sqrt{\Delta} < 3\gamma - \alpha - \beta}$

Η μελέτη του προβλήματος με τη βοήθεια προγράμματος Δυναμικής Γεωμετρίας μπορεί να μας οδηγήσει στην σημαντική παρατήρηση:

Οι εξισωτές τριγώνου, αν υπάρχουν, διέρχονται από το έγκεντρό του.[3]

Περίπτωση 1η Ο εξισωτής διέρχεται από κορυφή του τριγώνου.

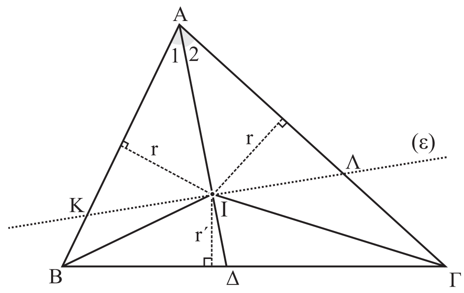
Όπως έχουμε αποδείξει, οι εξισωτές είναι άξονες συμμετρίας του τριγώ-

[3] Η ιδέα και η απόδειξη βρίσκονται στο [3].

νου, δηλαδή στο ισοσκελές τρίγωνο είναι η διχοτόμος της γωνίας της κορυφής του και στο ισόπλευρο οι τρεις διχοτόμοι του. Στο σκαληνό δεν υπάρχουν εξισωτές που να διέρχονται από κορυφή του.

Περίπτωση 2η

Ο εξισωτής τέμνει τις πλευρές.



Έστω (ε) ο "εξισωτής" τριγώνου ΑΒΓ, που τέμνει τις ΑΒ, ΑΓ στα Κ και Λ αντίστοιχα και τη διχοτόμο ΑΔ στο Ι. Έστω r οι αποστάσεις του Ι από τις ΑΒ, ΑΓ αντίστοιχα και r′ η απόσταση του Ι από τη ΒΓ. Τότε

$$(\mathrm{AK\Lambda}) = (\mathrm{KB\Gamma\Lambda}) \Leftrightarrow (\mathrm{AKI}) + (\mathrm{A\Lambda I}) = (\mathrm{KIB}) + (\mathrm{BI\Gamma}) + (\mathrm{\Lambda I\Gamma}) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{\mathrm{AK}\cdot r}{2} + \frac{\mathrm{A\Lambda}\cdot r}{2} = \frac{\mathrm{BK}\cdot r}{2} + \frac{\mathrm{B\Gamma}\cdot r}{2} + \frac{\mathrm{\Gamma\Lambda}\cdot r'}{2} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{r}{2}\left(\mathrm{AK} + \mathrm{A\Lambda} - \mathrm{KB} - \mathrm{\Gamma\Lambda}\right) = \frac{\mathrm{B\Gamma}\cdot r'}{2} \qquad (1)$$

Όμως $\mathrm{AK} + \mathrm{A\Lambda} = \mathrm{KB} + \mathrm{B\Gamma} + \mathrm{\Lambda\Gamma} \Leftrightarrow \mathrm{AK} + \mathrm{A\Lambda} - \mathrm{KB} - \mathrm{\Lambda\Gamma} = \mathrm{B\Gamma}$ (2)

Οπότε, η (1) γίνεται $\frac{\mathrm{B\Gamma}\cdot r}{2} = \frac{\mathrm{B\Gamma}\cdot r'}{2} \Leftrightarrow r = r'$, που σημαίνει ότι το Ι είναι έγκεντρο του τριγώνου.

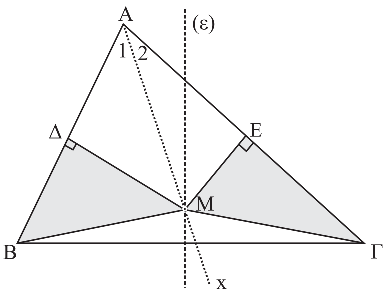
Οι προεκτάσεις που μπορούμε να δώσουμε στο θέμα είναι πολλές. Για παράδειγμα, μπορούμε να ζητήσουμε από τους μαθητές να εξετάσουν αν μπορεί να υπάρξει εξισωτής τριγώνου παράλληλος προς μία πλευρά του.

Η αντιμετώπιση μπορεί να γίνει αλγεβρικά, δηλαδή να οδηγηθούν στο ότι η εξίσωση (Ε) πρέπει να έχει διπλή ρίζα ή και γεωμετρικά, λαμβάνοντας υπόψη ότι ο εξισωτής διέρχεται από το έγκεντρο και η ΒΓ είναι ομοιόθετη της ΚΛ με κέντρο ομοιοθεσίας το Α.

2ο ΠΡΟΒΛΗΜΑ Σημεία στο εσωτερικό τριγώνου

Στη συνέχεια παρουσιάζουμε μία γνωστή άσκηση, την οποία χρησιμοποιούμε για να αναδείξουμε την αξία του σωστά σχεδιασμένου σχήματος.

Σε τυχαίο μη ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ, σχεδιάζουμε τη διχοτόμο Αx της γωνίας $\widehat{\mathrm{A}}$ και τη μεσοκάθετη (ε) της πλευράς ΒΓ, φροντίζοντας ώστε το σημείο τομής τους Μ να φαίνεται ότι είναι στο εσωτερικό του ΑΒΓ. Αφού δεν είναι ίσες οι ΑΒ, ΑΓ, τονίζουμε ότι δεν ταυτίζονται οι Αx, (ε). Εδώ, μάλιστα, μπορούμε να ζητήσουμε από τους μαθητές να αποδείξουν ότι δεν είναι παράλληλες, οπότε τέμνονται. Η σχετική απόδειξη είναι πολύ απλή. Αν ήταν παράλληλες, η Αx θα ήταν κάθετη στη ΒΓ, που είναι αδύνατο, αφού δεν μπορεί η διχοτόμος να είναι και ύψος σε τρίγωνο που δεν είναι ισοσκελές.



Κατόπιν φέρνουμε ΜΔ⊥ΑΒ, ΜΕ⊥ΑΓ και συγκρίνουμε τα τρίγωνα ΜΒΔ, ΜΓΕ. Έχουν ΜΒ = ΜΓ, αφού το Μ είναι στη μεσοκάθετη του ΒΓκαι ΜΔ = ΜΕ, αφού το Μ είναι στη διχοτόμο της $\widehat{\mathrm{A}}$, οπότε τα τρίγωνα είναι ίσα ως ορθογώνια με δύο αντίστοιχες πλευρές ίσες, οπότε είναι $\widehat{\mathrm{MB\Delta}} = \widehat{\mathrm{M\Gamma E}}$. Επίσης στο ισοσκελές ΜΒΓ είναι $\widehat{\mathrm{MB\Gamma}} = \widehat{\mathrm{M\Gamma B}}$, οπότε $\begin{cases} \widehat{\mathrm{B}} = \widehat{\mathrm{MB\Gamma}} + \widehat{\mathrm{MB\Delta}} \\ \widehat{\Gamma} = \widehat{\mathrm{M\Gamma B}} + \widehat{\mathrm{M\Gamma E}} \end{cases} \Rightarrow \widehat{\mathrm{B}} = \widehat{\Gamma}$!!

Το παράδοξο αποτέλεσμα προκαλεί το ενδιαφέρον των μαθητών, οι οποίοι, συνήθως, ανατρέχουν στις συγκρίσεις προσπαθώντας να ανακαλύψουν το λάθος βήμα στην απόδειξη.

Με ένα πρόγραμμα δυναμικής γεωμετρίας, όπως π.χ. το Geogebra, κατασκευάζουμε εκ νέου το παραπάνω σχήμα. Μετακινώντας τις κορυφές σε τυχαίες θέσεις, παρατηρούμε ότι το σημείο τομής των Αx, (ε), είναι **εκτός του τριγώνου**.

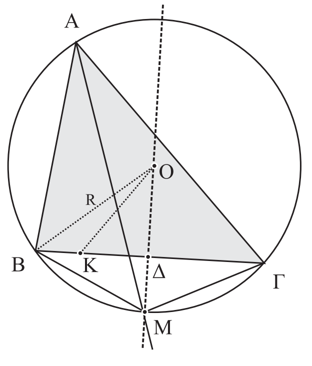
Ας λάβουμε το παραπάνω "παράδοξο" ως αφορμή για ένα νέο ερώτημα:

Γιατί το σημείο τομής της διχοτόμου Αx της γωνίας $\widehat{\mathrm{A}}$ *και της μεσοκάθετης (ε) της ΒΓ είναι εξωτερικό του τριγώνου;*

Θα ήταν πολύ εύκολο να επικαλεστούμε την απαγωγή σε άτοπο: "Αν ήταν εσωτερικό σημείο, θα προέκυπτε $\widehat{\mathrm{B}} = \widehat{\Gamma}$, που είναι άτοπο, άρα είναι εξωτερικό σημείο". Σωστή απόδειξη, αλλά θα αναζητήσουμε κάτι πιο προφανές, μια ευθεία απόδειξη.

Έστω ότι η μεσοκάθετος της πλευράς ΒΓ τέμνει τη ΒΓ στο Δ και τον περιγεγραμμένο κύκλο του ΑΒΓ στο Μ. Άρα το Μ είναι μέσο του $\widehat{\mathrm{B\Gamma}}$, οπότε $\widehat{\mathrm{BM}} = \widehat{\mathrm{M\Gamma}}$. Τότε $\widehat{\mathrm{BAM}} = \widehat{\mathrm{MA\Gamma}}$, ως εγγεγραμμένες που βαίνουν σε ίσα τόξα, άρα η ΑΜ είναι η διχοτόμος της $\widehat{\mathrm{A}}$.

Οπότε, πάντοτε η διχοτόμος μιας γωνίας ενός τριγώνου και η μεσοκάθετος της απέναντι πλευράς τέμνονται σε σημείο του περιγεγραμμένου κύκλου του τριγώνου. Όμως, τα σημεία του περιγεγραμμένου κύκλου του τριγώνου, με εξαίρεση τις κορυφές του, είναι πάντοτε εξωτερικά του τριγώνου. Πράγματι, αν Κ σημείο εσωτερικό των πλευρών του τριγώνου π.χ. της πλευράς ΒΓ, τότε ΚΔ < ΒΔ, οπότε και για τα πλάγια τμήματα ΟΚ και ΟΒ θα ισχύει ΟΚ < ΟΒ = R, άρα Κ εσωτερικό σημείο του κύκλου.



Επεκτείνουμε το θέμα, προσθέτοντας επιπλέον σχετικά ερωτήματα. Μετά από τις παραπάνω διερευνήσεις, γεννιέται το ερώτημα:

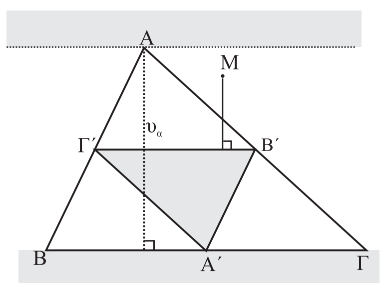
Ποια η αναγκαία και ικανή συνθήκη ώστε ένα σημείο του επιπέδου τριγώνου, βρίσκεται στο εσωτερικό του τριγώνου.

Ξεκινάμε, κάνοντας μια αναφορά σε αντίστοιχα ερωτήματα που έχουν τετριμμένη απάντηση.

Δίνεται ένας κύκλος. Ποια η συνθήκη για να είναι ένα σημείο του επιπέδου του στο εσωτερικό του κύκλου; Προφανώς, η απόστασή του από το κέντρο του να είναι μικρότερη της ακτίνας του.

Γενικεύουμε: *Δίνεται μία έλλειψη. Ποια η συνθήκη για να είναι ένα σημείο του επιπέδου της στο εσωτερικό της έλλειψης;* Εύκολα μπορούμε να αποδείξουμε ότι αρκεί το άθροισμα των αποστάσεων του σημείου από τις εστίες να είναι μικρότερο του μήκους του μεγάλου άξονα της έλλειψης.

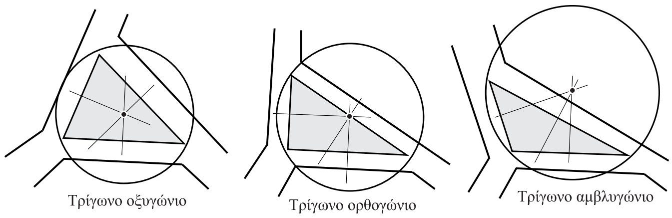
Ερχόμαστε κατόπιν στο τρίγωνο. Σε τρίγωνο ΑΒΓ παίρνουμε τα μέσα Α΄, Β΄, Γ΄ των ΒΓ, ΑΓ, ΑΒ αντίστοιχα. Ένα σημείο Μ του επιπέδου του τριγώνου βρίσκεται στο εσωτερικό του τριγώνου αν και μόνο αν ισχύουν ταυτόχρονα $d(\mathrm{M}, \mathrm{B}'\Gamma') < \frac{\upsilon_\alpha}{2}$, $d(\mathrm{M}, \mathrm{A}'\Gamma') < \frac{\upsilon_\beta}{2}$, $d(\mathrm{M}, \mathrm{A}'\mathrm{B}') < \frac{\upsilon_\gamma}{2}$, έτσι ώστε το Μ να είναι ταυτόχρονα εσωτερικό στις λωρίδες που ορίζουν οι πλευρές του και οι παράλληλές τους από τις απέναντι κορυφές.



Για να τονίσουμε το ενδιαφέρον που παρουσιάζει ο έλεγχος για το αν ένα σημείο του επιπέδου είναι εσωτερικό ενός τριγώνου μπορούμε να ζητήσουμε να αντιμετωπίσει η τάξη το γνωστό πρόβλημα που περιέχεται στα φυλλάδια του προγράμματος PISA σχετικά με το φωτισμό τριγωνικής πλατείας [4].

Το Δημοτικό Συμβούλιο αποφάσισε να εγκαταστήσει στήλο φωτισμού σε ένα μικρό τριγωνικό πάρκο, έτσι ώστε να φωτίζει όλο το *πάρκο. Πού πρέπει να τοποθετηθεί ο στήλος;* *Φυλ. Αξιολόγησης PISA 2003*

Μία φαινομενικά προφανής λύση θα ήταν η τοποθέτηση του στήλου στο περίκεντρο του τριγώνου (σημείο τομής μεσοκαθέτων), που ισάπεχει από τις κορυφές του, οπότε, αν φωτίζει την μία κορυφή, τότε, σίγουρα, φωτίζει όλη την επιφάνεια του πάρκου. Μεταφέροντας τη μαθηματική λύση στον "πραγματικό κόσμο", παρατηρούμε ότι η λύση είναι αποδεκτή για οξυγώνιο τρίγωνο. Αν, όμως, το τρίγωνο είναι ορθογώνιο ή αμβλυγώνιο, δεν είναι αποδεκτή, γιατί, παρατηρούμε ότι θα πρέπει να τοποθετηθεί στο δρόμο ή σε γειτονικά οικόπεδα και σίγουρα εκτός πάρκου!



Προεκτείνοντας, ζητάμε από την τάξη να διερευνήσει *σε ποιες περιπτώσεις το σημείο τομής μεσοκαθέτων τριγώνου (περίκεντρο) είναι εσωτερικό, εξωτερικό ή πάνω στις πλευρές του τριγώνου;*

Θέτουμε, κατόπιν τα παράλληλα ερωτήματα για τις αναγκαίες και ικανές συνθήκες ώστε ένα σημείο του επιπέδου να είναι εσωτερικό σε τετράγωνο, ορθογώνιο, παραλληλόγραμμο, τραπέζιο και τυχαίο ν-γωνο.

Πιστεύουμε ότι η ενασχόληση με τις προεκτάσεις που προκύπτουν κατά τη διαπραγμάτευση τέτοιων θεμάτων καλλιεργεί και βελτιώνει βαθμιαία τη γόνιμη μαθηματική παρατηρητικότητα και τη δημιουργική σκέψη των μαθητών.

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

[1] Cobb P., Wood T., Yackel E. & McNeal B. (1992), "*Characteristics of classroom mathematics traditions: An interactional analysis*", American Educational Research Journal, 29, 573-604

[2] George Berzsenyi, *The equalizer of a triangle*, Quantum 7 (March-April 1997)

[3] Dimitrios Kodokostas, *Triangle Equalizers*, Math. Magazine vol. 83 (2010) p. 141-146

[4] "*The PISA 2003 Assessment Framework*", OECD, 2004.

[5] "*Learning for Tomorrow's World*, First Results from PISA 2003", OECD, 2004

[6] "*Problem Solving for Tomorrow's World*, *First Measures of Cross-Curricular Competencies from PISA 2003*", OECD, 2004

[7] Αργυρόπουλος, Η. κ.α. *Ευκλείδεια Γεωμετρία*, ΟΕΔΒ, Αθήνα 2011

[8] Δ. Ντρίζος, *Διδακτική Αξιοποίηση Προβλημάτων Επαγωγικής Συλλογιστικής στο Πλαίσιο Ανάπτυξης Ιδεών του G. Polya - Μια Διδακτική Πρόταση*, σ.29 Ευκλείδης Γ΄, τχ. 73, 2010