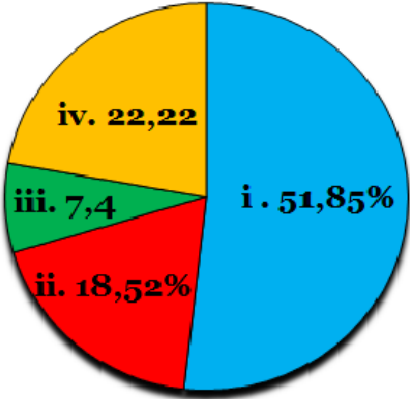




Τεστ	Μαθηματικά Γ Γυμνασίου – Εισαγωγή στα Πρότυπα Πειραματικά Λύκεια ΕΠΕΣ Π.Π. ΓΕΛ Βαρβακείου Σχολής Συντάκτης Λυγάτσικας Ζήνων ΠΕ 03		
Χρόνος	120 λεπτά		
Βαθμολογία	Το διαγώνισμα είναι βαθμολογημένο με άριστα το 100.		
Αριθμός ερωτήσεων	12 ερωτήσεις πολλαπλής επιλογής (Μέρος Α) 6 ερωτήσεις σύντομης απάντησης (Μέρος Β) 2 προβλήματα (Άλγεβρα/Γεωμετρία) (Μέρος Γ)		
Τύπος	Σύνθετος, Ερωτήσεις πολλαπλής επιλογής και ερωτήσεις κατασκευαστικής απάντησης. Υπολογιστής απαγορεύεται		
Ποσόστωση	Πολλαπλής επιλογής 60% Σύντομης απάντησης 30% Προβλήματα 10%		
	Περιεχόμενο	Αριθμός Ερωτήσεων	Αναλογία επι τοις 100
	i. Αριθμητική και βασική Άλγεβρα	13	51,85
	ii. Γεωμετρία και τριγωνομετρία	6	18,52
	iii. Πιθανότητες και Στατιστική	2	7,4
	iv. Ασκήσης ανάπτυξης Άλγεβρας και Γεωμετρίας	6	22,2
	Κατηγορίες		
Μαθηματικό πρόβλημα και συλλογισμός Άλγεβρικές και γεωμετρικές σχέσεις Αναπαράσταση αντικειμένου			



ΜΕΡΟΣ Α

Ερωτήσεις πολλαπλής επιλογής

12 x 4 = 48

1. Ποιά από τα ακόλουθα είναι σωστό σύμφωνα με τα στοιχεία του πίνακα

1. Καθώς το x αυξάνεται το y ελαττώνεται
2. Καθώς το x ελαττώνεται το y δεν αλλάζει
3. Καθώς το x αυξάνεται το y αυξάνεται
4. Καθώς το x αυξάνεται το y ελαττώνεται

x	y
-5	-2
-3	$-\frac{3}{2}$
1	-1
10	$-\frac{1}{2}$
11	$-\frac{1}{45}$
100	0

2. Αν σε μια αίθουσα υπάρχουν 5 φορές περισσότερα παιδιά από ενήλικες, ποιός ΔΕΝ μπορεί να είναι ο συνολικός αριθμός των ατόμων στην αίθουσα:

1. 180 2. 22 3. 42 4. 3330

3. Το άθροισμα 5 διαδοχικών θετικών ακεραίων είναι ίσο με Σ . Ο μεγαλύτερος από αυτούς ως προς Σ είναι:

1. $\frac{\Sigma + 10}{5}$ 2. $\frac{\Sigma - 10}{5}$ 3. $\frac{\Sigma - 5}{4}$ 4. $\frac{\Sigma + 4}{5}$

4. Αν a και β είναι πραγματικοί αριθμοί με $\beta \neq 0$ έτσι ώστε $\frac{\alpha}{\beta} = 2013$, τότε το

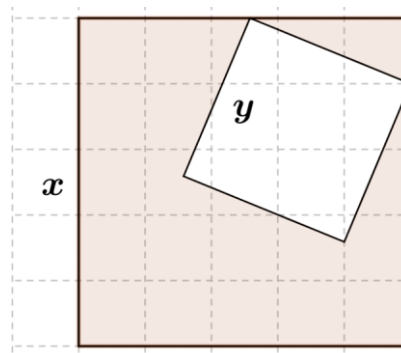
$\frac{\alpha + 3\beta}{\beta}$ είναι:

1. 2013+3 β 2. 6039 3. 2016 4. $\alpha + 3$

5. Υπάρχουν δύο τετράγωνα πλευράς x και y το ένα μέσα στο άλλο, όπως φαίνεται στο διπλανό σχήμα. Το εμβαδόν του γραμμοσκιασμένου τμήματος του μεγάλου τετραγώνου είναι ίσο με:

1. $(x - y)^2 + 1/2$
2. $(x - 1)(x - 2) - y^2$
3. $(x - y)^2 + 1 + 2 \cdot 1$
4. $(x - y)(x + y)$

6. Πόσα ψηφία έχει ο αριθμός $10^{2013} - 1$:





1. 2013
2. 2012
3. 2011
4. 2010

7. Αν x πραγματικός αριθμός με $x \neq 0$ και $x \neq 1/3$, έτσι ώστε: $\frac{3x-1}{x} = \frac{9x}{3x-1}$, τότε

ποιο από τα παρακάτω είναι αληθές:

1. $x < 0$
2. $0 < x < 1/100$
3. $1/50 < x < 2$
4. $x > 3$

8. Η τιμή του $\frac{3^{1003} + 3^{1002}}{3^{1001} - 3^{1000}}$ είναι

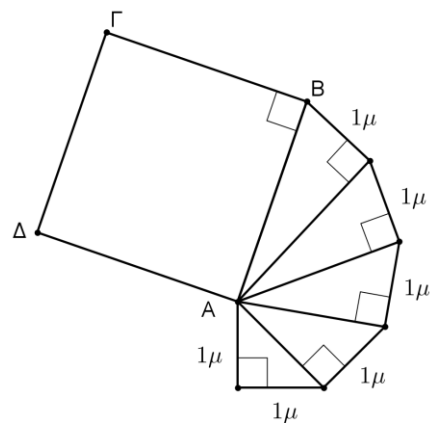
1. 18
2. 127
3. 82
4. 27

9. Δίδεται εξίσωση ως προς x , $x^2 + ax - 4 = 0$ με a πραγματικό αριθμό. Αν το 2 είναι μία ρίζα της εξίσωσης τότε η άλλη ρίζα είναι:

1. -2
2. 4
3. -4
4. 0

10. Το εμβαδόν του τετραγώνου ΑΒΓΔ είναι:

1. 25
2. 36
3. 6
4. 9





11. Αν οι πραγματικοί αριθμοί x, y, z είναι τέτοιοι ώστε $x, y, z \neq 1$ και

$$\frac{x}{y-1} = \frac{y}{z-1} = \frac{z}{x-1} = 2, \text{ τότε το } x \text{ είναι ίσο με:}$$

1. 8
2. 6
3. 4
4. 2

12. Αν οι μεταβλητές x, y, ω παριστάνουν πραγματικούς αριθμούς και

$$x + y = \frac{\eta\mu^2\omega + \sigma\upsilon\nu^2\omega}{\eta\mu 30^\circ}, \quad x + \omega = \frac{\epsilon\phi 60^\circ}{\epsilon\phi 30^\circ}, \text{ το γινόμενο τότε } (2x + y + \omega)(\omega - y)$$

είναι:

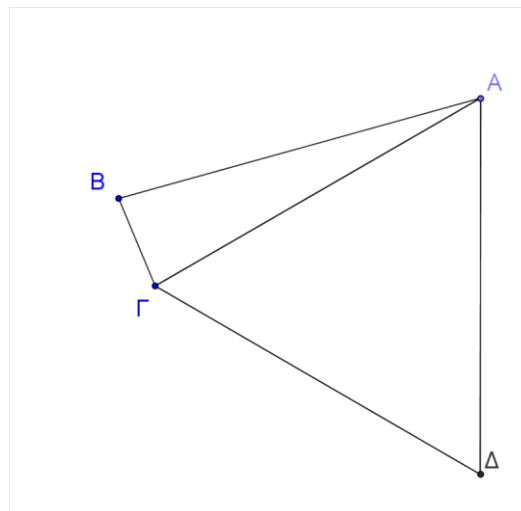
1. 0.4
2. 0.3
3. 0.2
4. 5



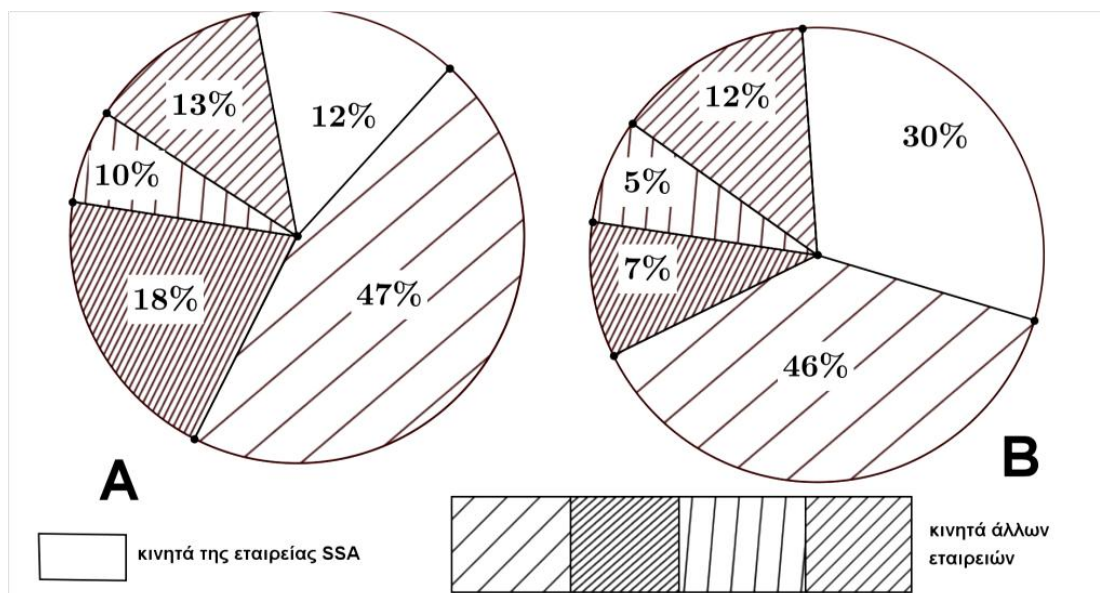
ΜΕΡΟΣ Β Ερωτήσεις σύντομης απάντησης

$$6 + 6 + 6 + 6 = 24$$

1. Δίδεται ισοσκελές τρίγωνο $AB\Gamma$ με $AB = 5\mu$ και γωνία $B = 75^\circ$. Εξωτερικά κατασκευάζουμε ισόπλευρο τρίγωνο $A\Gamma\Delta$. Υπολογίστε το μήκος του ευθυγράμμου τμήματος $B\Delta$.



2. Σε δύο πόλεις A και B ο συνολικός αριθμός των κινητών τηλεφώνων είναι αντίστοιχα 78450 και 31380. Στα παρακάτω κυκλικά διαγράμματα βλέπετε το ποσοστό των κινητών ανάλογα με την εταιρεία κατασκευής. Σε ποια από τις δύο πόλεις, A και B , η εταιρεία “SSA” έχει περισσότερα κινητά; Δικαιολογήστε.





3. Τρεις μαθητές Α, Β και Γ έχουν στις τσάντες τους χρωματιστές μπίλιες:
- Ο Α έχει 7 μπίλιες κόκκινες
 - Ο Β έχει 5 μπίλιες κόκκινες και 25 πράσινες
- 1) Ποια είναι η πιθανότητα ο Β να τραβήξει από την τσάντα του μια κόκκινη μπίλια?
 - 2) Πόσες πράσινες μπίλιες πρέπει να προσθέσουμε στην τσάντα του Α ώστε η πιθανότητα να τραβήξει ο Α μία κόκκινη μπίλια να είναι η ίδια με την πιθανότητα να τραβήξει ο Β μια κόκκινη μπίλια.
4. Η υποτείνουσα α και μία κάθετος πλευρά β ενός ορθογωνίου τριγώνου είναι διαδοχικοί ακέραιοι. Δείξε ότι το εμβαδόν του είναι $\frac{\beta\sqrt{\alpha+\beta}}{2}$



ΜΕΡΟΣ Γ Επίλυση Προβλήματος

14 + 10 = 24 μονάδες

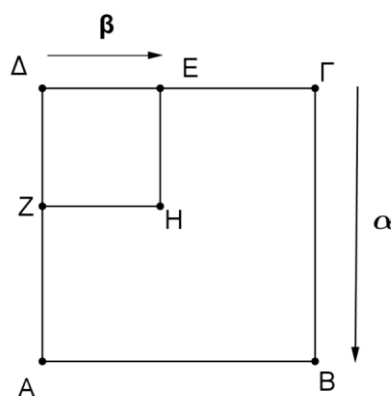
Πρόβλημα Αλγεβρας

A.

- 1) Έστω x , y και z τρεις πραγματικοί αριθμοί διάφοροι του μηδενός. Δείξτε ότι αν $M = z - 4x + 3y$ και $N = 4(x + z) + 2y$ είναι αντίθετοι πραγματικοί αριθμοί, τότε οι αριθμοί z και y είναι και αυτοί αντίθετοι.
- 2) Να βρείτε την τιμή του πραγματικού αριθμού α έτσι ώστε οι αριθμοί $-\frac{1}{2}$ και $\frac{\alpha(\alpha+3)}{3} - \frac{\alpha-6}{6}$ να είναι αντίθετοι.
- 3) Στο ορθοκανονικό σύστημα συντεταγμένων θεωρήστε δύο σημεία $A = (3, 4)$ και $B = (-3, -4)$.
 - a. Ποια είναι η θέση των σημείων A και B ως προς το κέντρο των αξόνων $(0,0)$;
 - b. Ποια είναι η εξίσωση της ευθείας που διέρχεται από τα δύο αυτά σημεία; Ονομάστε (ϵ) την ευθεία αυτή.
 - c. Βρείτε δύο άλλα σημεία πάνω στην ευθεία (ϵ) με ακέραιες συντεταγμένες.

B.

- 1) Βρείτε δύο άλλα σημεία πάνω στην ευθεία (ϵ) με ακέραιες συντεταγμένες.
- 2) Το $ABΓΕΗΖ$ είναι ένα οικόπεδο με εμβαδόν $9\,600 \mu^2$. Στην άκρη του υπάρχει ένα άλλο τετραγωνικό οικόπεδο, $\Delta ΖΗΕ$, όπως φαίνεται στο σχήμα. Μια μέρα ο ιδιοκτήτης του πρώτου οικοπέδου θέλησε να βαδίσει περιμετρικά από το σημείο Γ έως το A ακολουθώντας την διαδρομή που διέρχεται από τα σημεία $E, \Delta, Ζ$ διαδοχικά.



Αν έχει διανύσει απόσταση 320μ μέχρι να φτάσει στο Z , να βρείτε την απόσταση του AZ .



Πρόβλημα Γεωμετρίας

- 1) Δίδεται τρίγωνο $AB\Gamma$. Να κατασκευάσετε τρίγωνο μια γωνία του οποίου να είναι ίση με μια γωνία του $AB\Gamma$ και να έχει δύο φορές το εμβαδόν του $AB\Gamma$. Δικαιολογήστε την κατασκευή σας.
- 2) Δίδεται ορθογώνιο τρίγωνο $AB\Gamma$ με $A = 90^\circ$.
Να χωρίσετε το ορθογώνιο τρίγωνο $AB\Gamma$ σε
 - i. τέσσερα ισοσκελή τρίγωνα.
 - ii. έξι ισοσκελή τρίγωνα.
 - iii. τρία ισοσκελή τρίγωνα.

Σε κάθε περίπτωση να δικαιολογήσετε την κατασκευή σας.

ΤΕΛΟΣ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΑΤΟΣ



ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ

ΜΕΡΟΣ Α Ερωτήσεις πολλαπλής επιλογής

12 x 4 = 48

- 1) Καθώς το x αυξάνει από το -5 στο 100 , το y επίσης αυξάνει από το -2 στο $-1/45$. Άρα σωστό είναι το **3**.
- 2) Αν x είναι ο αριθμός των ενηλίκων τότε ο συνολικός αριθμός ατόμων είναι $6x$. Άρα, ο συνολικός αριθμός είναι πολλαπλάσιο του 6 . Ο μόνος αριθμός που δεν είναι πολ/σιο του 6 είναι ο 22 . Άρα, σωστό είναι το **2**.
- 3) Αν ο πρώτος είναι ο a , τότε οι πέντε θετικοί και διαδοχικοί ακέραιοι είναι οι $a, a+1, a+2, a+3, a+4$. Οι αριθμοί αυτοί έχουν άθροισα $\Sigma = 5a + 10$. Άρα, $a + 4 = \frac{\Sigma - 10}{5} + 4 = \frac{\Sigma + 10}{5}$. Σωστό είναι το **1**.
- 4) Επειδή $\frac{\alpha + 3\beta}{\beta} = \frac{\alpha}{\beta} + 3 = 2013 + 3 = 2016$, σωστό είναι το **3**.
- 5) Το εμβαδόν του γραμμοσκιασμένου είναι $x^2 - y^2$. Άρα, σωστό είναι το **4**.
- 6) Ο αριθμός έχει πρώτο ψηφίο το 1 ακολοθούμενο από 2013 μηδενικά. Αν αφαιρέσουμε το 1 θα έχει 2013 ψηφία 9 . Άρα, σωστό είναι το **1**.
- 7) Επειδή $(3x-1)^2 = 9x^2 \Leftrightarrow -6x+1=0 \Leftrightarrow -6x=-1 \Leftrightarrow x=1/6$. Άρα, σωστό είναι το **3**.
- 8) Επειδή $\frac{3^{1003} + 3^{1002}}{3^{1001} \cdot 3^{1000}} = \frac{3^{1002}(3+1)}{3^{1000}(3-1)} = 3^2 \cdot 2 = 18$, η σωστή απάντηση είναι η **1**.
- 9) Για $x=2$ η εξίσωση δίνει $a=0$. Άρα, η άλλη ρίζα είναι το -2 . Σωστή απάντηση η **1**.
- 10) Η τελευταία υποτείνουσα των ορθογωνίων τριγώνων έχει μέτρο $\sqrt{6}$. Άρα το εμβαδόν είναι 6 και σωστή απάντηση είναι η **3**.
- 11) Είτε λύνοντας το σύστημα, είτε δοκιμάζοντας τις τιμές $8, 6, 4$ στην θέση του x βλέπουμε ότι η πιθανότερη τιμή του είναι 2 . Άρα, σωστό είναι το **4**.
- 12) Επειδή $\eta\mu^2\omega + \sigma\upsilon\nu^2\omega = 1$, $\eta\mu 30^\circ = 1/2$, $\epsilon\phi 60^\circ = \sqrt{3}$ και $\epsilon\phi 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{3}$ οι δύο εξισώσεις γίνονται : $x + y = 2$ και $x + \omega = 3$. Άρα προσθέτοντας και τις δύο έχω: $2x + y + \omega = 5$ και αφαιρώντας $\omega - y = 1$. Άρα, $(2x + y + \omega)(\omega - y) = 5$ και σωστό είναι **4**.

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
3	2	1	3	4	1	3	1	1	3	4	4

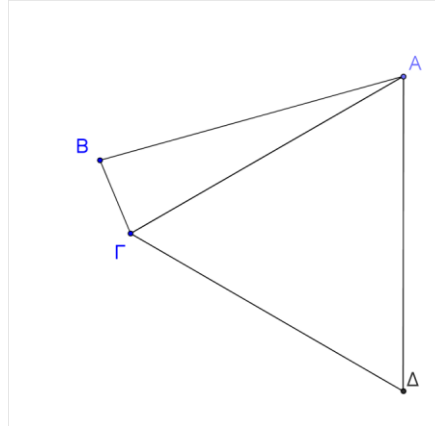


ΜΕΡΟΣ Β

Ερωτήσεις σύντομης απάντησης

$$6 + 6 + 6 + 6 = 24$$

1) (6 μονάδες)



Σκοπός	<ul style="list-style-type: none"> Αξιολόγηση γεωμετρικών δεξιοτήτων (ορθολογική απεικόνιση, ακρίβεια σχεδίου-δεδομένων, μαθηματική συνέπεια)
Διδακτικό Αντικείμενο	<ul style="list-style-type: none"> Ιδιότητες τριγώνων βάσει των σχέσεων γωνιών και πλευρών. Πυθαγόρειο θεώρημα ή θεώρημα συνημιτόνου.
	Οι απαντήσεις και οι εκτιμήσεις της βαθμολογικής διαβάθμισης πρέπει να είναι αποφασισμένες από πριν και βασισμένες στις παρακάτω εκτιμήσεις.

Εύρεση μέτρου ευθ. τμήματος ΒΔ

Σκόρ 6

<p>Το τρίγωνο ΑΒΔ είναι ορθογώνιο με ορθή την ΒΑΔ. Γιατί: γων. ΒΑΓ = 30° γων. ΓΑΔ = 60° Άρα: ΒΑΔ = 30° + 60° = 90°</p>	3μ
<p>Άρα, από πυθαγόρειο θεώρημα $ΒΔ^2 = ΑΒ^2 + ΑΔ^2 = 25 + 25 = 50$. Άρα, $ΒΔ = \sqrt{50}$ ή $5\sqrt{2}$.</p>	3μ

ή



<p>Το τρίγωνο ΑΒΔ είναι ορθογώνιο με ορθή την ΒΑΔ. Γιατί: γων. ΒΑΓ = 30° γων. ΓΑΔ = 60° Άρα: ΒΑΔ = 30° + 60° = 90°</p>	3μ
<p>Αν χρησιμοποιήσει το θεώρημα του συνημιτόνου στο τρίγωνο ΒΓΔ με γων. ΒΓΔ = 75° + 60° = 135°, αλλά δεν υπολογίσει το συν 135°. Γραφει λοιπόν : $ΒΔ^2 = ΒΓ^2 + ΓΔ^2 - 2ΒΓ ΓΔ \text{ συν } 135^\circ$ με $ΒΓ^2 = ΑΒ^2 + ΑΓ^2 - 2 ΑΒ ΑΓ \text{ συν } Α = 5^2 + 5^2 - 2 \cdot 25 \text{ συν } 30^\circ = 50 - 50 \frac{\sqrt{3}}{2} = 50 - 25\sqrt{3}$. Αντικαθιστά στην αρχική: $ΒΔ^2 = 50 - 25\sqrt{3} + 25 - 2(50 - 25\sqrt{3}) 25 \text{ συν } 135^\circ$. Αυτό αρκεί, έστω και αν δεν βρήκε αποτέλεσμα.</p>	3μ

Σκόρ 3

Όπως προηγουμένως με ένα αριθμητικό λάθος.

Σκόρ 0

Οτιδήποτε άλλο ή τίποτα.

2) (6 μονάδες)

Σκοπός	• Αξιολόγηση της ικανότητας ορθολογικής αντίληψης.
Διδακτικό Αντικείμενο	• Πράξεις με ποσοστά. • Ανάγνωση αποτελεσμάτων από ένα διαγραμμα.
	Οι απαντήσεις και οι εκτιμήσεις της βαθμολογικής διαβάθμισης πρέπει να είναι αποφασισμένες από πριν και βασισμένες στις παρακάτω εκτιμήσεις.

Σκόρ 6

Επειδή $78450 \cdot 12\% = 9414$ και $31380 \cdot 30\% = 9414$, ο αριθμός των κινητών της εταιρείας SSA είναι ίδιος και στις δύο πόλεις.

Σκόρ 3

Λάθος αποτέλεσμα στις αριθμητικές πράξεις.

Σκόρ 0

Σε οποιαδήποτε άλλη περίπτωση.



3) ($2 + 4 = 6$ μονάδες)

Σκοπός	<ul style="list-style-type: none">• Αξιολόγηση της ικανότητας προσαρμογής σε αντίστροφη διαδικασία.
Διδακτικό Αντικείμενο	<ul style="list-style-type: none">• Υπολογισμός στοιχειωδών πιθανοτήτων απλών δεδομένων.• Ισοπίθανα γεγονότα.• Πρόβλημα
	Οι απαντήσεις και οι εκτιμήσεις της βαθμολογικής διαβάθμισης πρέπει να είναι αποφασισμένες από πριν και βασισμένες στις παρακάτω εκτιμήσεις.

1) Σκόρ 2

Η Πιθανότητα είναι $P(K) = 5/30 = 1/6$

Σκόρ 0

Σε οποιαδήποτε άλλη περίπτωση.

2) Σκόρ 4

Έστω x ο αριθμός των πράσινων που πρέπει να προσθέσουμε. Τότε

$$P(A) = \frac{1}{6} = \frac{7}{7+x} \Leftrightarrow 7+x = 42 \Leftrightarrow x = 35. \text{ Άρα πρέπει να προσθέσουμε } \mathbf{35}$$

πράσινες ώστε να γίνουν συνολικά **42** οι μπίλιες που έχει ο Α.

Σκόρ 2

Αριθμητικό λάθος στην λύση της εξίσωσης. Ή, αν βρήκε εμπειρικά τον αριθμό 35 δικαιολογώντας έστω με κάποια στοιχειώδη σκέψη τον υπολογισμό.

Σκόρ 0

Σε οποιαδήποτε άλλη περίπτωση.



4) (6 μονάδες)

Σκοπός	<ul style="list-style-type: none"> Αξιολόγηση της δεξιότητας συνδυασμού γεωμετρικών και αριθμητικών δεδομένων.
Λιδακτικό Αντικείμενο	<ul style="list-style-type: none"> Υπολογισμός στοιχειωδών εμβαδών επιπέδων σχημάτων. Αλγεβρική προσαρμογή των γεωμετρικών αποτελεσμάτων Συνδυασμός αριθμητικών ιδιοτήτων των πλευρών τριγώνου.
	Οι απαντήσεις και οι εκτιμήσεις της βαθμολογικής διαβάθμισης πρέπει να είναι αποφασισμένες από πριν και βασισμένες στις παρακάτω εκτιμήσεις.

Σκόρ 6

Επειδή το τρίγωνο είναι ορθογώνιο έχουμε $\alpha^2 = \beta^2 + \gamma^2$	0.5μ
$\gamma = \sqrt{\alpha^2 - \beta^2}$ παίρνω την θετική τιμή επειδή είναι μήκη πλευρών	0.5μ
Το εμβαδόν του τριγώνου είναι $E = \frac{1}{2}\beta\gamma = \frac{1}{2}\beta\sqrt{\alpha^2 - \beta^2}$	0.5μ
$E = \frac{1}{2}\beta\sqrt{\alpha^2 - \beta^2} = \frac{1}{2}\sqrt{(\alpha + \beta)(\alpha - \beta)}$	0.5μ
Αλλά α και β διαδοχικοί ακέραιοι και επειδή $\alpha > \beta$ έχουμε $\alpha - \beta = 1$	2μ
Άρα, $E = \frac{1}{2}\sqrt{(\alpha + \beta)(\alpha - \beta)} = \frac{1}{2}\sqrt{\alpha + \beta}$	2μ
ΣΥΝΟΛΟ	6μ

ή

Σκόρ 6

Επειδή το τρίγωνο είναι ορθογώνιο έχουμε $\alpha^2 = \beta^2 + \gamma^2$	0.5μ
$\gamma = \sqrt{\alpha^2 - \beta^2}$ παίρνω την θετική τιμή επειδή είναι μήκη πλευρών	0.5μ
Το εμβαδόν του τριγώνου είναι $E = \frac{1}{2}\beta\gamma = \frac{1}{2}\beta\sqrt{\alpha^2 - \beta^2}$	0.5μ
Επειδή $\alpha > \beta$ και α και β διαδοχικοί ακέραιοι $\alpha = \beta + 1$	2μ
$E = \frac{1}{2}\beta\sqrt{\alpha^2 - \beta^2} = \frac{1}{2}\beta\sqrt{(\beta + 1)^2 - \beta^2} = \frac{1}{2}\beta\sqrt{2\beta + 1}$	2μ
Επίσης η ζητούμενη σχέση γίνεται $E = \frac{1}{2}\beta\sqrt{\beta + 1 + \beta} = \frac{1}{2}\beta\sqrt{2\beta + 1}$ η οποία είναι αληθής.	0.5μ
ΣΥΝΟΛΟ	6μ



Σκόρ 2

Επειδή το τρίγωνο είναι ορθογώνιο έχουμε $\alpha^2 = \beta^2 + \gamma^2$	0.5μ
$\gamma = \sqrt{\alpha^2 - \beta^2}$ παίρνω την θετική τιμή επειδή είναι μήκη πλευρών	0.5μ
Το εμβαδόν του τριγώνου είναι $E = \frac{1}{2} \beta \gamma = \frac{1}{2} \beta \sqrt{\alpha^2 - \beta^2}$	0.5μ
$E = \frac{1}{2} \beta \sqrt{\alpha^2 - \beta^2} = \frac{1}{2} \beta \sqrt{(\alpha + \beta)(\alpha - \beta)}$	0.5μ
ΣΥΝΟΛΟ	2μ

Σκόρ 1

Μόνο αν έγραψε το τύπο του εμβαδού και την πυθαγόρεια σχέση των πλευρών

Σκόρ 0

Σε οποιαδήποτε άλλη περίπτωση.



ΜΕΡΟΣ Γ Επίλυση Προβλήματος

14 + 10 = 24

Πρόβλημα Αλγεβρας (14 μονάδες)

Σκοπός	<ul style="list-style-type: none"> • Αξιολόγηση δεξιοτήτων αναγωγής ενός προβλήματος σε αλγεβρική γλώσσα. • Αξιολόγηση της δεξιοτήτων αλγεβρικών υπολογισμών. • Αξιολόγηση της κατανόησης των αλγεβρικών στοιχείων και εννοιών στο πεδίο της Αναλυτικής Γεωμετρίας. • Αξιολόγηση της ικανότητας ελέγχου στο αλγεβρικό αποτέλεσμα
Διδακτικό Αντικείμενο	<ul style="list-style-type: none"> • Λογισμός με αλγεβρικές προτάσεις. • Επίλυση προβλήματος
	Οι απαντήσεις και οι εκτιμήσεις της βαθμολογικής διαβάθμισης πρέπει να είναι αποφασισμένες από πριν και βασισμένες στις παρακάτω εκτιμήσεις.

A.

1) Σκόρ 2

Αν M και N αντίθετοι, τότε $M + N = 0$	1
$z - 4x + 3y + 4(x + z) + 2y = z - 4x + 3y + 4x + 4z + 2y = z + 3y + 4z + 2y = 0 \Leftrightarrow 5z + 5y = 0$ ή $z + y = 0$	1

Σκόρ 0

Σε οποιαδήποτε άλλη περίπτωση.

2) Σκόρ 2

Για να είναι 2 αρθμοί, α και β, αντίθετοι, πρέπει: $\alpha + \beta = 0$	1
$-\frac{1}{2} + \frac{\alpha(\alpha + 3)}{3} - \frac{\alpha - 6}{6} = 0 \Leftrightarrow \frac{3 + 2\alpha^2 + 5\alpha}{6} = 0 \Leftrightarrow \Leftrightarrow (2\alpha + 3)(\alpha + 1) = 0 \Leftrightarrow \alpha = -3/2$ ή $\alpha = -1$	1

Σκόρ 0

Σε οποιαδήποτε άλλη περίπτωση.

3) Σκόρ 3

- Είναι συμμετρικά ως προς (0,0). **1 μονάδα**
- Είναι η εξίσωση $4x - 3y = 0$. **1 μονάδα**
- Τα σημεία $\Gamma = (6, 8)$ και $\Delta = (9, 15)$. **1 μονάδα**



Σκόρ 0

Σε οποιαδήποτε άλλη περίπτωση.

B.

Σκόρ 7

Από το Γ έως το Ζ ο ιδιοκτήτης ακολουθεί μια πορεία της οποίας το μήκος είναι $ΑΔ + ΔΖ = α + β = 320$	1.5 μ
Επίσης, είναι γνωστό ότι $α^2 - β^2 = 9\ 600$	1.5 μ
$α^2 - β^2 = 9\ 600 \Leftrightarrow (α + β)(α - β) = 9600 \Leftrightarrow 320(α - β) = 9600$ $α - β = 30$	4μ
Άρα, $AZ = α - β = 30$	
ΣΥΝΟΛΟ	7μ

Σκόρ 7

Από το Γ έως το Ζ ο ιδιοκτήτης ακολουθεί μια πορεία της οποίας το μήκος είναι $α + β = 320$	1.5 μ
Επίσης, είναι γνωστό ότι $α^2 - β^2 = 9\ 600$	1 μ
$α^2 - β^2 = 9\ 600 \Leftrightarrow (320 - β)^2 - β^2 = 9600 \Leftrightarrow 92800 - 640β = 0$ $\Leftrightarrow β = 145$	3 μ
Άρα, $α = 320 - 145 = 175$	1.5 μ
Συνεπώς, $AZ = α - β = 175 - 145 = 30$	
ΣΥΝΟΛΟ	7 μ

Σκόρ 6

Από το Γ έως το Ζ ο ιδιοκτήτης ακολουθεί μια πορεία της οποίας το μήκος είναι $α + β = 320$	1 μ
Επίσης, είναι γνωστό ότι $α^2 - β^2 = 9\ 600$	2 μ
$α^2 - β^2 = 9\ 600 \Leftrightarrow (α + β)(α - β) = 9600 \Leftrightarrow 320(α - β) = 9600$ $α - β = 30$	4μ
Επιλύοντας το σύστημα ως προς α και β, βρίσκω $α = 175$ $β = 145$	-1μ
Άρα, $AZ = α - β = 175 - 145 = 30$	
ΣΥΝΟΛΟ	6 μ

Σκόρ 0

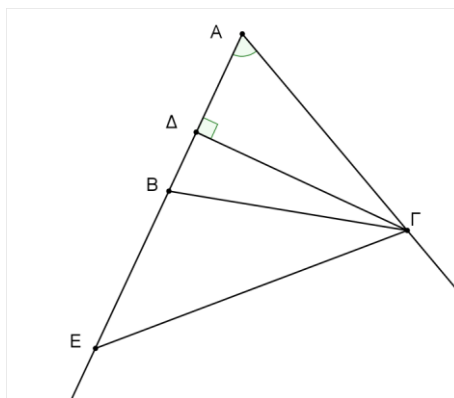
Όλα λάθος ή δεν απάντησε στο πρόβλημα.



Πρόβλημα Γεωμετρίας (10 μονάδες)

Σκοπός	<ul style="list-style-type: none"> • Αξιολόγηση δεξιότητας διατύπωσης εικασίας και υπόθεσης. • Αξιολόγηση της ικανότητας ανάλυσης και ερμηνείας. • Αξιολόγηση της ικανότητας οργάνωσης πληροφοριών και δεδομένων. • Αξιολόγηση της ικανότητας της χρήσης μοτίβων.
Διδακτικό Αντικείμενο	<ul style="list-style-type: none"> • Ιδιότητες μεσοκαθέτου ευθ. τμήματος. • Ιδιότητες διαμέσου ορθογωνίου τριγώνου. • Ισοδύναμα σχήματα.
	Οι απαντήσεις και οι εκτιμήσεις της βαθμολογικής διαβάθμισης πρέπει να είναι αποφασισμένες από πριν και βασισμένες στις παρακάτω εκτιμήσεις.

1) Ερώτημα Γεωμετρικό Πρόβλημα (3 μονάδες)



Θεωρώ τρίγωνο $AB\Gamma$.

Θα κατασκευάσω τρίγωνο που να έχει την ίδια γωνία A με το $AB\Gamma$ και το διπλάσιο εμβαδόν.

Σκόρ 3

Γνωρίζω ότι η διάμεσος χωρίζει το τρίγωνο σε δύο ισεμβαδικά τρίγωνα.	2μ
Αν λοιπόν διπλασιάσω την βάση AB (ή $A\Gamma$) του τριγώνου $AB\Gamma$ παίρνοντας ευθ. τμήμα $BE = AB$ (ή $GE = A\Gamma$) τότε η $B\Gamma$ θα είναι η διάμεσος στο νέο τρίγωνο και το $AB\Gamma$ θα έχει εμβαδόν το μισό του τριγώνου AEG (ή AEB)	1μ



Σκόρ 3

<p>Αν E το εμβαδόν του $AB\Gamma$ και E' το εμβαδόν του ζητουμένου τριγώνου, θα έχουμε</p> $2 E = E' \quad (1)$ <p>Επειδή έχουν την ίδια γωνία A θα πρέπει μια κορυφή του ζητουμένου τριγώνου να είναι η A και οι άλλες δύο θα ανήκουν πάνω στις AB και $A\Gamma$.</p>	1μ
<p>Αν τα δύο τρίγωνα έχουν κοινή την πλευρά AB (δηλαδή 2 κορυφές του νέου τριγώνου να συμπίσουν με τις A και B του $AB\Gamma$), για να ικανοποιείται η (1) πρέπει να διπλασιάσω το ύψος. Αυτό είναι αδύνατο γιατί τότε το A δεν πρέπει να ανήκει στην $A\Gamma$.</p>	1μ
<p>Αν κρατήσω το ύψος σταθερό, πρέπει να διπλασιάσω το μήκος της βάσης. Αυτό είναι εφικτό αν πάρω $BE = AB$.</p>	1μ
<p>Στην περίπτωση αυτή ισχύει η (1) αφού η $B\Gamma$ είναι η διάμεσος στο τρίγωνο $A\Gamma E$ και γνωρίζουμε ότι η διάμεσος τριγώνου χωρίζει το τρίγωνο σε δύο ισεμβαδικά τρίγωνα.</p>	1μ

Σκόρ 3

<p>Αν E το εμβαδόν του $AB\Gamma$ και E' το εμβαδόν του ζητουμένου τριγώνου, θα έχουμε</p> $2 E = E' \quad (1)$	
<p>Κατασκευάζω τρίγωνο ΔEZ με γωνία $\Delta = \text{γωνία } A$, $\Delta E = 2 AB$, $A\Gamma = AZ$.</p>	1μ
<p>Τότε ισχύει η (1).</p>	
<p>Στην περίπτωση αυτή ισχύει η (1) αφού η $B\Gamma$ είναι η διάμεσος στο τρίγωνο $A\Gamma E$ και γνωρίζουμε ότι η διάμεσος τριγώνου χωρίζει το τρίγωνο σε δύο ισεμβαδικά τρίγωνα.</p>	2μ

Σκόρ 3

Σωστό είναι επίσης αν χρησιμοποιώντας το $E = \frac{1}{2} AB \cdot A\Gamma \cdot \eta\mu A$ καταλήξει στο ότι το νέο τρίγωνο ΔEZ πρέπει να έχει δύο χαρακτηριστικά:

a) την γων. $\Delta = \text{γων. } A$ και

b) $2 AB \cdot A\Gamma = \Delta E \cdot \Delta Z$.



Σκόρ 1

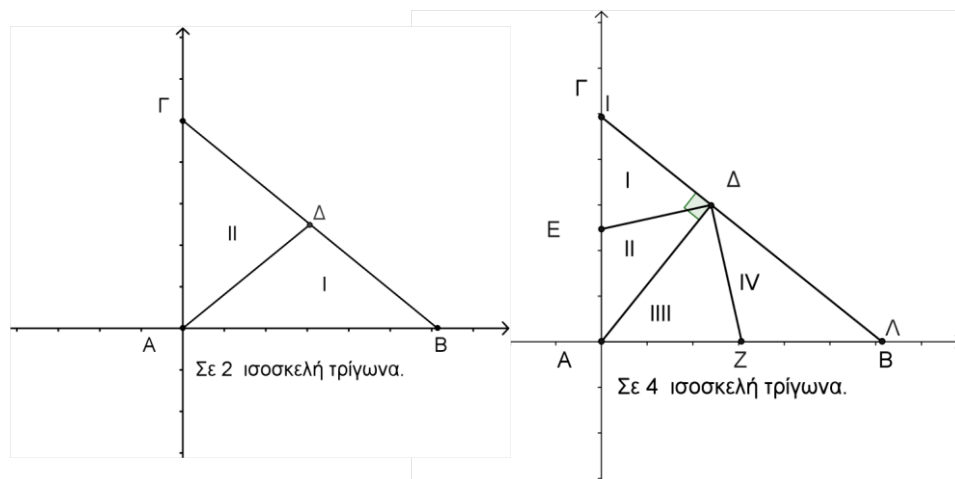
<p>Αν E το εμβαδόν του $AB\Gamma$ και E' το εμβαδόν του ζητουμένου τριγώνου, θα έχουμε</p> $2 E = E' \quad (1)$	
<p>Το νέο τρίγωνο πρέπει να έχει μια πλευρά διπλάσια της αλλης και το ίδιο ύψος.</p>	1μ

Σκόρ 0

Όλα λάθος ή δεν απάντησε στο πρόβλημα.

2) Ερώτημα Γεωμετρικό πρόβλημα (Σύνολο 7 μονάδες)

Αν $AB\Gamma$ το δοθέν τρίγωνο τρίγωνο, τότε

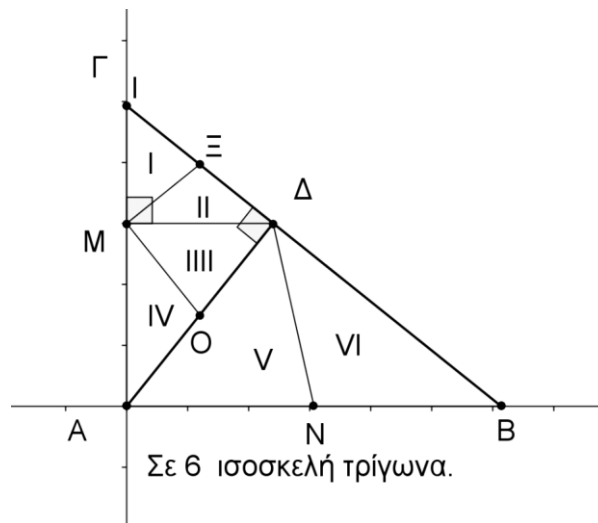


i. Σκόρ 1.5

Αν AD το ύψος στο $AB\Gamma$ που άγεται από την κορυφή A , και DE , DZ οι διάμεσοι των τριγώνων αυτών, τότε έχουμε 2 ζεύγη ισοσκελών τριγώνων.

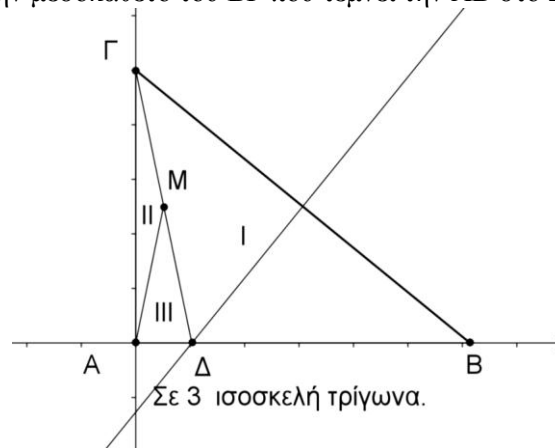
ii. Σκόρ 2.5

Φέρω AD ύψος του $AB\Gamma$ και χωρίζω το $A\Delta B$ σε 2 ισοσκελή και το $A\Delta\Gamma$ σε τέσσερα.



iii. Σκορ 3

Φέρω την μεσοκάθετο του ΒΓ που τέμνει την ΑΒ στο Δ.



Τότε, χωρίζω το ΑΔΓ σε 2 ισοσκελή τρίγωνα. Τα τρίγωνα ΓΔΒ, ΓΜΑ και ΑΜΔ είναι ισοσκελή.

Σκόρ 0

Όλα λάθος ή δεν απάντησε στο πρόβλημα.

