Συνεχείς Συναρτήσεις χωρίς Παράγωγο

Λυγάτσικας Ζήνων

Πρότυπο Πειραματικό Λύκειο Βαρβακείου Σχολής

e-mail: zenon7@otenet.gr

18 Δεκεμβρίου 2011

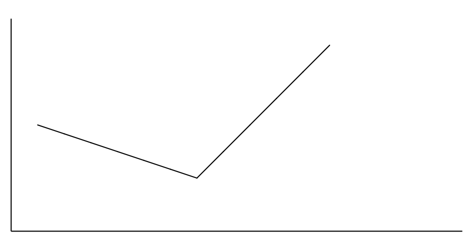
1 Εισαγωγή

Στό 18ο αιώνα η έννοια της συνάρτησης ήταν ταυτισμένη με την έννοια της αλγεβρικής καμπύλης. Στην *Εγκυκλοπαίδεια* του Diderot, στο λήμμα *συνάρτηση* γραμμένο απο τον D'Alembert μπορούμε να διαβάσουμε:

> ¨...... *καλούμε συνάρτηση του x μία αλγεβρική παράσταση που αποτελείται από οποιουσδήποτε όρους θέλει κάποιος και στους οποίους βρίσκεται ο x ανακατεμένος ή όχι με σταθερές. Έτσι*
>
> $$x^2 + x^3, \sqrt{a.a + .x.x}, \sqrt{\frac{a.a + x^3}{b.b + x^4}}, \int dx\sqrt{a^2 - x^2}$$
>
> είναι συναρτήσεις του x.¨

Ο ορισμός αυτός απέχει πολύ απο τον ορισμό που γνωρίζουμε.

Την εποχή αυτή ήταν προφανές ότι μια τέτοια συνάρτηση δέχεται παράγωγο εκτός ενδεχομένως απο κάποια ιδιάζοντα σημεία. Ήταν μια προφανή αλήθεια που δεν χρειαζόταν απόδειξη γιατί μπορούσαμε πάντα να χαράξουμε την εφαπτόμενη σ' ένα σημείο του γραφήματός της.



Στο παραπάνω σχήμα βλέπουμε το κλασσικό παράδειγμα μιας συνάρτησης συνεχούς αλλά όχι παραγωγίσιμης σ' ένα σημείο. Η έννοια της συνάρτησης προσδιορίσθηκε στον XIX^o αιώνα με τις εργασίες των Cauchy, Dirichlet, Riemann και άλλων. Η έννοια αυτή όπως την γνωρίζουμε σήμερα οφείλεται στον Riemann.

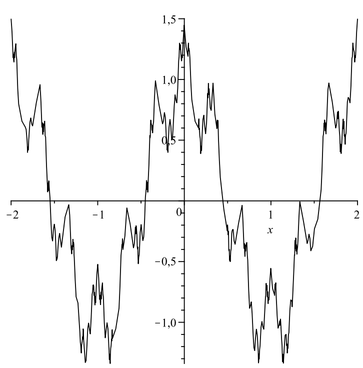
Στις αρχές του XIX^{ου} οι μόνες συναρτήσεις που παρουσίαζαν κάποιο ενδιαφέρον στους μαθηματικούς ήταν οι αναλυτικές συναρτήσεις. Μετά το 1850 το ενδιαφέρον στρέφεται στις τριγωνομετρικές συναρτήσεις που παίζουν ένα ενδιαφέροντα ρόλο στη φυσική π.χ. στις σειρές Fourier. Την εποχή αυτή ο Weierstrass, έδωσε ένα παράδειγμα συνεχούς αλλά όχι παραγωγίσιμης συνάρτησης, πιο ενδιαφέρον και πιο πολύπλοκο απο αυτό που είδαμε προηγουμένως. Παράλληλα, χωρίς υπερβολή, ήταν ένα απο τα κυριότερα παραδείγματα που έδωσε αφορμή στον Cantor για την ερώτηση πάνω στη φύση του μαθηματικού αντικειμένου που οδήγησε στη Θεωρία Συνόλων, όπως καταμαρτυρούν πολλοί σύγχρονοι μαθηματικοί.

2 Η εργασία του Weierstrass

O Weierstrass (1815 - 1897) είναι ο πρώτος που έδωσε το 1861 ένα παράδειγμα συνεχούς συνάρτησης που δεν έχει παράγωγο σε κανένα σημείο του πεδίου ορισμού της στο οποίο αυτή είναι συνεχής.

Η συνάρτηση, δες σχήμα 1, που έδωσε ο Weierstrass [1] είναι η εξής:

$$F(x) = \sum_{n=0}^{\infty} b^n \text{συν}\ (a^n \pi x)$$



Σχήμα 1: Η συναρτηση Weirstrass για $n = 100$, $a = 6$, $b = \frac{1}{3}$.

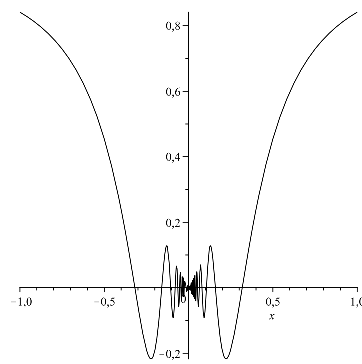
[1]Η συνάρτηση αυτή αποδίδεται-λανθασμένα ίσως- στον Riemann.

Για $\mid b \mid < 1$, η $F(x)$ είναι ομοιόμορφα συνεχής[2] διότι είναι απολύτως συνεχής και έτσι

$$\frac{-1}{1-b} \leq \sum_{n=0}^{\infty} b^n \text{συν}\ (a^n \pi x) \leq \frac{1}{1-b}$$

Αν απαιτήσουμε επι πλέον το a να είναι περιττός και το γινόμενο ab να είναι μεγαλύτερο του $1+\frac{3\pi}{2}$ τότε η συνάρτηση δεν έχει παράγωγο σε κανένα σημείο. Απ' ότι γνωρίζω υπάρχουν δύο διαφορετικές αποδείξεις μια του Du Bois-Reymond[3], και μια, πιθανόν του Goursat, την οποία θα προσπαθήσουμε να σκιαγραφήσουμε εδώ.

Σε κάθε περιοχή του πεδίου ορισμού της η συνάρτηση ταλαντώνεται απεριόριστα όπως ακριβώς η συνάρτηση $x \cdot \text{ημ}\ \frac{1}{x}$, δες σχήμα 2, σε μια περιοχή του 0.



Σχήμα 2: Η συνάρτηση $x\text{ημ}\left(\frac{1}{x}\right)$.

Θέλουμε να μελετήσουμε την παράγωγό της: $\lim_{h\to 0} \dfrac{F(x+h)-F(x)}{h}$

Θέτω: $\lim_{h\to 0} \dfrac{F(x+h)-F(x)}{h} = R_m + S_m \qquad (1)$ με

$$R_m = \frac{1}{h}\sum_{n=0}^{m-1} b^n [\text{συν}\ (a^n\pi(x+h)) - \text{συν}\ (a^n \pi x)]$$

$$S_m = \frac{1}{h}\sum_{n=m}^{\infty} b^n [\text{συν}\ (a^n\pi(x+h)) - \text{συν}\ (a^n \pi x)]$$

[2]Μια συνάρτηση f λέμε ότι συγκλίνει ομοιόμορφα στο διάστημα I που αυτή ορίζεται (ή ότι είναι ομοιόμορφα συνεχής στο I), αν $\forall \epsilon \in \mathbf{R}_+^*,\ \exists \eta(\epsilon) \in \mathbf{R}_+^*,\ \forall (x,y) \in \mathbf{R}^2 :\ (|x-y| \leq \eta(\epsilon) \Longleftrightarrow |f(x)-f(y)| \leq \epsilon)$. Μια συνάρτηση συνεχής είναι ομοιόμορφα συνεχής - Θεώρημα Heine.

[3]Du Bois-Reymond,"Der Willkurlichen Functionnet reeler Argumente nach irchen Aeandernungen in den kleinstein Intervallen", Journal de Crelle Volume 79, 1875.

Η αρχή της απόδειξης βασίζεται στον τρόπο επιλογής του h όταν αυτό τείνει στο 0 και θα δείξουμε ότι η εφαπτομένη της καμπύλης στο σημείο αυτό είναι κατακόρυφη [4].

Ο σκοπός είναι να βρούμε ένα κάτω φράγμα της (1) ώστε το όριο του φράγματος να είναι το ∞. Οπότε και το όριο του ορισμού της παραγώγου να μην είναι πεπερασμένο. Για να το πετύχουμε μεγιστοποιούμε το R_m και ελαχιστοποιούμε το S_m.

2.1 Μεγιστοποίηση του $\mid R_m \mid$

Θα χρησιμοποιήσουμε το θεώρημα Μέσης Τιμής: $f(x+h)-f(x)=hf'(c), c \in]x, x+h[$ έτσι

$$\begin{aligned} \mid R_m \mid &\leq \frac{1}{\mid h \mid}\sum_{n=0}^{m-1} \mid b^n[-h(-a^n)\pi \text{ημ } (a^n \pi c)] \mid \\ &\leq \frac{1}{\mid h \mid}\sum_{n=0}^{m-1} \pi b^n a^n \mid h \mid = \pi \frac{a^m b^m - 1}{ab-1} \end{aligned}$$

Αν υποθέσουμε ότι $ab > 1$ τότε η επιθυμιτή μεγιστοποίηση είναι: $\mid R_m \mid < \pi \dfrac{(ab)^m}{ab-1}$

Αν όμως $ab < 1$ η σειρά συγκλίνει ομαλά και η συνάρτηση $F(x)$ είναι παραγωγίσιμη.

2.2 Ελαχιστοποίηση της $\mid S_m \mid$

Αναλύουμε το $a^m x$ στο ακέραιο μέρος και στο δεκαδικό:

$a^m x = \alpha_m + \xi_m$ με $\alpha_m = E(a^m x)$ και ξ_m έτσι ώστε: $-\frac{1}{2} < \xi_m \leq \frac{1}{2}$

Επιλέγω h με τέτοιο τρόπο έτσι ώστε να τείνει στο 0, θέτωντας:

$h = \dfrac{e_m - \xi_m}{a^m}$ με $e_m = \pm 1$ και έτσι $-\frac{3}{2} \leq e_m - \xi_m \leq \frac{3}{2}$, άρα: $\mid h \mid \leq \dfrac{3}{2a^m}$.
Έχουμε λοιπόν:

$a^n\pi(x+h) = \pi a^{n-m}a^m(x+h) = \pi a^{n-m}(a^m x + a^m h) = \pi a^{n-m}(\alpha_m + \xi_m + e_m - \xi_m) = \pi a^{n-m}(\alpha_m + e_m)$

Αν ο αριθμός a είναι περιττός τότε και ο a^m είναι περιττός, άρα a^{n-m} είναι επίσης περιττός. Επειδή $e_m = \pm 1$ ο αριθμός $a^{n-m}(\alpha_m + e_m)$ είναι άρτιος ή περιττός όπως ο $\alpha_m + 1$. Συνεπώς:

$$\text{συν } (\pi a^{n-m}(x+h)) = (-1)^{\alpha_m + 1}$$

[4] Η απόδειξη του Du Bois-Reymond βασίζεται στο ότι η εφαπτόμενη ταλαντεύται ανάμεσα απο το $-\infty$ και $+\infty$.

Ομοίως:

$$\text{συν}\,(a^n\pi x) = \text{συν}\,(\pi a^{n-m}a^m x) = \text{συν}\,(\pi a^{n-m}(\alpha_m + \xi_m))$$

$$\text{συν}\,(a^n\pi x) = \text{συν}\,(\pi a^{n-m}\alpha_m).\text{συν}\,(\pi a^{n-m}\xi_m) - \text{ημ}\,(\pi a^{n-m}\alpha_m).\text{ημ}\,(\pi a^{n-m}\xi_m)$$

αλλά $a^{n-m}\alpha_m$ είναι ακέραιος άρτιος ή περιττός όπως ο α_m επειδή a^{n-m} είναι περιττός, άρα

$$\text{συν}\,(\pi a^{n-m}\alpha_m) = (-1)^{\alpha_m} \text{ και ημ}\,(\pi a^{n-m}\alpha_m) = 0\ \forall m.$$

Έτσι συν $(a^n\pi x) = (-1)^{\alpha_m}.$συν $(\pi a^{n-m}\xi_m)$, άρα

$$S_m = \frac{1}{h}\sum_{n=m}^{\infty} b^n[\text{συν}\,(a^n\pi(x+h)) - \text{συν}\,(a^n\pi x)]$$

$$S_m = \frac{1}{h}\sum_{n=m}^{\infty} b^n[(-1)^{\alpha_m+1} - (-1)^{\alpha_m}\text{συν}\,(\pi a^{n-m}\xi_m)]$$

$$S_m = \frac{1}{h}\sum_{n=m}^{\infty} b^n[(-1)^{\alpha_m+1} - (-1)(-1)^{\alpha_m+1}\text{συν}\,(\pi a^{n-m}\xi_m)]$$

$$S_m = \frac{(-1)^{\alpha_m+1}}{h}\sum_{n=m}^{\infty} b^n[1 + \text{συν}\,(\pi a^{n-m}\xi_m)]$$

Όλοι οι όροι της σειράς είναι θετικοί, άρα μπορούμε να πούμε ότι το άθροισμα είναι μεγαλύτερο από τον πρώτο τη τάξη όρο,

$\mid S_m \mid > \dfrac{b^m}{\mid h \mid}$, άλλα $\mid h \mid = \dfrac{\mid e_m - \xi_m \mid}{a^m}$, συνεπώς $\mid h \mid < \dfrac{3}{2a^m}$ και $\dfrac{1}{h} > \dfrac{2a^m}{3} \Rightarrow \mid S_m \mid > \dfrac{2a^m b^m}{3}$

Υποθέτουμε ότι: $\dfrac{2a^m b^m}{3} > \dfrac{\pi(ab)^m}{ab-1}$ άρα έχουμε $ab - 1 > \dfrac{3\pi}{2}$ ή $ab > 1 + \dfrac{3\pi}{2}$

και

$$\Big|\mid R_m \mid - \mid S_m \mid\Big| \leq \left| \frac{F(x+h) - F(x)}{h} \right| \leq \mid R_m \mid + \mid S_m \mid$$

αλλά όπως έχουμε επιλέξει $\mid S_m \mid > \dfrac{2(ab)^m}{3} > \dfrac{\pi(ab)^m}{ab-1}$

$$\Big|\mid R_m \mid - \mid S_m \mid\Big| = \mid S_m \mid - \mid R_m \mid$$

$$\left|\frac{F(x+h) - F(x)}{h}\right| \geq \mid S_m \mid - \mid R_m \mid > \frac{2(ab)^m}{3} - \frac{\pi(ab)^m}{ab-1}$$

$$\left|\frac{F(x+h) - F(x)}{h}\right| > \frac{2(ab)^m}{3}\left[\frac{ab - (1 + \frac{3\pi}{2})}{ab-1}\right]$$

Όταν m τείνει στο άπειρο το h τείνει στο 0 διότι $\mid h \mid< \frac{3}{2a^m}$. Η παράσταση

$$\frac{2(ab)^m}{3}\left[\frac{ab-(1+\frac{3\pi}{2})}{ab-1}\right]$$

τείνει στο άπειρο διότι $ab > 1$. Δεν υπάρχει τότε καθορισμένη παράγωγος.

3 Εργασία του Dini (1854 - 1918)

Όταν ο Weierstrass δημοσίευσε την συνάρτηση, οι μαθηματικοί εντυπωσιάστηκαν απο αυτό το αποτέλεσμα αλλά χωρίστηκαν σε δύο στρατόπεδα: μαθηματικοί όπως ο Hermite θεώρησαν αφύσικο το αποτέλεσμα, και μαθηματικοί όπως ο Dini ενθουσιάστηκαν απο αυτό.

Ο Dini γενίκευσε την περίπτωση της συνάρτησης του Weierstrass και μελέτησε τις συνθήκες που πρέπει να ικανοποιεί μια σειρά ακεραίων για να είναι συνεχής και μη-παραγωγίσιμη. Δημιούργησε έτσι μια κλάση τέτοιων συναρτήσεων εξετάζοντας πως μια τέτοια συνάρτηση πρέπει να ταλαντεύται [5] με σκοπό να πάρει συνθήκες για να είναι μη-παραγωγίσιμη. Δίνουμε εδώ τις συνθήκες αυτές που θα μπορούμε να χρησιμοποιούμε για την κατασκευή συναρτήσεων συνεχών και μη-παραγωγίσιμων.

Ας θεωρήσουμε μια ακολουθία συνεχών και παραγωγισίμων συναρτήσεων $U_n(x)$ στο διάστημα $[a,b]$. Ορίζουμε την εξής συνάρτηση άθροισμα:

$$F(x) = \sum_{n=0}^{\infty} U_n(x)$$

Υπολογίζοντας την παράγωγο αυτής της συνάρτησης μπορούμε να γράψουμε:

$$\begin{aligned}\frac{F(x+h)-F(x)}{h} &= \sum_{n=0}^{m-1}\frac{U_n(x+h)-U_n(x)}{h}\\ &+ \frac{U_m(x+h)-U_m(x)}{h}\\ &+ \frac{R_m(x+h)-R_m(x)}{h}\end{aligned}$$

Όπου $R_m(x)$ είναι το υπόλοιπο της σειράς.

Οι συνθήκες που πρέπει να ικανοποιεί η $F(x)$ για να μην είναι παραγωγίσιμη σε κανένα σημείο του διαστήματος $[a,b]$ είναι οι ακόλουθες:

1. η σειρά $\sum\limits_{n=0}^{\infty} U_n(x)$ να συγκλίνει ομαλά.

[5] Έστω E και E′ δύο μετρικοί χώροι, A υποσύνολο του E και f μια συνάρτηση απο το A στο E′. Η ταλάντωση της f στο A είναι η διάμετρος $\delta(f(A)) = \sup\limits_{x,y\in f(A)} d(x,y)$.

2. η $U_n(x)$ έχει πεπερασμένο αριθμό μεγίστων και ελαχίστων στο διάστημα $[a,b]$ και ο αριθμός αυτός να αυξάνει απεριόριστα με το n.

3. Τα μέγιστα και ελάχιστα διαδέχονται το ένα το άλλο με απόσταση που τείνει στο 0 όταν το n αυξάνει.

4. έχουμε $\lim_{m\to\infty}\frac{D_m}{d_m}=0$ με D_m το ελάχιστο εύρος των ταλαντώσεων της $U_m(x)$ και d_m η πιο μεγάλη απόσταση ανάμεσα σ'ενα μέγιστο και σε ένα διαδοχικό ελάχιστο.

5. πρέπει $\frac{2R_m^{'}}{D_m}+\frac{4d_m}{D_m}\sum_{n=o}^{m-1}U_m^{'}<1$ για κάθε m, με

$$R_m^{'}=\max_{x\in[a,b]}(R_m(x+h)-R_m(x))$$

και

$$U_m^{'}=\max_{x\in[a,b]}(U_m^{'}(x))$$

4 Παραδείγματα

Μπορούμε να δώσουμε έναν μεγάλο αριθμό συναρτήσεων που είναι συνεχείς χωρίς παράγωγο:

$$\sum_{n=0}^{\infty}a_n(\text{συν }(b_nx))^{2P_n+1}$$

$$\sum_{n=0}^{\infty}a_n(\text{ημ }(b_nx))^{2P_n+1}$$

$$\sum_{n=0}^{\infty}a_n(cn(b_nx))^{2P_n+1}$$

$$\sum_{n=0}^{\infty}a_n(sn(b_nx))^{2P_n+1}$$

όπου

$\sum_{n=0}^{\infty}a_n$ συγκλίνει και a_n σταθερά
b_n τείνει στο άπειρο όταν n τείνει στο άπειρο, ενώ a_nb_n δεν τείνει στο 0 όταν n τείναι στο άπειρο και P_n μια ακολουθία ακεραίων αύξουσα όταν $n\longrightarrow\infty$
sn και cn είναι αντίστοιχα τα ελλειπτικά ημίτονα και συνημίτονα.

Ακόμα δύο παραδείγματα:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\alpha^n \text{συν}\,(1.3.5.7...(2n-1)x)}{1.3.5.7...(2n-1)}$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\alpha^n \text{ημ}\,(1.5.9...(4n+1)x)}{1.5.9..(4n+1)}$$

με $\alpha > 1 + \frac{3\pi}{2}$

Υπάρχει επίσης το γνωστό παράδειγμα της συνάρτησης Van Den Warden απλούστερη στη μελέτη απο αυτή του Weierstrass.

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{d(4^n x)}{4^n}$$

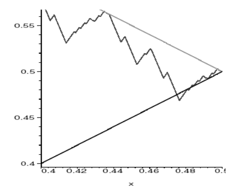
με $d(z)$ τον πιο κοντινό ακέραιο του x.

Ένα άλλο παράδειγμα είναι αυτό που έδωσε ο Bolzano και το οποίο βασίζεται σε βαθμωτές γραμμικές συναρτήσεις που εύκολα μπορούμε να κάνουμε το γράφημα και που μας δίνει την πορεία της συνάρτησης. Το παράδειγμα αυτό δίνει αναλυτικά την πορεία κατασκευής μιας συνάρτησης συνεχούς χωρίς παράγωγο.

Αρχίζουμε με ένα διάστημα $[a, b] = [0, 1]$ και έναν $l = 1$, $c = b - a$. Κατασκευάζουμε την βαθμωτή γραμμική συνεχή συνάρτηση στο $[0, 1]$ με κλίση l. Στη συνέχεια διαιρούμε το διάστημα σε τέσσερα διαστήματα και κατασκευάζουμε επίσης τις βαθμωτές γραμμικές συναρτήσεις με τις αντίστοιχες κλίσεις:

$$\begin{cases} [a, a + \frac{3}{8}\lambda] & \frac{5}{3}c \\ [a + \frac{3}{8}\lambda, \frac{1}{2}\lambda] & -c \\ [a + \frac{1}{2}\lambda, \frac{7}{8}\lambda] & \frac{5}{3}c \\ [a + \frac{7}{8}\lambda, b] & -c \end{cases}$$

Κατασκευάζουμε στη συνέχεια νέες βαθμωτές συνεχείς συναρτήσεις στα τέσσερα νέα διαστήματα με τις αντίστοιχες κλίσεις κ.ο.κ. Συνεχίζουμε τη διαδικασία απεριόριστα, οδηγώντας στο όριο τη διαδικασία θα πάρουμε το γράφημα που είναι συνεχές αλλά δεν έχει παράγωγο στο πεδίο ορισμού. Τα γραφήματα αυτής της συνάρτησης στο πρώτο βήμα και στο πρώτο και το τέταρτο φαίνονται στο Σχήμα 3.



Σχήμα 3: Κατασκευή Bolzano.

Οι συναρτήσεις που συζητάμε δεν είναι κάτι το σπάνιο. Ο Banach έδειξε ότι είναι περισσότερες απο τις συνεχείς και παραγωγίσιμες συναρτήσεις. Αν θέλουμε κατά κάποιο τρόπο να σκιαγραφήσουμε την απόδειξη, θα ορίζαμε το διανυσματικό χώρο $\mathcal{C}([a,b])$ των συνεχών συναρτήσεων στο $[a,b]$ που δεν έχουν παράγωγο, εφοδιασμένο με τη μετρική της ομαλής σύγκλισης: $\| f \| = \sup_{x\in[a,b]} (| f(x) |)$, έχοντας έτσι έναν μετρήσιμο διανυσματικό τοπολογικό χώρο ο οποίος επιπλέον είναι πλήρης με αυτήν την μετρική.

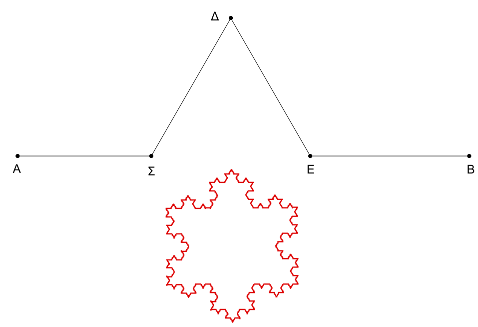
Καλούμε ισχνό ένα σύνολο ενός τοπολογικού χώρου ένα κλειστό σύνολο που είναι πεπερασμένη ένωση κλειστών συνόλων με κενό εσωτερικό. Έδειξε ότι το $\mathcal{C}([a,b])$ δεν είναι ισχνό (θεώρημα Baire) και ότι το σύνολο των συνεχών και παραγωγισίμων συναρτήσεων (εκτός ίσως ενός συνόλου μέτρου 0) είναι σύνολο ισχνό για την τοπολογία που ορίσαμε. Αυτό λέει ότι οι συνεχείς συναρτήσεις χωρίς παράγωγο είναι ¨περισσότερες¨ απο τις συνεχείς συναρτήσεις με παράγωγο.

5 Η Γεωμετρική παραδοχή

Παράλληλα με την έννοια της συνεχούς συνάρτησεις χωρίς παράγωγο αναπτύχθηκε και η έννοια της καμπύλης χωρίς εφαπτόμενες.

Ο σουηδός Van Helge Von Koch έδωσε μια τέτοια συνάρτηση, που σήμερα θεωρείται κλασσική. Άρχισε με ένα ευθύγραμμο τμήμα AB το οποίο το χώρισε σε τρία ίσα τμήματα. Το μεσαίο τμήμα αντικαθίσταται απο ένα ισόπλευρο τρίγωνο πέρνωντας έτσι την καμπύλη $A\Sigma\Delta EB$. Συνεχίζοντας την κατασκευή σε κάθε ευθ. τμήμα $A\Sigma, \Sigma\Delta, \Delta E$ και EB απεριόριστα, στο όριο έχουμε μια συνάρτηση τηςοποίας το γράφημα δεν δέχεται καμμία εφαπτομένη σε κανένα σημείο διότι τα σημεία κορυφές είναι ένα πυκνό σύνολο στο σύνολο των σημείων της καμπύλης, δές Σχήμα 4.

Η καμπύλη αυτή έχει άπειρο μήκος (non rectifiable). Τελικά στην κατασκευή της καμπύλης αφαιρέσαμε ένα κομμάτι και το αντικαταστήσαμε με δύο, έτσι ώστε



Σχήμα 4: Καμπύλη Koch.

το αρχικό μήκος του ευθ. τμήματος πολ/στηκε με $\frac{4}{3}$. Στο n^{osto} βήμα το μήκος αυτό πολ/στηκε με $\left(\frac{4}{3}\right)^n$. Στο σημείο αυτό είναι καλό να αναφέρουμε για την ιστορία ότι ο Von Koch προσπάθησε να κάνει την καμπύλη πεπερασμένου μήκους (rectifiable) προτείνοντας μια άλλη κατασκευή. Στη θέση του ευθ. τμήματος που αφαιρέσαμε στο πρώτο βήμα, έβαλε ένα τμήμα μήκους b_1. Τότε το μήκος της γραμμής θα είναι $l + 2b_1$ όπου l είναι το αρχικό μήκος του ΑΒ. Συνεχίζουμε την κατασκευή στις 4 πλευρές αφαιρώντας ένα τμήμα μήκος b_2. Στο $n^{o\sigma\tau o}$ βήμα έχουμε μια καμπύλη μήκους $l + 2\sum_{i=1}^{n} 4^i b_i$. Αν επιλέξουμε την b_i να είναι μια συγκλίνουσα σειρά τότε παίρνουμε μια γραμμή πεπερασμένου μήκους. Αλλά ο Von Koch δεν έδειξε αν αυτή η καμπύλη δέχεται ή όχι εφαπτομένη. Η ερώτηση αν μια καμπύλη χωρίς εφαπτόμενες είναι κατ΄ ανάγκη απείρου μήκους και το αντίστροφο είναι ανοικτό μέχρι των ημερών μας απο το 1906, (έτος που ο Von Koch δημοσίευσε την εργασία του). Υπάρχει ένας μεγάλος αριθμός τέτοιων καμπυλών όπως η καμπύλη Peano η οποία διέρχεται απο όλα τα σημεία ενός τεετραγώνου είναι συνεχής αλλά όχι απείρου μήκους και βέβαια χωρίς εφαπτόμενες. Απο εδώ και πέρα ανοίγει ο κόσμος των fractales. ■